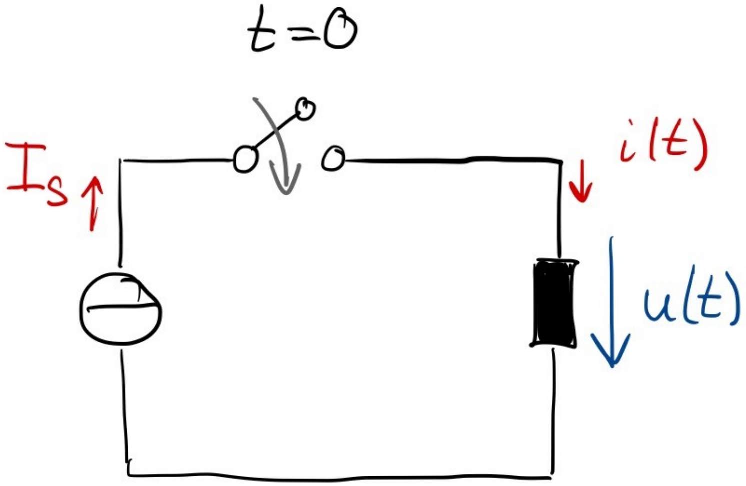
Schaltvorgänge an Induktivitäten

Induktion einer Spannung



- Betrachtung der induzierten Spannung an einer Induktivität
- Ideale Gleichstromquelle erzeugt I_s
- Im Modell erfolgt das Anlegen der Spannung über einen idealen Schalter
- Schalter wird zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen
- Initiale Stromfluß beim Schließen des Schalters ist bekannt: $i(t = 0) = I_0$

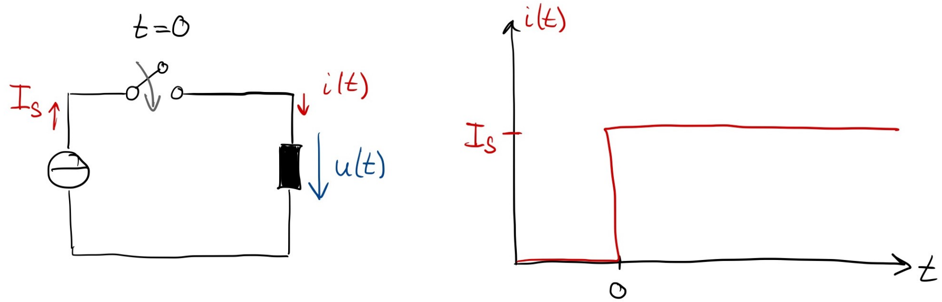
Induktionsgesetz

Nach dem Induktionsgesetz gilt für die induzierte Spannung

$$\boxed{u(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t)}$$

Beim Schließen des Schalters bei $t = 0$ springt der Strom auf den Wert I_s. Damit gilt für die induzierte Spannung:

$$u(t=0) = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t)\Big|_{t=0} \rightarrow \infty$$

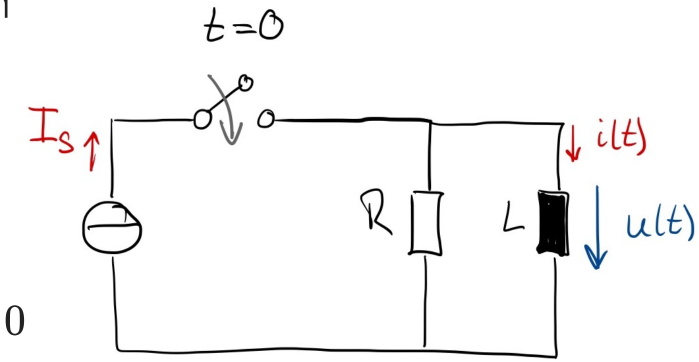


Eine unendlich hohe Spannung ist technisch nicht möglich! Eine Begrenzung der Spannung kann durch einen zusätzlichen parallelen Widerstand erreicht werden.

