Diskrete Zufallsprozesse

Diskreter Zufallsprozess

- Bisherige Betrachtung basiert auf kontinuierliche Zufallsprozesse $X(\eta, t)$ mit $t \in \mathbb{R}$
- Gleiche Überlegungen können für zeitdiskrete Zufallsprozesse getroffen werden
- Im Folgenden werden wichtigsten Unterschiede dargestellt

Zeitdiskreter Zufallsprozess mit Abtastfrequenz $1/T$

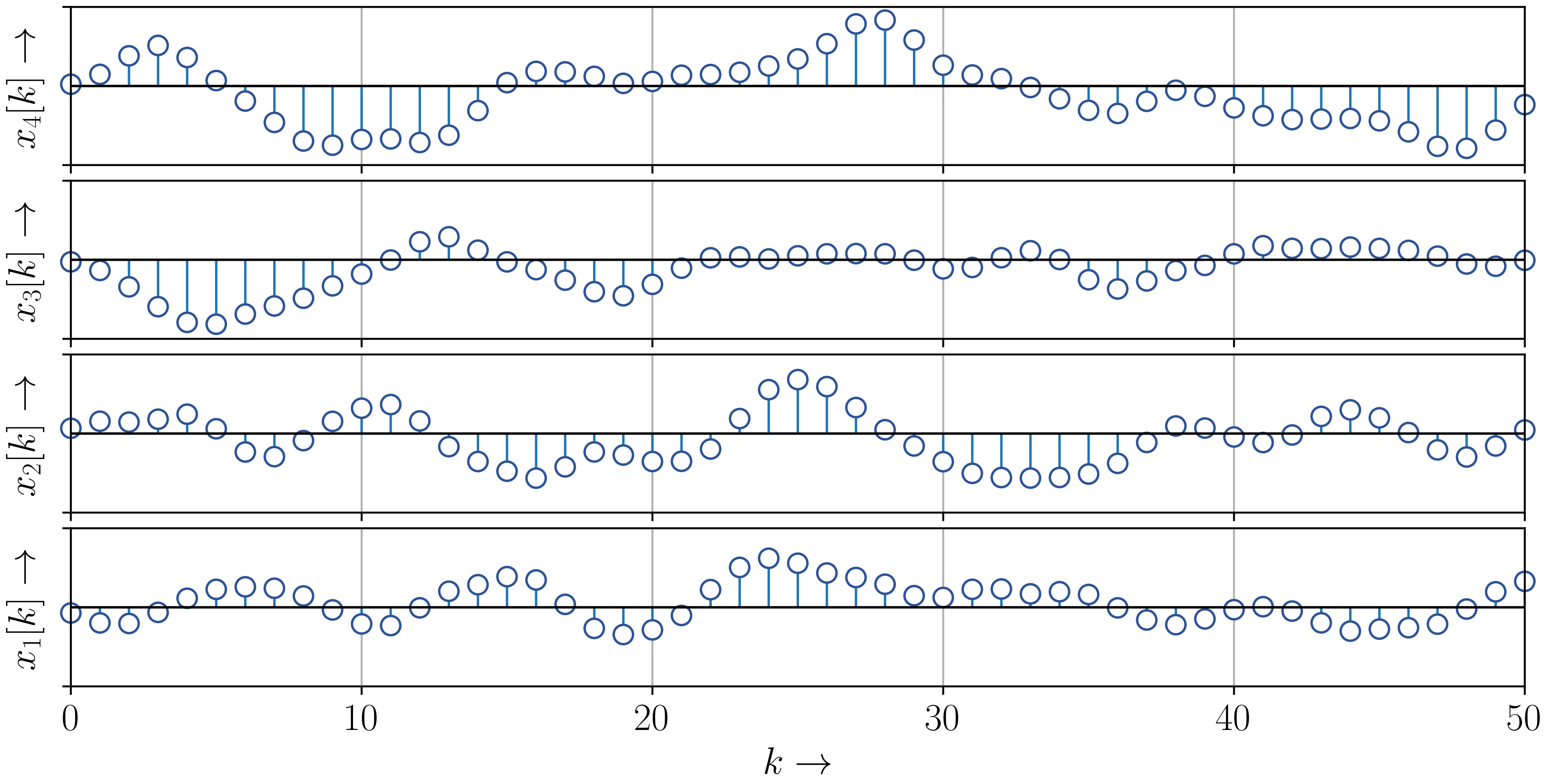
$$X_\eta[k] = X(\eta, kT) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Die Begriffe Ensemble und Musterfunktion haben die gleiche Bedeutung wie bei kontinuierlichen Zufallsprozessen

Eine Musterfunktion des Zufallsprozesses ist dann

$$X_{\eta_i}[k] = x_i[k]$$

4 Realisierungen eines diskreten Zufallsprozesses



Wahrscheinlichkeitsverteilung und -dichte von diskreten Zufallsprozessen

Ein zeitdiskreter Zufallsprozess ist *nicht* wertdiskret!

