Faltung

Das Faltungsintegral

Gegeben ist ein Eingangssignal $x(t)$ und ein lineares zeitinvariantes System mit Impulsantwort $h(t)$

Das Ausgangssignal $y(t)$ lässt sich nun mittels der Faltung zwischen $x(t)$ und $h(t)$ berechnen

$$y(t) = x(t)\conv h(t) = \intlinf x(\tau) \cdot h(t-\tau)\,\d\tau$$

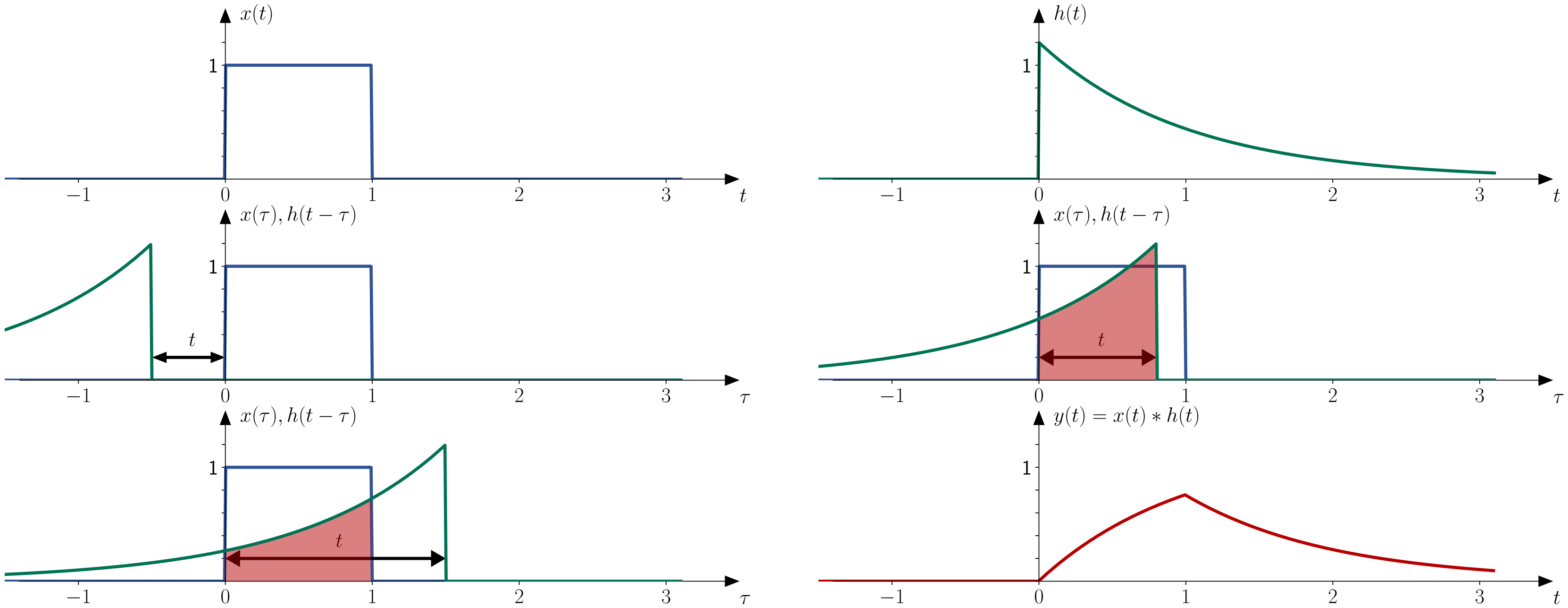
Wichtige algebraische Eigenschaften der Faltung

- Kommutativgesetz: $\quad x(t)\conv y(t) = y(t) \conv x(t)$
- Assoziativgesetz: $\quad\left(x(t)\conv y(t)\right)\conv z(t) = x(t)\conv \left(y(t)\conv z(t)\right)$
- Assoziativgesetz begzüglich einer Konstanten: $\quad\left(c\mul x(t)\right)\conv y(t) = c\cdot\left(x(t)\conv y(t)\right)$
- Distributivgesetz: $\quad\left(x(t) + y(t)\right)\conv z(t) = x(t)\conv z(t) + y(t) \conv z(t)$