Begrenzung der induzierten Spannung mittels Ohm'schen Widerstand

Unter realen Bedingungen wird die induzierte Spannung begrenzt durch

- Innenwiderstand der Stromquelle
- Parasitäre Effekte (z.B. Eisenverluste des Spulenkernes)



Anwendung der Kontengleichung nach Schließen des Schalter, d.h. $t > 0$

$$I_\mathrm{s} = i_R(t) + i(t) = \frac{u(t)}{R} + i(t) = \frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) + i(t)$$

Daraus ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{R}{L} \cdot I_\mathrm{s} \qquad i(0) = I_0$$

Lösung der Differentialgleichung

Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{R}{L} \cdot I_{\mathrm{s}} \qquad i(0) = I_0$$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich aus $i(t) = i_{\mathrm{h}}(t) + i_{\mathrm{p}}(t)$ für:

1. Lösung der homogenen Differentialgleichung, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_{\mathrm{h}}(t) + \frac{R}{L} i_{\mathrm{h}}(t) = 0$$

2. Partikuläre Lösung $i_{\mathrm{p}}(t)$ durch Finden einer beliebigen Lösung der allgemeinen Differentialgleichung

1. Lösung der homogenen Differentialgleichung

Homogene Differentialgleichung (Zeitabhängigkeit wird in der folgenden Darstellung weggelassen)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_\mathrm{h} + \frac{R}{L} i_\mathrm{h} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_\mathrm{h} = -\frac{R}{L} i_\mathrm{h}$$

Lösung mittels Trennung der Variablen

$$\frac{1}{i_\mathrm{h}} \cdot \frac{\mathrm{d}i_\mathrm{h}}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}$$

$$\int \frac{1}{i_\mathrm{h}} \mathrm{d}i_\mathrm{h} = -\int \frac{R}{L} \mathrm{d}t + \alpha$$

$$\ln(i_\mathrm{h}) = -\frac{R}{L} \cdot t + \alpha$$

Damit ergibt sich als Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$i_\mathrm{h}(t) = \mathrm{e}^{-t\frac{R}{L} + \alpha} = \mathrm{e}^{-t\frac{R}{L}} \cdot \mathrm{e}^{\alpha} = \tilde{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{-t\frac{R}{L}}$$

2. Partikuläre Lösung der allgemeinen Differentialgleichung

Konstante Funktion ist eine partikuläre Lösung:

$$i_{\mathrm{p}}(t) = \tilde{I}$$

Einsetzen der partikulären Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{I} + \frac{R}{L}\tilde{I} &= \frac{R}{L} \cdot I_0 \\ 0 + \frac{R}{L}\tilde{I} &= \frac{R}{L} \cdot I_0 \\ \tilde{I} &= I_0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als allgemeine Lösung:

$$i(t) = \tilde{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{-t\frac{R}{L}} + I_0$$

Einsetzen der Anfangswertbedingung

Auswertung der Anfangswertbedingung ergibt verbleibende, unbekannte Koeffizienten:

$$i(t=0) = \tilde{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-0}{L/R}} + I_\mathrm{s} = I_0 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\alpha} = I_0 - I_\mathrm{s}$$

Zeitlicher Verlauf des Spulenstromes nach Schließen des Schalters (d.h. $t > 0$):

$$\boxed{i(t) = (I_0 - I_\mathrm{s}) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}} + I_\mathrm{s} = I_\mathrm{s}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}}\right) + I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}}}$$