Deswegen lassen sich die stochastischen Eigenschaften von $X_\eta[k]$ mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung kontinuierlicher Zufallsvariablen beschreiben:

$$F_X(x, k) = P(\{\eta \mid X_\eta[k] \leq x\})$$

Entsprechend ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu

$$f_X(x, k) = \frac{\partial F_X(x, k)}{\partial x}$$

Die Verbundverteilung zu zwei Zeitupunkten und die Verbundverteilung verschiedener Zufallsprozesse ergibt sich analog zu zeitkontinuierlichen Zufallsprozessen.

Mittelwert, Varianz und Autokorrelation des zeitdiskreten Zufallsprozesses

Mittelwert

$$\mu_X[k] = \mathrm{E}\{X_\eta[k]\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x,k)\mathrm{d}x$$

Varianz

$$\sigma_X^2[k] = \mathrm{E}\big\{(X_\eta[k] - \mu_X[k])^2\big\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X[k])^2 f_X(x,k)\mathrm{d}x$$

Autokorrelationsfunktion

$$\varphi_{XX}[k_1, k_2] = \mathrm{E}\{X_\eta[k_1] \cdot X_\eta[k_2]\}$$

Autokovarianzfunktion

$$\psi_{XX}[k_1, k_2] = \mathrm{E}\{(X_\eta[k_1] - \mu_X[k_1]) \cdot (X_\eta[k_2] - \mu_X[k_2])\}$$

Eigenschaften der Autokorrelations- und Autokovarianzfunktion

Symmetrie

$$\varphi_{XX}[k_1, k_2] = \varphi_{XX}[k_2, k_1]$$

$$\psi_{XX}[k_1, k_2] = \psi_{XX}[k_2, k_1]$$

Für $k_1 = k_2 = k$ entspricht Autokorrelationsfunktion der Momentanleistung

$$\varphi_{XX}[k_1, k_2] = \varphi_{XX}[k, k] = \mathrm{E}\big\{(X_\eta[k])^2\big\} = \sigma_X^2[k] + \mu_X^2[k]$$

Für $k_1 = k_2 = k$ entspricht Autokovarianzfunktion der Varianz

$$\psi_{XX}[k_1, k_2] = \psi_{XX}[k, k] = \mathrm{E}\big\{(X_\eta[k] - \mu_X[k])^2\big\} = \sigma_X^2[k]$$

Für $k_1 = k_2 = k$ sind Autokorrelations- und Autokovarianzfunktion stets positiv

$$\varphi_{XX}[k, k] \geq 0 \qquad \psi_{XX}[k, k] \geq 0$$

Kreuzkorrelationsfunktion und Kreuzkovarianzfunktion

Kreuzkorrelationsfunktion KKF (*engl. Crosscorrelationfunction CCF*)

$$\varphi_{XY}[k_1, k_2] = \mathrm{E}\{X_\eta[k_1] \cdot Y_\eta[k_2]\}$$

Kreuzkovarianzfunktion (*engl. Crosscovariancefunction CCV*)

$$\psi_{XY}[k_1, k_2] = \mathrm{E}\{(X_\eta[k_1] - \mu_X[k_1]) \cdot (Y_\eta[k_2] - \mu_Y[k_2])\}$$

Symmetrie:

$$\varphi_{XY}[k_1, k_2] = \varphi_{YX}[k_1, k_2] \qquad \psi_{XY}[k_1, k_2] = \psi_{YX}[k_1, k_2]$$

Unkorrelierte Prozesse: Zwei Zufallsprozesse $X_\eta[k]$ und $Y_\eta[k]$ sind unkorreliert falls

$$\psi_{XY}[k_1, k_2] = \varphi_{XY}[k_1, k_2] - \mu_X[k_1] \cdot \mu_Y[k_1] = 0 \qquad \forall k_1, k_2$$

Orthogonale Prozesse: Zwei Zufallsprozesse $X_\eta[k]$ und $Y_\eta[k]$ sind orthogonal falls

$$\varphi_{XY}[k_1, k_2] = 0 \qquad \forall k_1, k_2$$

Stationäre zeitdiskrete Zufallsprozesse

Stationarität zeitdiskreter Zufallsprozesse ist gegeben, wenn die statistischen Eigenschaften des Prozesses unabhängig vom Abtastzeitpunkt k ist.

Damit sind Mittelwert und Varianz zeitinvariant

$$\mu_X[k] = \mu_X \qquad \sigma_X^2[k] = \sigma_X^2$$

Die Auto- und Kreuzkorrelation sind nur abhängig von der Differenz der Abtastzeitpunkte $\kappa = k_1 - k_2$

$$\begin{aligned} \varphi_{XX}[k_1, k_2] &= \varphi_{XX}[k_1, k_2] = \varphi_{XX}[\kappa] \\ \varphi_{XY}[k_1, k_2] &= \varphi_{XY}[k_1, k_2] = \varphi_{XY}[\kappa] \end{aligned} \qquad \kappa = k_1 - k_2$$

Auto- und Kreuzkorrelationsfunktion sind gerade:

$$\varphi_{XX}[-\kappa] = \varphi_{XX}[\kappa] \qquad \varphi_{XY}[-\kappa] = \varphi_{XY}[\kappa]$$

Autokorrelationsfunktion hat ihr Maximum bei $\kappa = 0$.