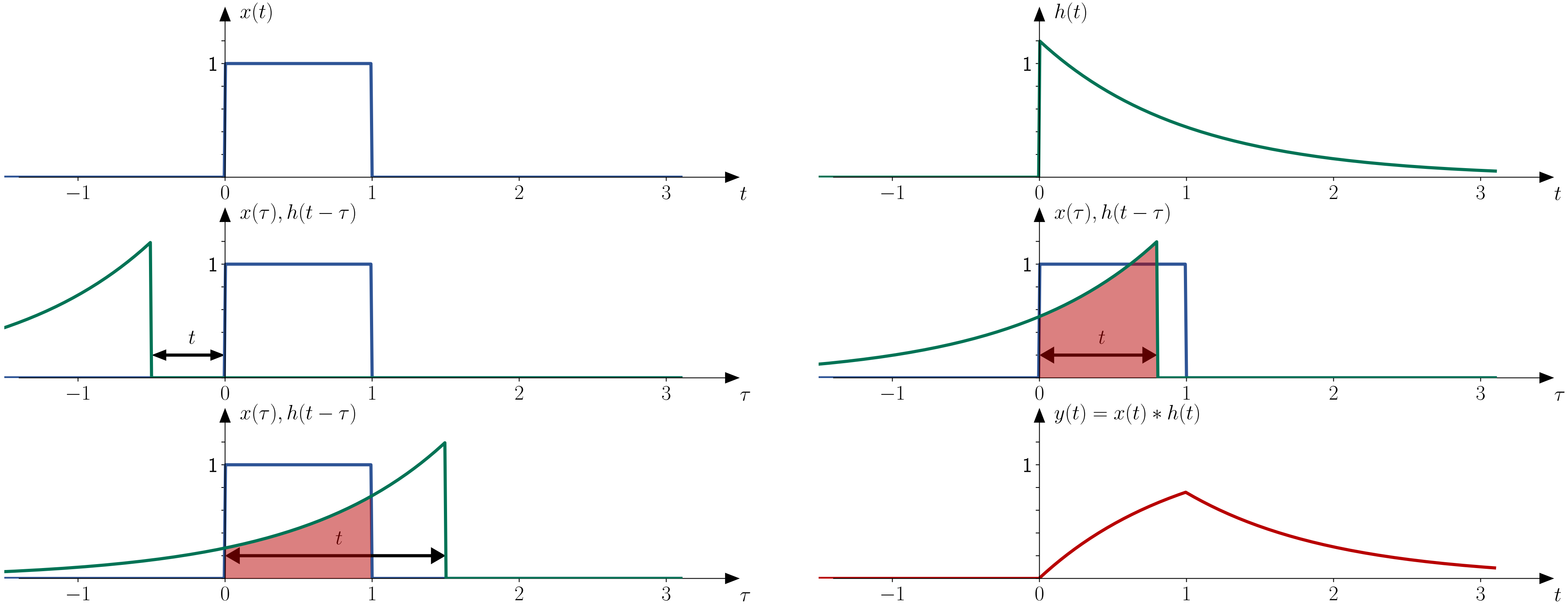
Interpretation des Falungsintegrals

Die Durchführung des Faltungsintegrals mittels folgendem Vorgehen auch anschaulich interpretiert werden:

1. Spiegeln einer der Zeitfunktionen an der y-Achse
2. Verschieben der gespiegelten Zeitfunktion um t
3. $y(t)$ entspricht der Fläche unter dem Produkt der beiden Zeitfunktionen