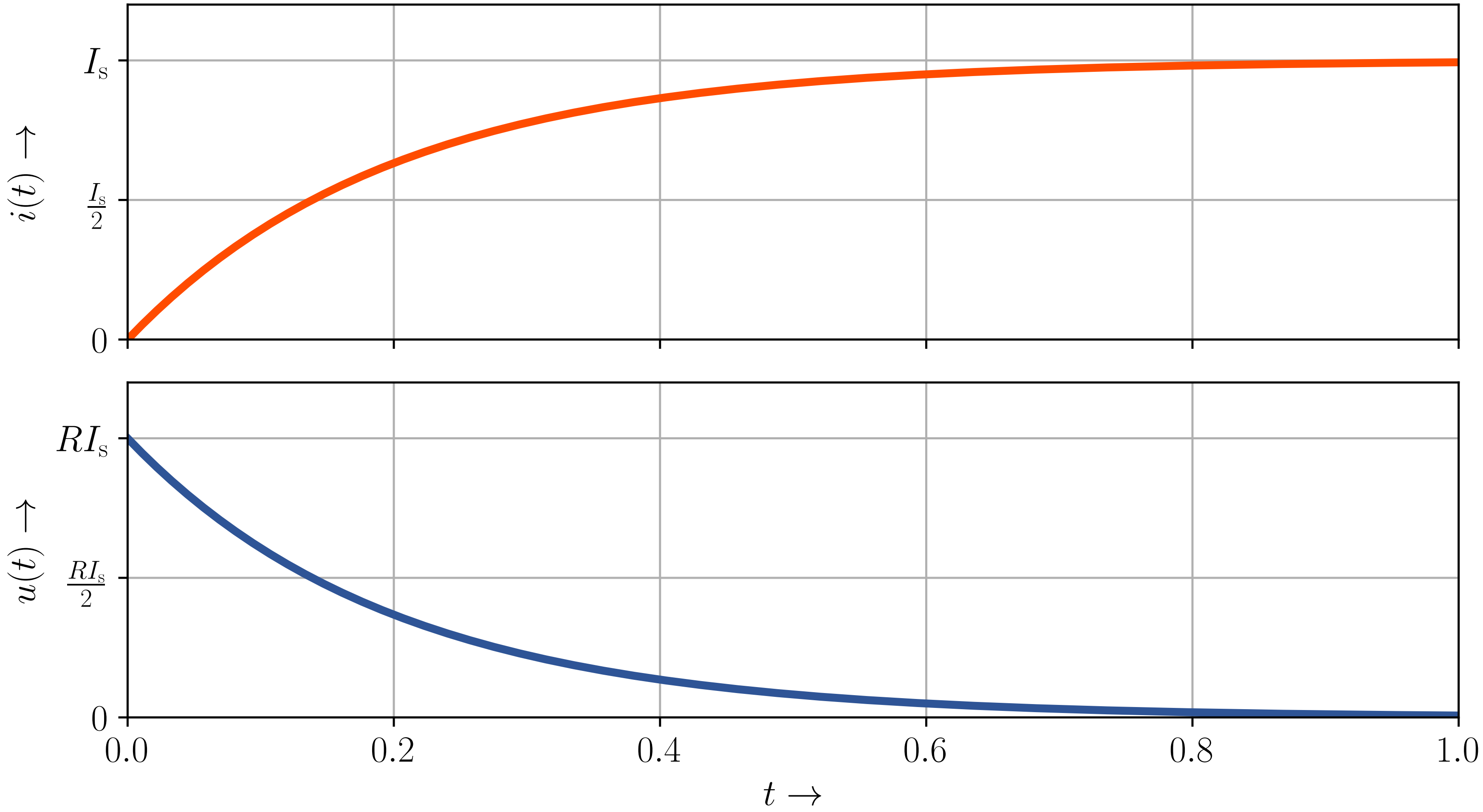
Zeitlicher Verlauf der induzierten Spannung für $t > 0$:

$$\boxed{u(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) = R \cdot (I_\mathrm{s} - I_0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}}}$$

