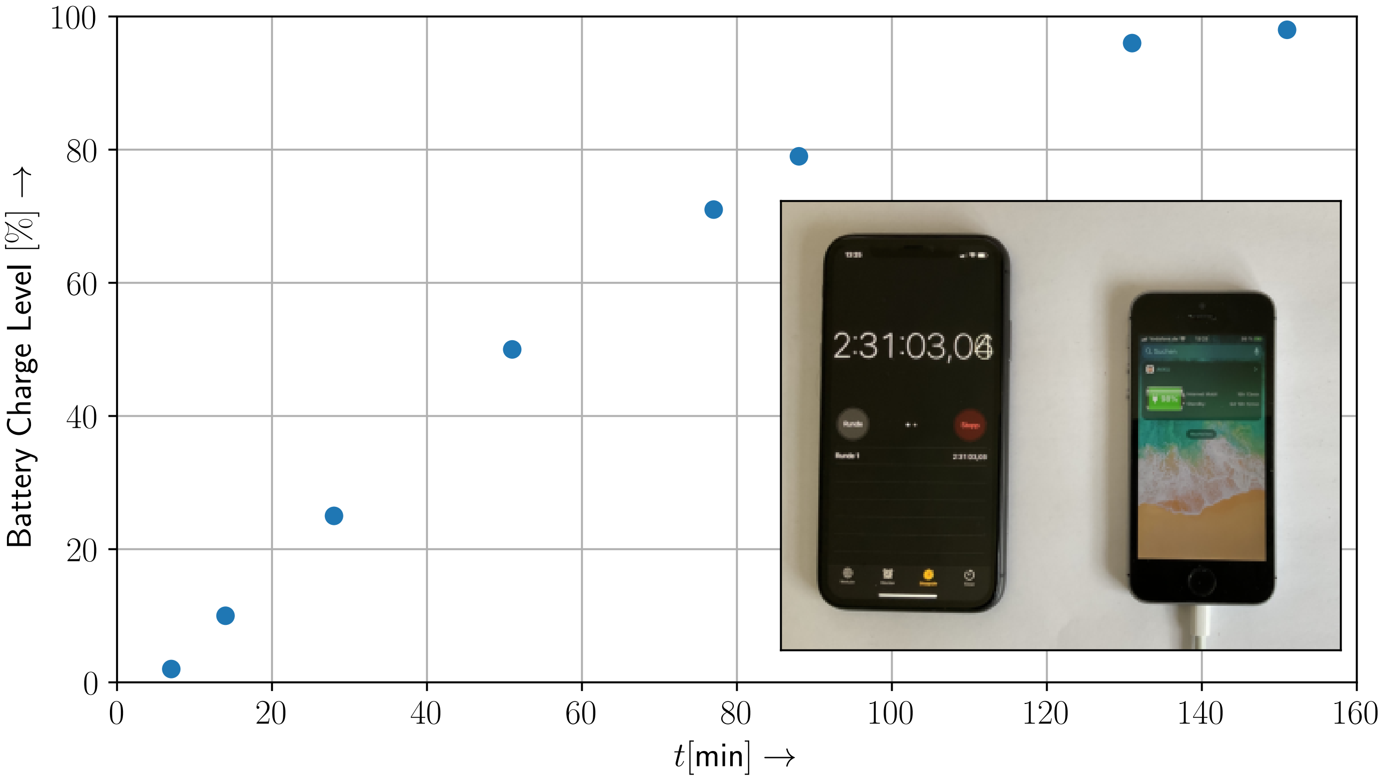
Schaltvorgang am Kondensator

Ladevorgang eines Akkus

Ladevorgang eines Mobiltelefons



Analyse des Ladeverhaltens anhand von Kondensatoren

Beobachtungen des Ladeverhaltens eines Akkus

- In den ersten Minuten lädt der Akku schnell und gleichmäßig
- Ladung auf 70% dauert ungefähr genauso lange wie restliche 30%

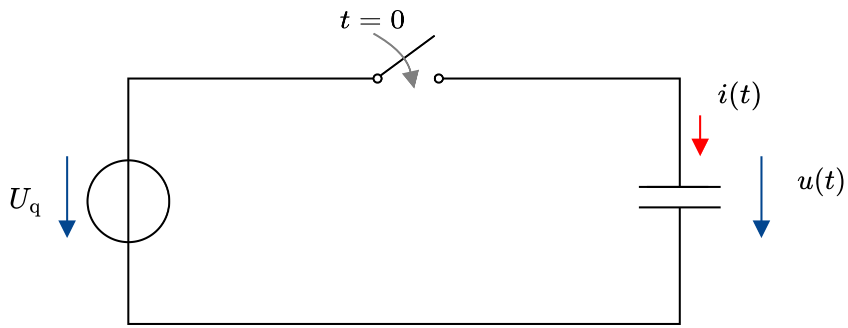
Im Folgenden wird das Lade- bzw. Entladeverhalten eines Kondensators nach einem Schaltvorgang analysiert.