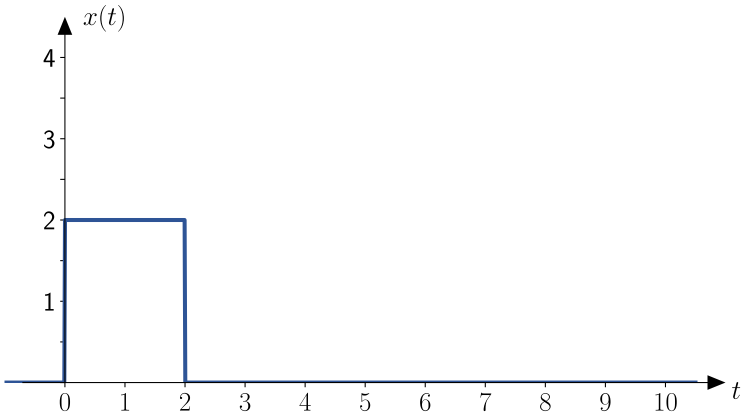
Beispiel zur anschaulichen Durchführung des Faltungsintegrals

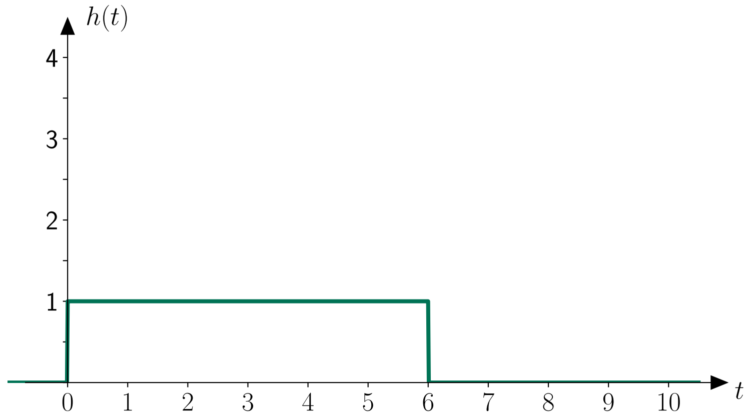


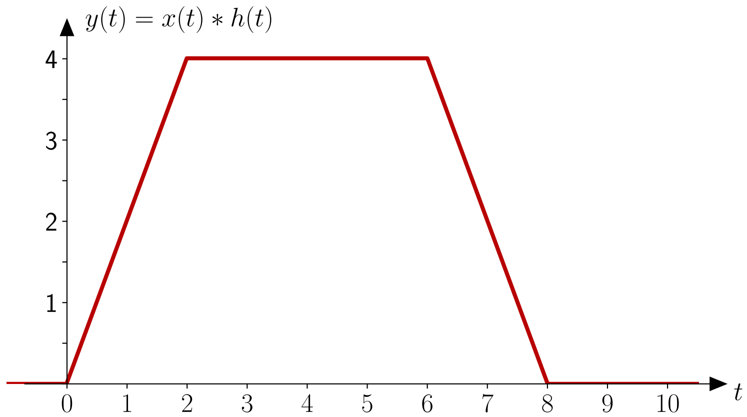
Interaktive Demo zur grafischen Durchführung des Faltungsintegrals

Beispiel: Faltung zweier Rechteckimpulse

$$x(t) = 2\cdot\rect\left(\frac{t-1}{2}\right) \qquad h(t) = \rect\left(\frac{t-3}{6}\right) \qquad y(t) = x(t) \conv h(t)$$