Als charakteristische Größe des RL-Gliedes ergibt sich die Zeitkonstante

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

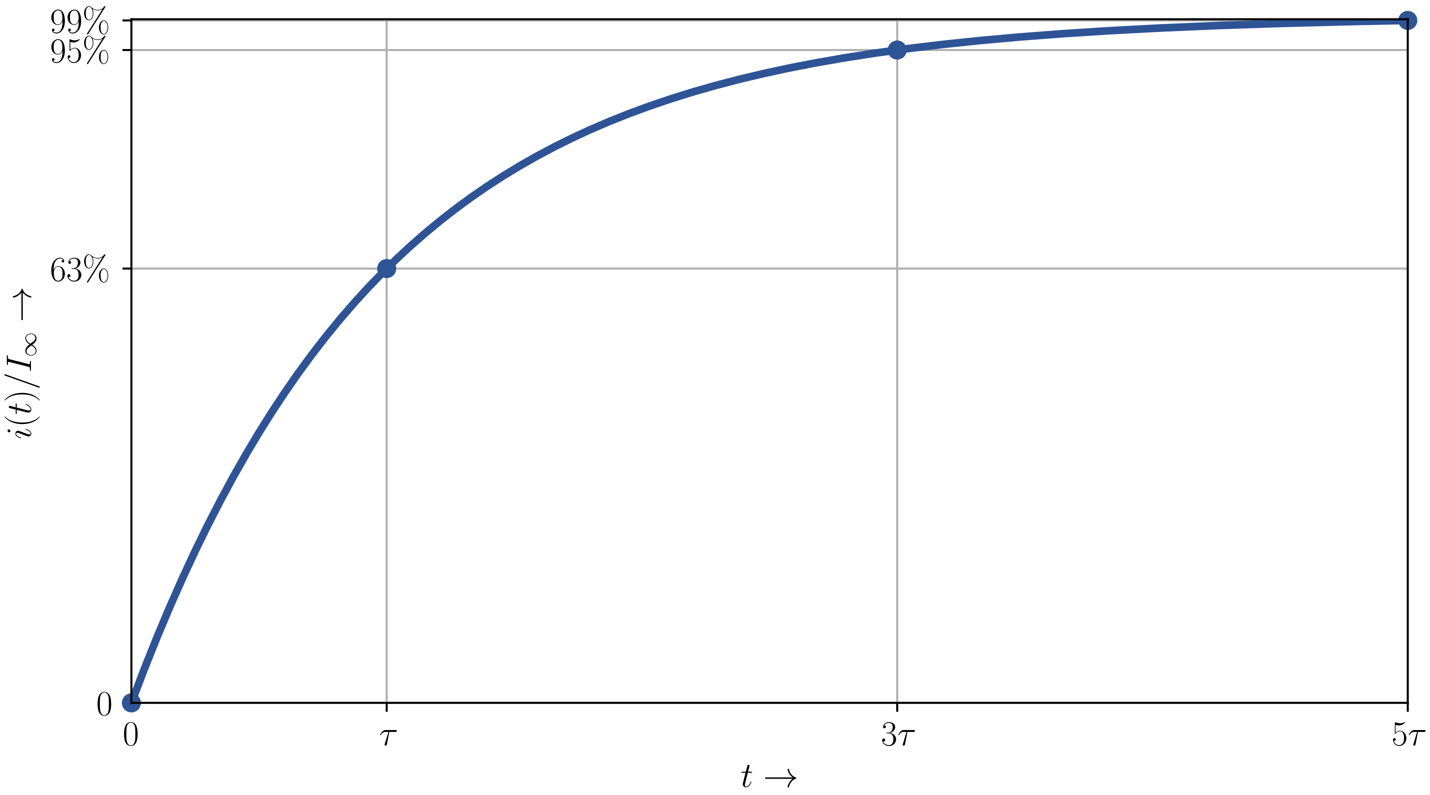
Zeitlicher Verlauf von Strom und Spannung an der Induktivität