Einschränkungen beim Vergleich des Ladens eines Mobiltelefons mit einem Kondensator

- Akku besitzt grundlegend andere Eigenschaften als ein Kondensator
- Ladung von Akkus wird auch von Ladecontroller beeinflußt
- Prinzip der Energiespeicherung durch Ladungstrennung ist identisch

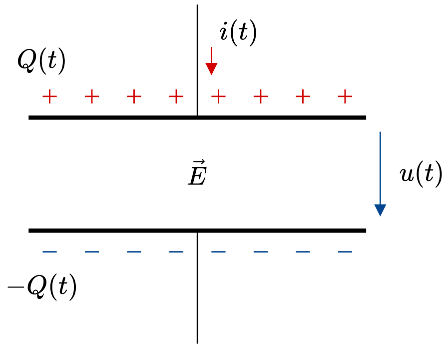
Ladevorgang am Kondensator

Vereinfachtes Modell zum Ladevorgang am Kondensator



- Betrachtung des Ladevorganges eines Kondensators
- Laden des Kondensators erfolgt mittels idealer Gleichspannungsquelle mit Spannung U_q
- Im Modell erfolgt das Anlegen der Spannung über einen idealen Schalter
- Schalter wird zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen
- Initiale Kondensatorspannung beim Schießen des Schalters: $u(t = 0) = U_0$

Zusammenhang zwischen Strom- und Spannung am Kondensator



Zusammenhang zwischen Ladungsmenge Q im Kondensator und anliegender Spannung:

$$Q(t) = C \cdot u(t)$$

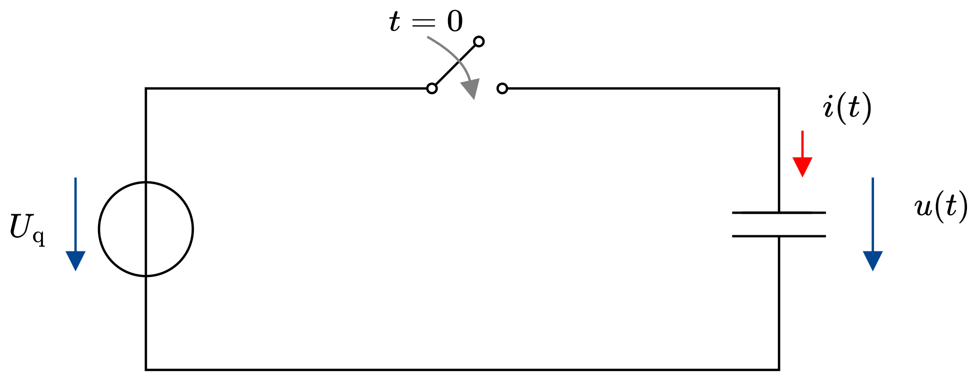
Der Ladestrom $i(t)$ des Kondensators entspricht der Änderung der Ladung $Q(t)$ pro Zeit:

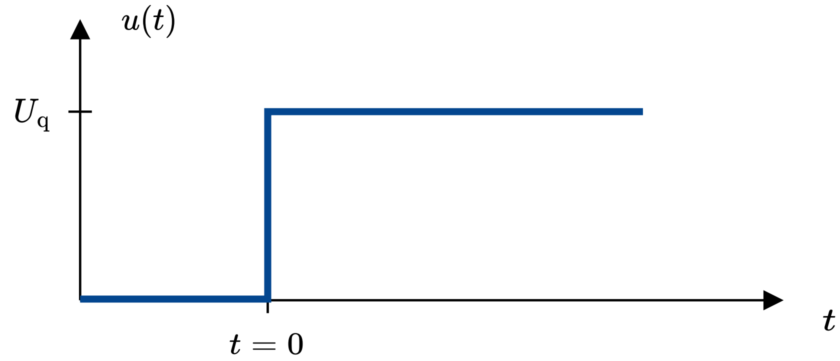
$$i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t)$$

Damit ergibt sich als Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Kondensator:

$$\boxed{i(t) = C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) = C \cdot \dot{u}(t)}$$

Ladevorgang des Kondensators





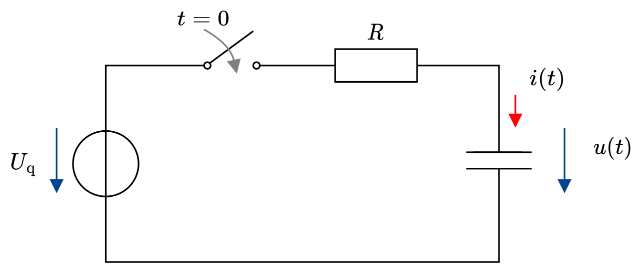
Beim Schließen des Schalters steigt die Spannung am Kondensator sprunghaft auf U_q.