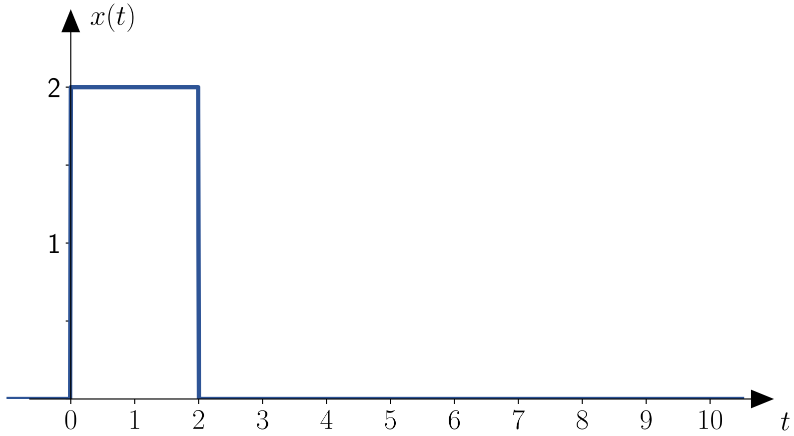


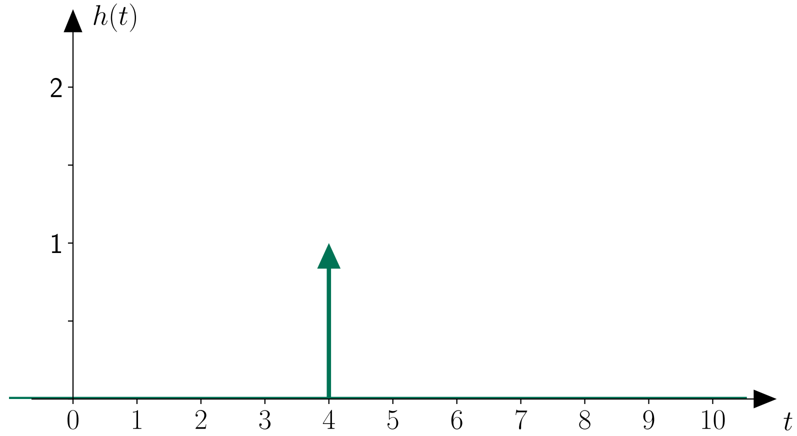


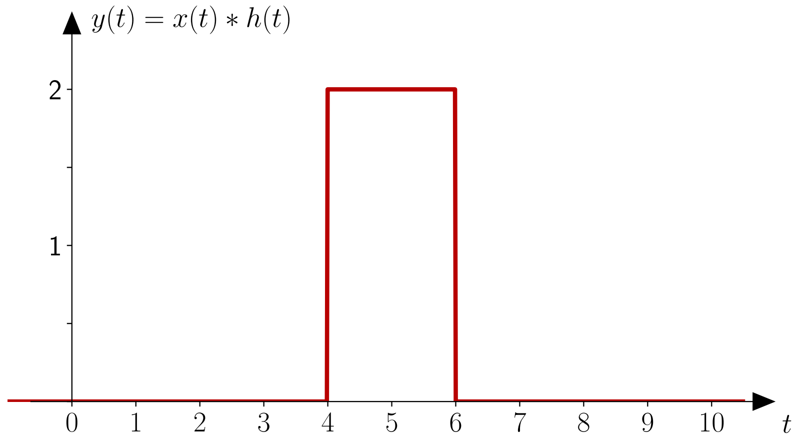


Beispiel: Faltung eines Rechteckimpulses mit Dirac Impuls

$$x(t) = 2\cdot\rect\left(\frac{t-1}{2}\right) \qquad h(t) = \dirac(t-4) \qquad y(t) = x(t) \conv h(t)$$

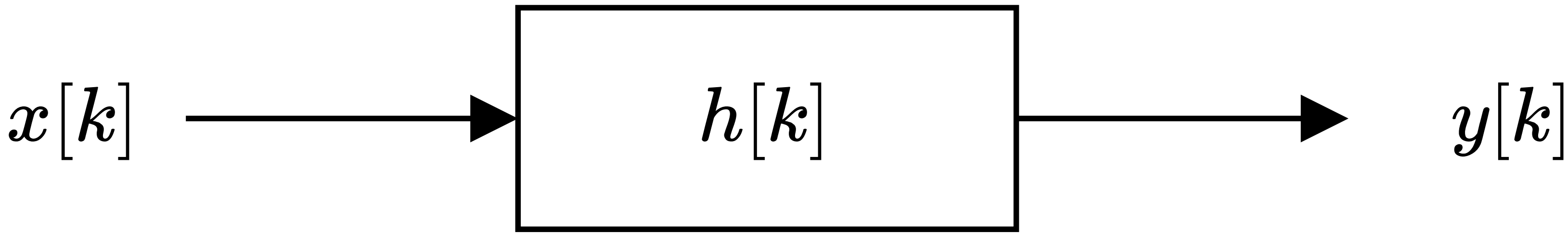






Faltung von zeitdiskreten Funktionen

Gegeben ist das Eingangssignal $x[k]$ und ein lineares zeitinvariantes System mit Impulsantwort $h[k]$