Interpretation der Zeitkonstante I

Der stationäre Endwert des Stromes beträgt:

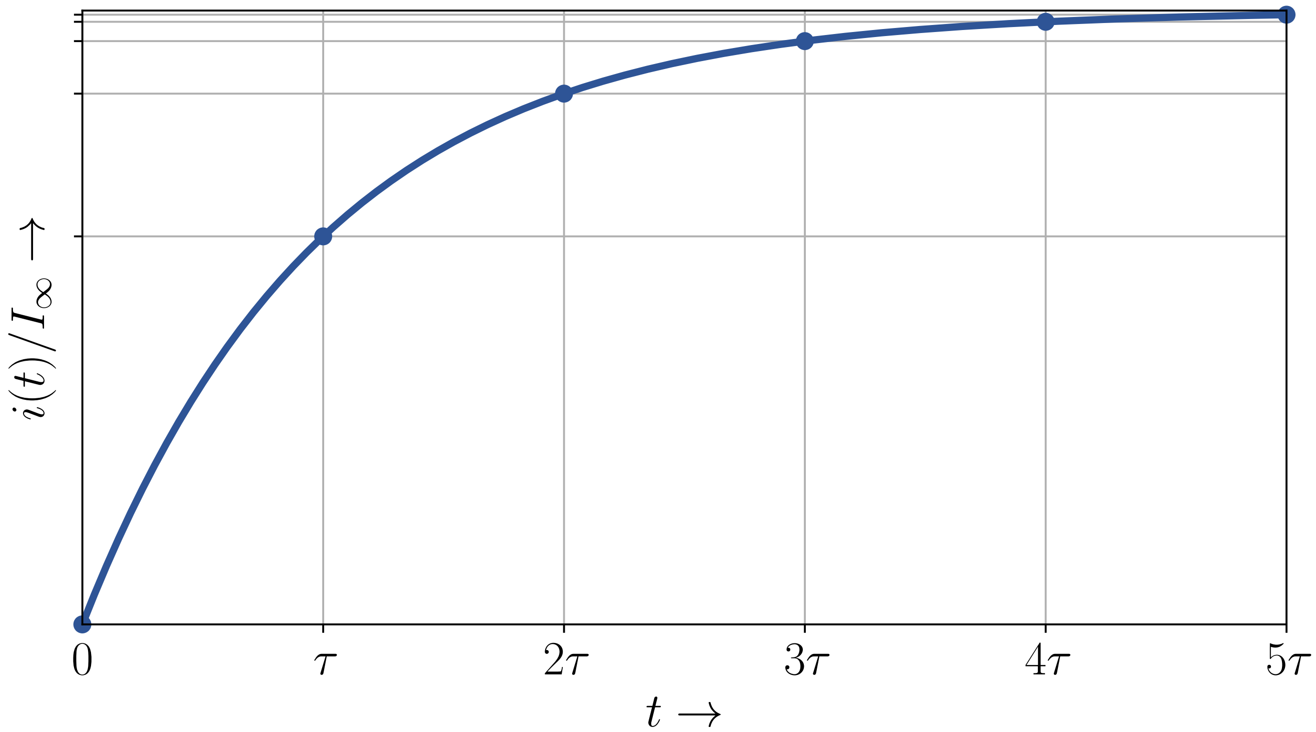
$$\lim_{t \to \infty} i(t) = I_\infty$$



Interpretation der Zeitkonstante II

Anteil des Spannungswertes im Vergleich zum Stationären Endwert bei nach Vielfachen der Zeitkonstanten τ

t	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$i(t)/I_\infty$	$\approx 63\%$	$\approx 86\%$	$\approx 95\%$	$\approx 98\%$	$\approx 99\%$

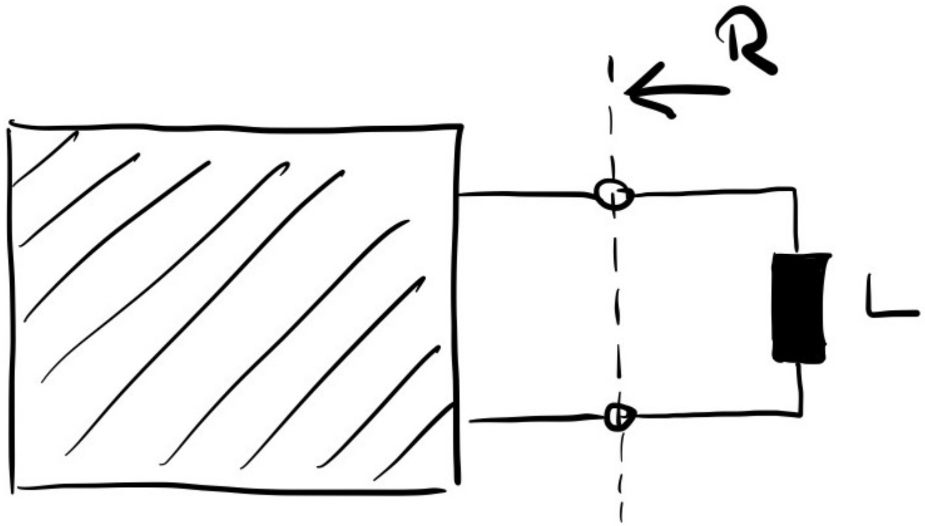


Allgemeine Berechnung des Strom- und Spannungsverlaufs I

Mit Hilfe der Randwerte des Stromverlaufes, d.h. am Schaltzeitpunkt $i(t=0)=I_0$ und dem stationären Endwert I_∞ lässt sich der gesamte Stromverlauf durch die Induktivität ohne explizite Lösung der Differentialgleichung bestimmen. Dazu müssen folgende Größen ermittelt werden:

1. Ohm'scher Widerstandes an den Klemmen der Induktivität und daraus Zeitkonstante $\tau = L/R$

(Ersetzen von Spannungsquellen durch Kurzschlüsse und Stromquellen durch Leerläufe)