Um dies zu erreichen müsste im Zeitpunkt $t = 0$ ein unendlich hoher Ladestrom fließen:

$$i(t = 0) = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t)\Big|_{t=0} \rightarrow \infty$$

Ein unendlich hoher Ladestrom ist technisch nicht möglich! Eine Begrenzung des Ladestromes kann durch berücksichtigung eines zusätzlichen Widerstandes erreicht werden.

Realer Ladevorgang am Kondensator



In einem realen System wird der Ladestrom begrenzt z.B. durch:

- Innenwiderstand der Spannungsquelle
- Parasitäre Widerstände (Leitungen, ohm'sche Verluste der Kondensatorplatten, etc.)

Auswertung der Maschengleichung nach Schließen des Schalters, d.h. $t > 0$:

$$U_s = R \cdot i(t) + u(t) = RC \cdot \dot{u}(t) + u(t)$$

Differentialgleichung zum Ladevorgang des Kondensators:

$$\dot{u}(t) + \frac{1}{RC} \cdot u(t) = \frac{1}{RC} \cdot U_s \qquad u(0) = U_0$$

Lösung der Differentialgleichung

Differentialgleichung zum Ladevorgang des Kondensators:

$$\dot{u}(t) + \frac{1}{RC} \cdot u(t) = \frac{1}{RC} \cdot U_\mathrm{s} \qquad u(0) = U_0$$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich aus $u(t) = u_\mathrm{h}(t) + u_\mathrm{p}(t)$ für:

1. Lösung der homogenen Differntialgleichung, d.h.

$$\dot{u}_\mathrm{h}(t) + \frac{1}{RC} u_\mathrm{h}(t) = 0$$

2. Partikuläre Lösung $u_\mathrm{p}(t)$ durch Finden einer beliebigen Lösung der allgemeinen Differentialgleichung

1. Lösung der homogenen Differentialgleichung

Homogene Differentialgleichung (Zeitabhängigkeit wird in der folgenden Darstellung weggelassen)

$$\dot{u}_\mathrm{h} + \frac{u_\mathrm{h}}{RC} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{u}_\mathrm{h} = -\frac{u_\mathrm{h}}{RC}$$

Lösung mittels Trennung der Variablen (Zeitabhängigkeit wird in dieser Darstellung weggelassen)

$$\frac{1}{u_\mathrm{h}} \cdot \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{h}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}$$

$$\int \frac{1}{u_\mathrm{h}} \mathrm{d}u_\mathrm{h} = -\int \frac{1}{RC} \mathrm{d}t$$

$$\ln(u_\mathrm{h}) = -\frac{1}{RC} t + \alpha$$

Damit ergibt sich als Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$u_\mathrm{h}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}+\alpha} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \cdot \mathrm{e}^{\alpha} = \tilde{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

2. Partikuläre Lösung der allgemeinen Differentialgleichung

Konstante Funktion ist eine partikuläre Lösung:

$$u_{\mathrm{p}}(t) = \tilde{U}$$

Einsetzen der partikulären Lösung:

$$0 = \frac{1}{RC}(U_{\mathrm{s}} - \tilde{U}) \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{U} = U_{\mathrm{s}}$$

Damit ergibt sich als allgemeine Lösung:

$$u(t) = \tilde{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + U_{\mathrm{s}}$$

Einsetzen der Anfangswertbedingung

Auswertung der Anfangswertbedingung ergibt verbleibende, unbekannte Koeffizienten:

$$u(t=0) = \tilde{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{0}{RC}} + U_\mathrm{s} = U_0 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\alpha} = U_0 - U_\mathrm{s}$$

Zeitlicher Verlauf der Kondensatorspannung nach Schließen des Schalters (d.h. $t > 0$):

$$\boxed{u(t) = (U_0 - U_\mathrm{s}) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + U_\mathrm{s} = U_\mathrm{s}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) + U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}}$$