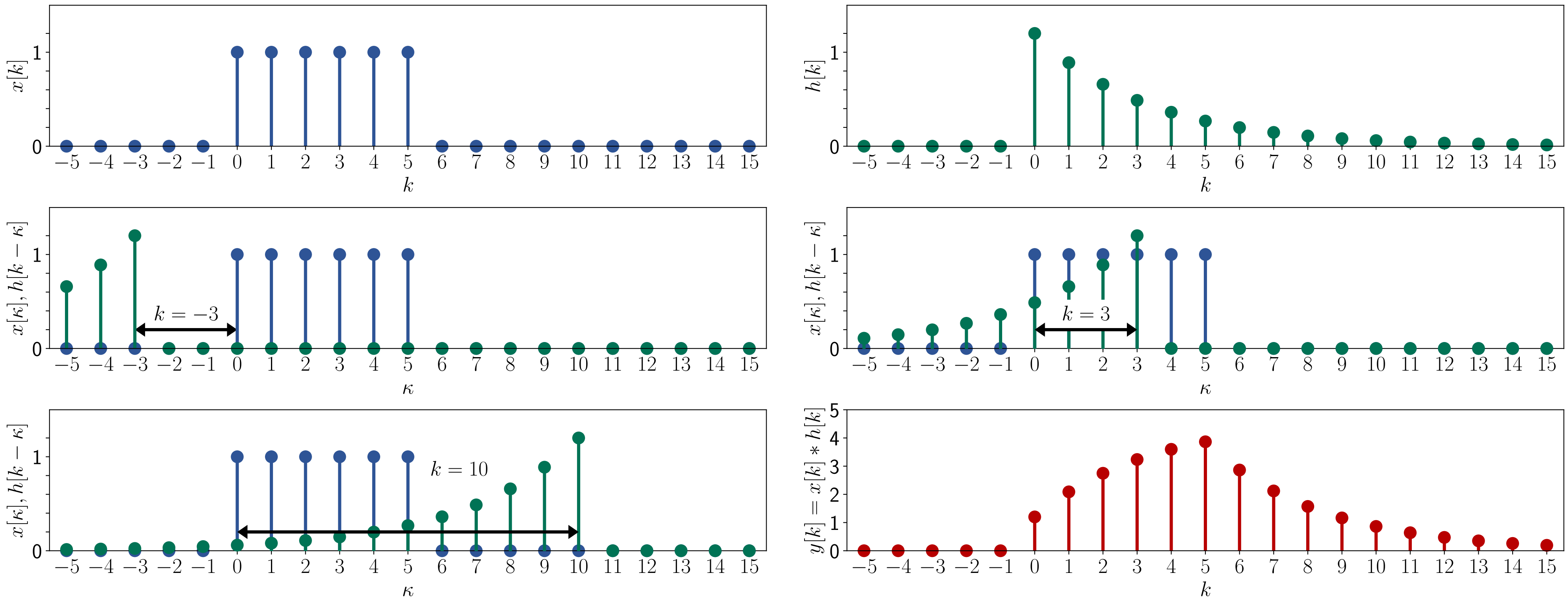
Das Ausgangssignal $y[k]$ lässt sich nun mittels der Faltung zwischen $x[k]$ und $h[k]$ berechnen

$$y[k] = x[k]\conv h[k] = \sum\limits_{\kappa=-\infty}^\infty x[\kappa]\cdot h[k-\kappa]$$

Wichtige algebraische Eigenschaften der Faltung

- Kommutativgesetz
- Assoziativgesetz
- Assoziativgesetz begzüglich einer Konstanten
- Distributivgesetz