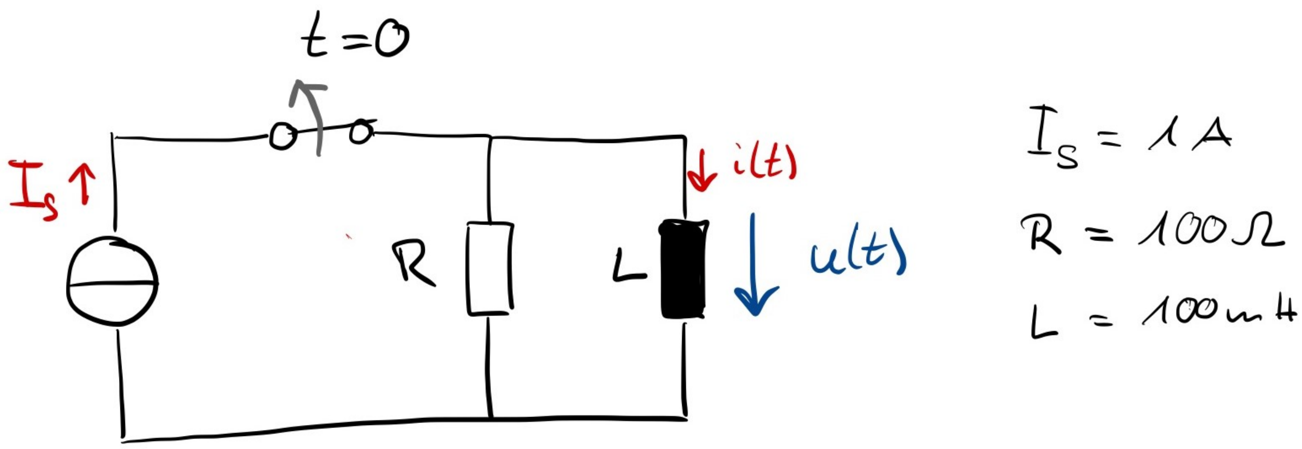


Allgemeine Berechnung des Strom- und Spannungsverlaufs II

2. Strom I_0 im Schaltzeitpunkt
3. Stationärer Endwert des Stromes I_∞ (hierzu wird die Induktivität als Kurzschluss betrachtet)
4. Strom- und Spannungsverlauf:

$$\boxed{\begin{aligned} i(t) &= (I_0 - I_\infty) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + I_\infty \\ u(t) &= \frac{L}{\tau} \cdot (I_\infty - I_0) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}}$$

Beispiel 1: Ausschaltvorgang



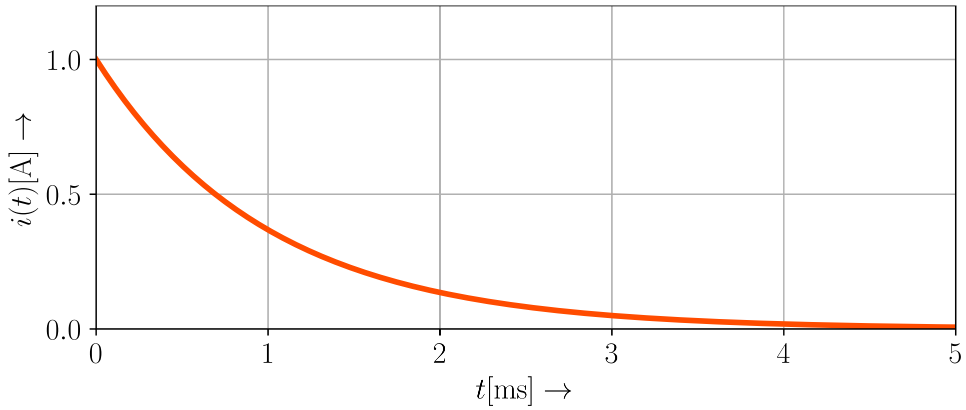
Annahme: Vor Öffnen des Schalters war dieser sehr lange geschlossen.

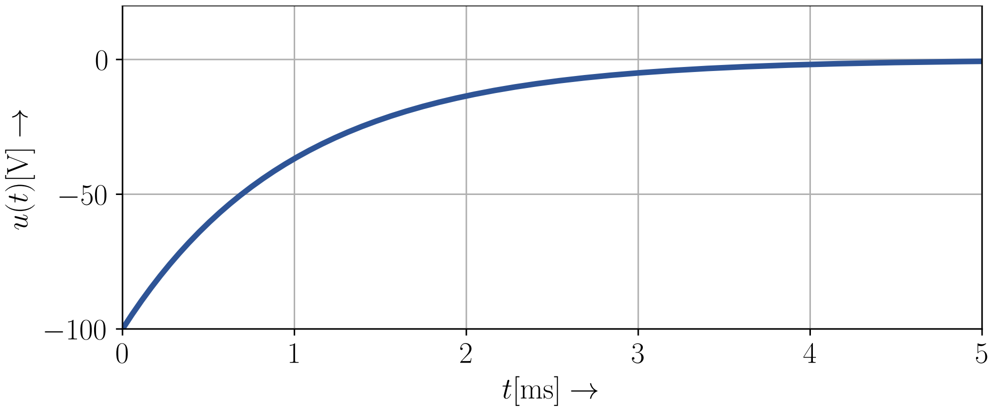
Gesucht ist der zeitliche Verlauf von Spannung $u(t)$ und -strom $i(t)$ an der Induktivität.