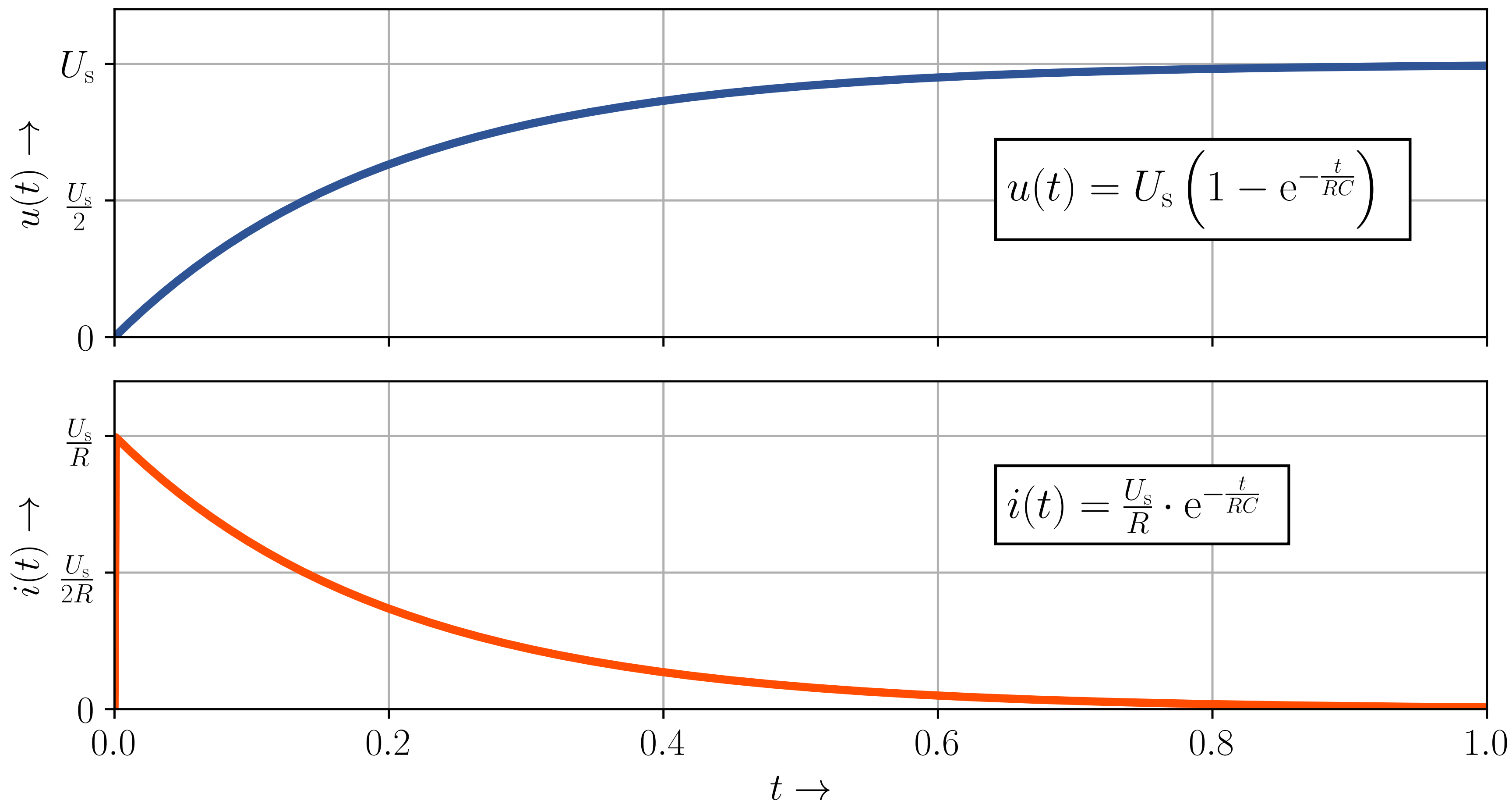
Zeitlicher Verlauf des Ladestromes für $t > 0$:

$$\boxed{i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \frac{U_\mathrm{s} - U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}}$$