Stationäre zeitdiskrete Rauschprozesse

Bei einem stationären zeitdiskreten Rauschprozess $X_\eta[k]$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für alle Samples gleich, d.h.

$$f_X(x,k) = f_X(x)$$

Wenn die die einzelnen Werte einer Sequenz dieses Rauschprozesses voneinander unabhängig sind, spricht man von *unabhängig identisch verteiltem* Rauschprozess(engl. *independent identically distributed*). Damit handelt es sich auch um einen weißen Rauschprozess.

Schwach stationäres weißes Rauschen liegt bereits vor, wenn für die Autokorrelationsfunktion

$$\varphi_{XX}[\kappa] = \sigma_X^2 \cdot \delta[\kappa]$$

Ergodizität

Ergodizität liegt vor, wenn der Zeit-Mittelwert jeder Musterfunktion gleich dem Ensemble-Mittelwert ist

$$\mu_X = \mathrm{E}\{X_\eta[k]\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x_i[k]$$

Für die Varianz gilt dann

$$\sigma_X^2 = \mathrm{E}\left\{(X_\eta[k] - \mu_X)^2\right\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} (x_i[k] - \mu_X)^2$$

Die Autokorrelationsfunktion ergibt sich durch

$$\varphi_{XX}[\kappa] = \mathrm{E}\{X_\eta[k+\kappa] \cdot X_\eta[k]\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x_i[k+\kappa] \cdot x_i[k]$$

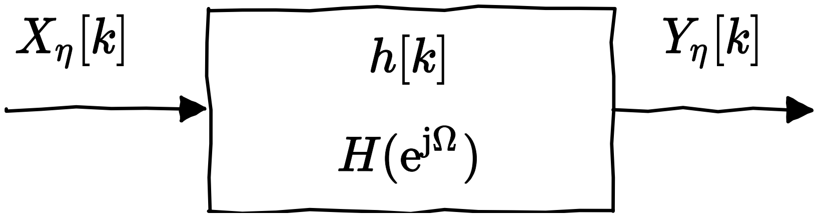
Schwach stationäre zeitdiskrete Prozesse im Frequenzbereich

Leistungsdichtespektrum ergibt sich aus der *discrete-time Fourier transform (DTFT)*:

$$\Phi_{XX}(\Omega) = \mathrm{DTFT}\{\varphi_{XX}[\kappa]\} = \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \varphi_{XX}[\kappa] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa\Omega}$$

Der Begriff Leistungsdichtespektrum ist für diskrete Zufallsprozesse ist im Hinblick auf die Dimension meist nicht korrekt. Die Dimension von $\Phi_{XX}(\Omega)$ entspricht der Dimension des Zufallsprozesses zum Quadrat ($[X_\eta[t]^2]$), was in der Regel keiner Leistung entspricht.

Überblick zur Verarbeitung stochastischer zeitdiskreter Prozesse über LTI-Systeme



Zeitbereich	Frequenzbereich
$\varphi_{XX}[\kappa] = \mathrm{E}\{X_\eta[k] \cdot X_\eta[k+\kappa]\}$	$\Phi_{XX}(\Omega)$
$\varphi_{YX}[\kappa] = \varphi_{XX}[\kappa] \ast h[\kappa]$	$\Phi_{YX}(\Omega) = \Phi_{XX}(\Omega) \cdot H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$
$\varphi_{XY}[\kappa] = \varphi_{XX}[\kappa] \ast h[-\kappa]$	$\Phi_{XY}(\Omega) = \Phi_{XX}(\Omega) \cdot H^{\ast}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$
$\varphi_{YY}[\kappa] = \varphi_{XX}[\kappa] \ast h[\kappa] \ast h[-\kappa]$	$\Phi_{YY}(\Omega) = \Phi_{XX}(\Omega) \cdot H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) \cdot H^{\ast}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$
$\varphi_{hh}[\kappa] = h[\kappa] \ast h[-\kappa]$	$\left\lvert H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right\rvert^2$
$\varphi_{YY}[\kappa] = \varphi_{XX}[\kappa] \ast \varphi_{hh}[\kappa]$	$\Phi_{YY}(\Omega) = \Phi_{XX}(\Omega) \cdot \left\lvert H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right\rvert^2$

Referenzen

[1] B. Girod, R. Rabenstein, A. Stenger, *Signals and Systems,* John Wiley & Sons.

[2] E. Hänsler, *Statistische Signale,* Springer Verlag.

[3] J.-R. Ohm, D. Lücke, *Signalübertragung,* Springer Verlag.