Beispiel 1: Ausschaltvorgang - Lösung

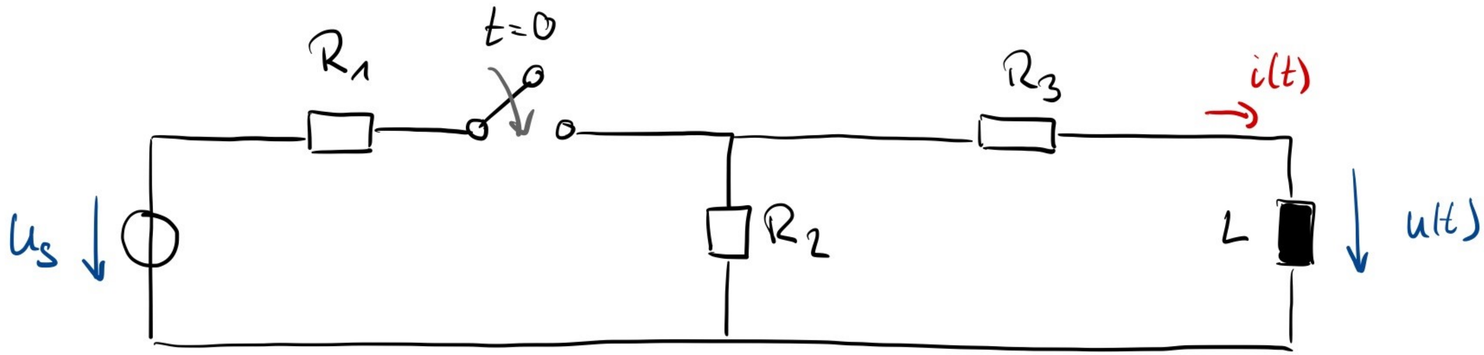
1. Zeitkonstante $\tau = L/R$
2. Bestimmung des Stromes im Einschaltzeitpunkt $I_0 = I_\mathrm{s}$
3. Stationärer Endwert des Stromes durch die Induktivität $I_\infty = 0$
4. Berechnung von Strom- und Spannungsverlauf beim Ausschaltvorgang

$$i(t) = I_\mathrm{s} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}} \qquad u(t) = -R \cdot I_\mathrm{s} \cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$$





Beispiel 2: Einschaltvorgang mit einer Spannungsquelle



$U_s = 1\,V$

$R_1 = 200\,\Omega$

$R_2 = 10\,\Omega$

$R_3 = 20\,\Omega$

$L = 50\,mH$

Vor Schließen des Schalters im Zeitpunkt $t = 0$ fliesst kein Strom durch die Induktivität.

Gesucht ist der zeitliche Verlauf von Strom und Spannung an der Induktivität.

Beispiel 2: Einschaltvorgang mit einer Spannungsquelle - Lösung

1. Zeitkonstante $\tau = L/R$

$$R = R_3 + (R_1 \,||\, R_2) = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 29.5\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \tau = 1.69\text{ms}$$

2. Strom durch Induktivität im Schaltzeitpunkt: $I_0 = 0$

3. Stationärer Endwert des Stromes:

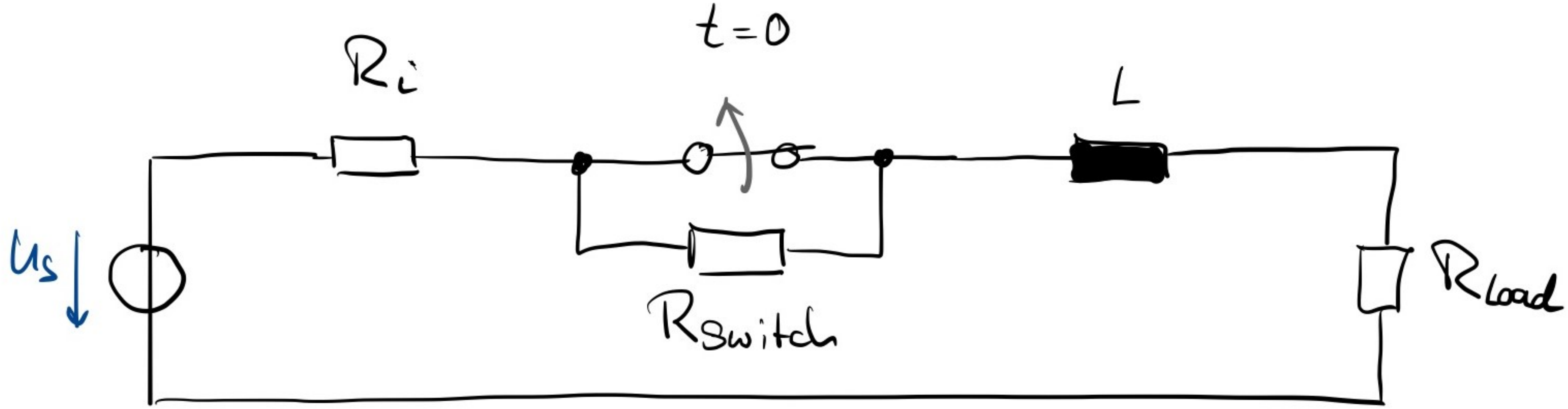
$$I_\infty = \frac{U_\text{s}}{R_1 + (R_2 \,||\, R_3)} \cdot \frac{\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 1.61\text{mA}$$