Als charakteristische Größe des RC-Gliedes ergibt sich die Zeitkonstante

$$\boxed{\tau = RC}$$

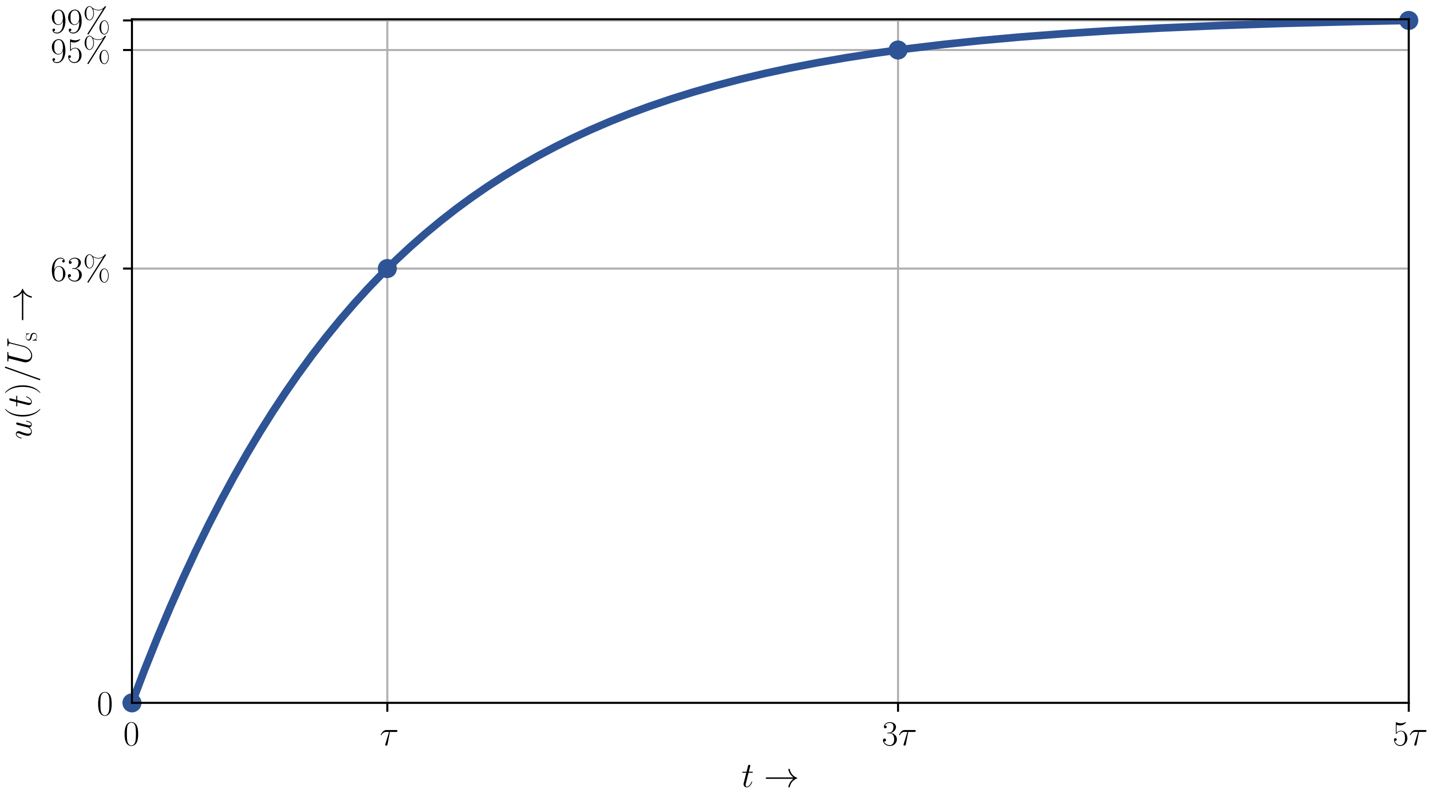
Zeitlicher Verlauf von Strom und Spannung am Kondensator ($U_0 = 0$)



Interpretation der Zeitkonstante I

Stationärer Endwert:

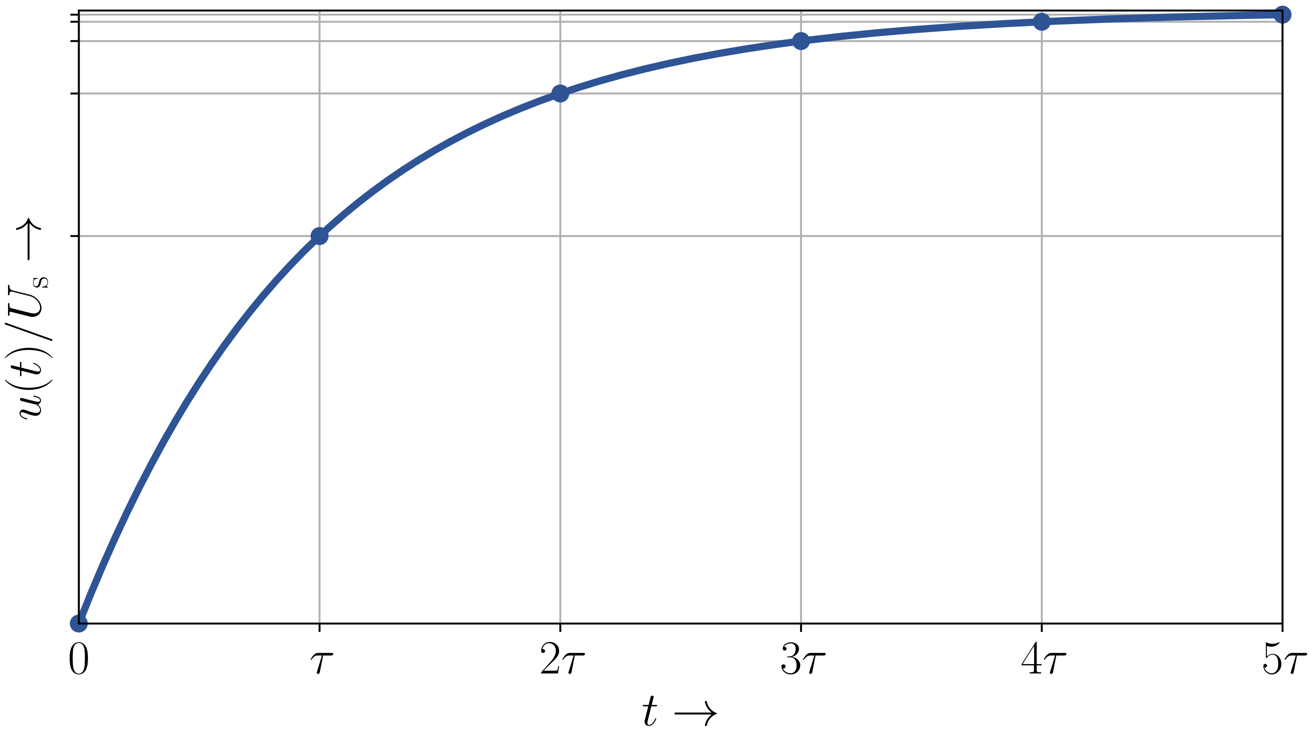
$$\lim_{t \to \infty} u(t) = U_\mathrm{s}$$



Interpretation der Zeitkonstante II

Anteil des Spannungswertes im Vergleich zum Stationären Endwert bei nach Vielfachen der Zeitkonstanten τ

t	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$u(t)/U_\mathrm{s}$	$\approx 63\%$	$\approx 86\%$	$\approx 95\%$	$\approx 98\%$	$\approx 99\%$



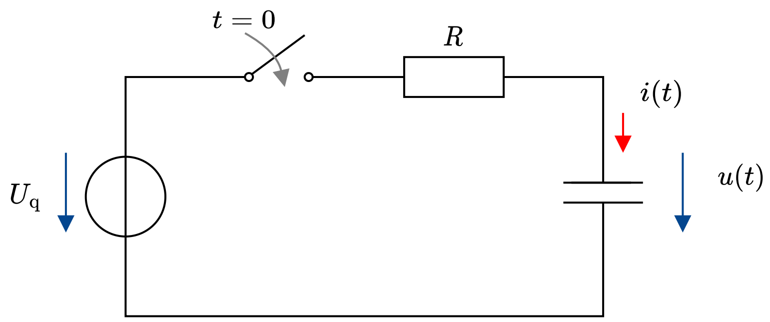
Ladeverhaltens für beliebige Netzwerke

Lade- bzw. Entladeverhalten eines einfachen RC-Gliedes

Durch Lösung der Differentialgleichung ergibt sich für Kondensatorspannung und -strom

$$u_C(t) = (U_0 - U_\infty) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U_\infty$$

$$i_C(t) = \frac{C}{\tau} \cdot (U_\infty - U_0) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