Beispiel zur anschaulichen Durchführung der Faltungssumme



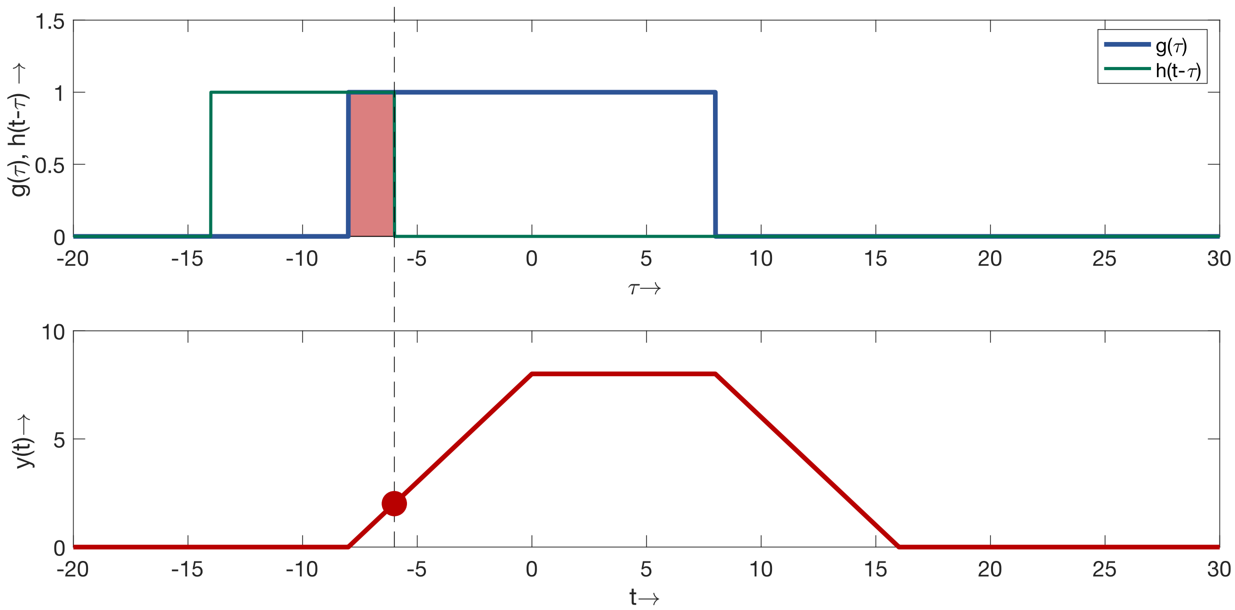
Programmierung der Faltung in Matlab

In Matlab gibt es den Befehl `conv(x, y)` der die Faltungssumme der beiden Vektoren `x` und `y` berechnet

$$z[k] = x[k]\conv y[k] = \sum\limits_{\kappa=-\infty}^\infty x[\kappa]\cdot y[k-\kappa]$$

Beispiel zur Umsetzung der Faltung von zeit-diskreten und zeit-kontinuierlichen Signalen in Matlab:

https://github.com/csiegl182/RandomProcesses/raw/main/matlab/convolution.mlx



Beispiel zur Programmierung der Faltung in Python

In Python besitzen die Pakete `numpy` oder `scipy` Methoden, um die Faltungssumme zu berechnen

- `numpy.convolve()`
- `scipy.signal.convolve()`

Die `numpy` Variante implementiert die Faltungssumme direkt (ähnlich wie in Matlab)

$$z[k] = x[k]\conv y[k] = \sum\limits_{\kappa=-\infty}^\infty x[\kappa]\cdot y[k-\kappa]$$

Die `scipy` Variante hat sehr ähnlichen Syntax aber gewisse Vorteile bei der Ausführungsgeschwindigkeit

Beispiel zur Umsetzung der Faltung von zeit-diskreten und zeit-kontinuierlichen Signalen in Python/Numpy:

https://github.com/csiegl182/RandomProcesses/blob/main/python/convolution.ipynb

Referenzen

[1] B. Girod, R. Rabenstein, A. Stenger, *Signals and Systems,* John Wiley & Sons.