4. Strom- und Spannungsverlauf

$$i(t) = 1.61\text{mA} \cdot (1 - \text{e}^{-\frac{t}{1.69\text{ms}}})$$

$$u(t) = \frac{50\text{mH}}{1.69\text{ms}} \cdot 1.61\text{mA}\text{e}^{-\frac{t}{1.69\text{ms}}} = 47.6\text{mV}\text{e}^{-\frac{t}{1.69\text{ms}}}$$

Beispiel 3: Ausschaltvorgang mit einer Spannungsquelle



Gesucht: Spannung über dem Schalter im Verhältnis zur Quellspannung $U_{\mathrm{switch}}/U_{\mathrm{s}}$ bei $t = 0$

Beispiel 3: Ausschaltvorgang mit einer Spannungsquelle - Lösung I

Spannung über dem Schalter bei $t = 0$

$$U_{\text{switch}} = U_{\text{s}} - u(t=0) - (R_{\text{i}} + R_{\text{load}}) \cdot i(t=0)$$

Aus Strom- und Spannungsverlauf ergibt sich

$$i(t=0) = (I_0 - I_\infty) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{0}{\tau}} + I_\infty = I_0$$

$$u(t=0) = \frac{L}{\tau} \cdot (I_\infty - I_0) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{0}{\tau}} = \frac{L}{\tau} \cdot (I_\infty - I_0)$$

Zeitkonstante der Schaltung

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{i}} + R_{\text{switch}} + R_{\text{load}}}$$

Strom im Schaltzeitpunkt

$$I_0 = \frac{U_{\text{s}}}{R_{\text{i}} + R_{\text{load}}}$$

Beispiel 3: Ausschaltvorgang mit einer Spannungsquelle - Lösung II

Stationärer Endwertdes Stromes

$$I_\infty = \frac{U_\mathrm{s}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{switch} + R_\mathrm{load}}$$

Daraus ergibt sich als Spannung über dem Schalter

$$\begin{aligned}
U_\mathrm{switch} &= U_\mathrm{s} - \frac{L}{\frac{L}{R_\mathrm{i}+R_\mathrm{switch}+R_\mathrm{load}}} \cdot (I_\infty - I_0) - (R_\mathrm{i} + R_\mathrm{load}) \cdot \frac{U_\mathrm{s}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{load}} = \\
&= (R_\mathrm{i} + R_\mathrm{switch} + R_\mathrm{load}) \cdot \left(- \frac{U_\mathrm{s}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{switch} + R_\mathrm{load}} + \frac{U_\mathrm{s}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{load}} \right) = \\
&= U_\mathrm{s} \cdot \left(-1 + \frac{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{switch} + R_\mathrm{load}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{load}} \right) = U_\mathrm{s} \cdot \left(-1 + 1 + \frac{R_\mathrm{switch}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{load}} \right) = U_\mathrm{s} \cdot \frac{R_\mathrm{switch}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{load}}
\end{aligned}$$

Beispiel 3: Ausschaltvorgang mit einer Spannungsquelle - Lösung III

Schalterspannung im Verhältnis zur Quellspannung

$$\frac{U_{\text{switch}}}{U_{\text{s}}} = \frac{R_{\text{switch}}}{R_{\text{i}} + R_{\text{load}}}$$

Schalterwiderstand $R_{\text{switch}} \gg R_{\text{i}},\ R_{\text{load}}$ womit für das Verhältnis gilt

$$\frac{U_{\text{switch}}}{U_{\text{s}}} \gg 1 \qquad \Rightarrow \qquad U_{\text{switch}} \gg U_{\text{s}}$$

Beim Öffnen fällt eine sehr hohe Spannung über dem Schalter ab, was häufig zur Bildung eines Lichtbogens führt.

Quelle: http://de.wikipedia.org

Referenzen

[1] G. Hagmann, *Grundlagen der Elektrotechnik,* Aula Verlag.

[2] T. Rießinger, *Mathematik für Ingenieure,* Springer Verlag.

[3] R. Unbehauen, *Grundlagen der Elektrotechnik 1,* Springer Verlag.