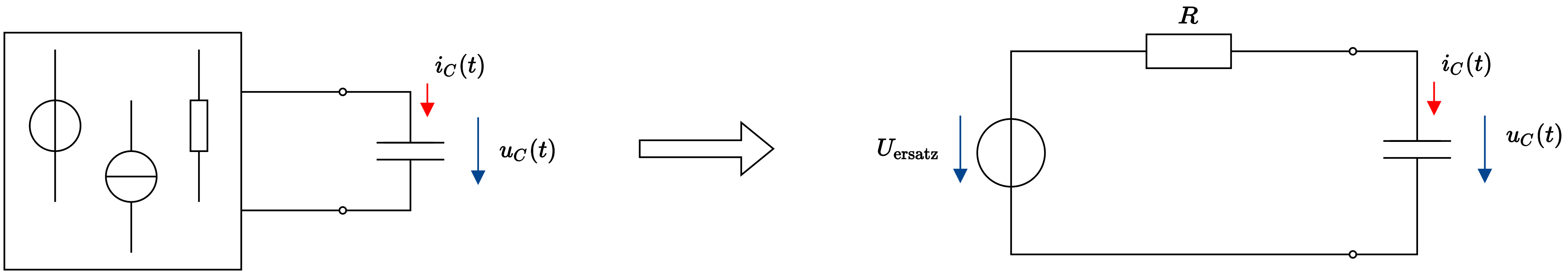


Dabei ist

- U_0 die initiale Kondensatorspannung (d.h. im Moment des Schaltvorganges)
- U_∞ der stationäre Endwert der Kondensatorspannung
- $\tau = RC$ die Zeitkonstante des Lade- bzw. Entladevorganges

Erweiterung auf beliebige Widerstandsnetzwerke mit einem Kondensator

Aus der Theorie der Ersatzspannungsquellen lässt sich jedes Netzwerk bestehend aus einem Kondensator auf den Fall mit einer Spannungsquelle überführen.



Aus den Parametern der Ersatzspannungsquelle des Netzwerkes lassen sich die relevanten Größen ermitteln und in die Lösung der Differentialgleichung eintragen

- U_0 bleibt die initiale Kondensatorspannung (d.h. im Moment des Schaltvorganges)
- U_∞ entspricht der Leerlaufspannung an den Klemmen und damit dem Wert der *Ersatzquelle* U_{ersatz}
- $\tau = RC$ ergibt sich aus dem Produkt der Kapazität mit dem *Innenwiderstand* R der Ersatzspannungsquelle

Vorgehen zur Berechnung des Spannungs- und Stromverlaufs

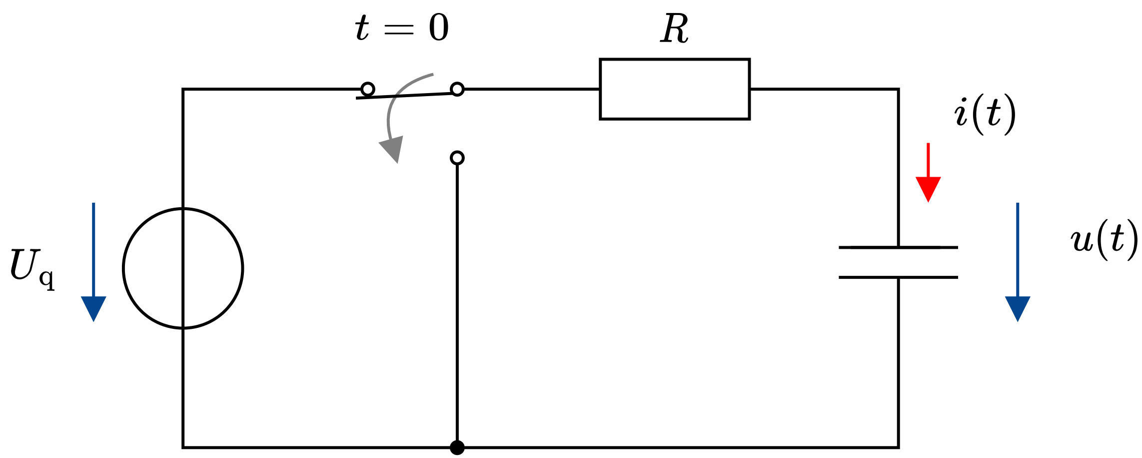
Allgemeiner Spannungs- und Stromverlauf am Kondensator

$$\boxed{\begin{aligned} u_C(t) &= (U_0 - U_\infty) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U_\infty \\ i_C(t) &= \frac{C}{\tau} \cdot (U_\infty - U_0) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}}$$

1. Berechnung der Zeitkonstante
   - Ersetzen von Spannungsquellen durch Kurzschlüsse und Stromquellen durch Leerläufe
   - Bestimmung des Ohm'schen Widerstandes R an den Klemmen des Kondensators
   - Zeitkonstante $\tau = R \cdot C$
2. Bestimmung der Spannung U_0 im Schaltzeitpunkt (d.h. bevor Schalter bewegt wird)
3. Bestimmung des stationären Endwertes der Spannung U_∞ (Kondensator als Leerlauf)

Beispiele zur Berechnung von Lade- und Entladevorgängen

Beispiel 1: Ausschaltvorgang



$$U_\mathrm{q} = 1\,\mathrm{V}$$

$$R = 100\,\Omega$$

$$C = 1\,\mathrm{mF}$$

Annahme: Kondensator wurde durch ursprüngliche Schalterstellung vollständig aufgeladen.

Gesucht ist der zeitliche Verlauf von Kondensatorspannung $u(t)$ und -strom $i(t)$.

Beispiel 1: Ausschaltvorgang - Lösung

1. Zeitkonstante $\tau = RC = 0.1\mathrm{s}$

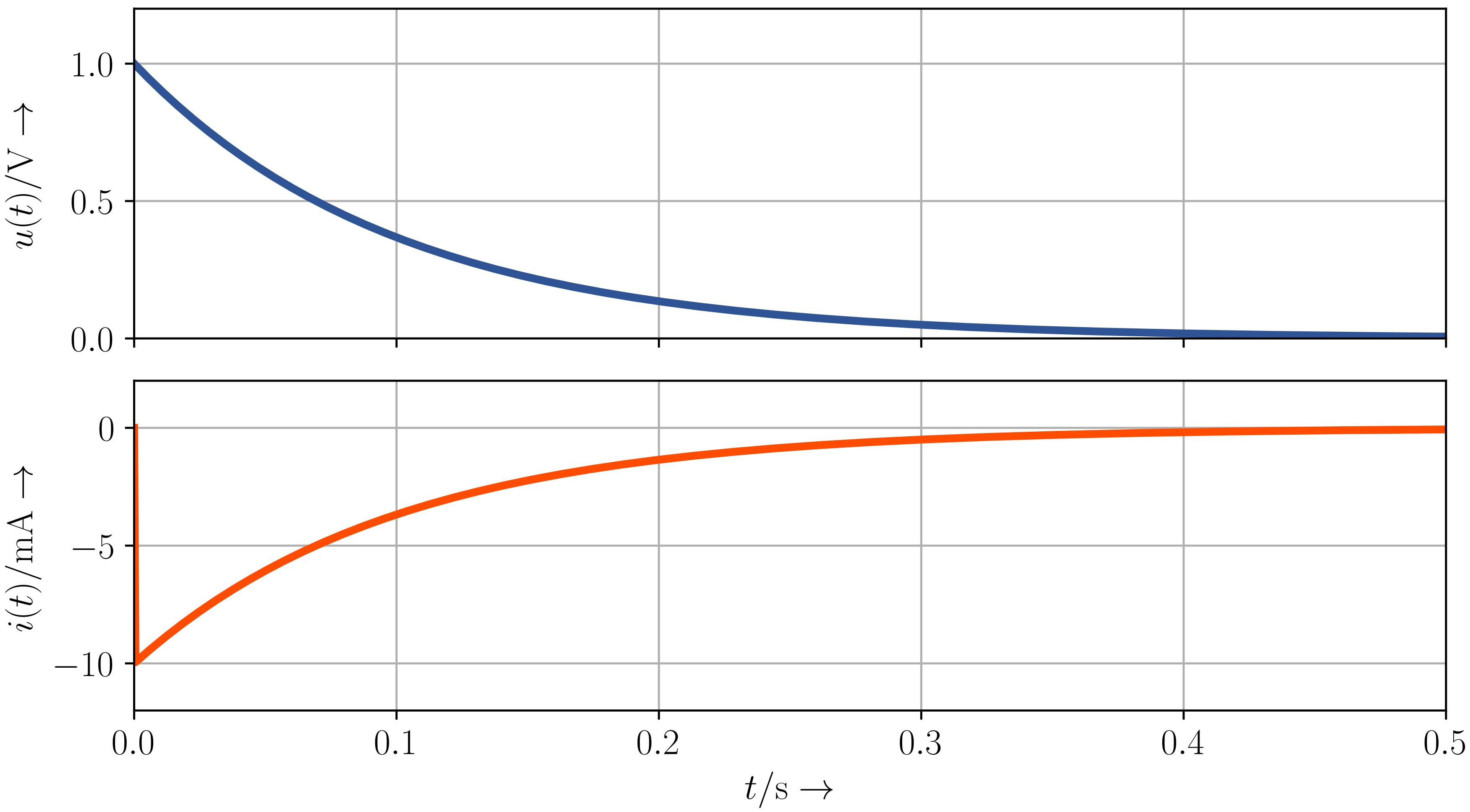
2. Kondensatorspannung im Schaltzeitpunkt: $U_0 = U_\mathrm{s} = 1\mathrm{V}$

3. Stationärer Endwert der Spannung: $U_\infty = 0$

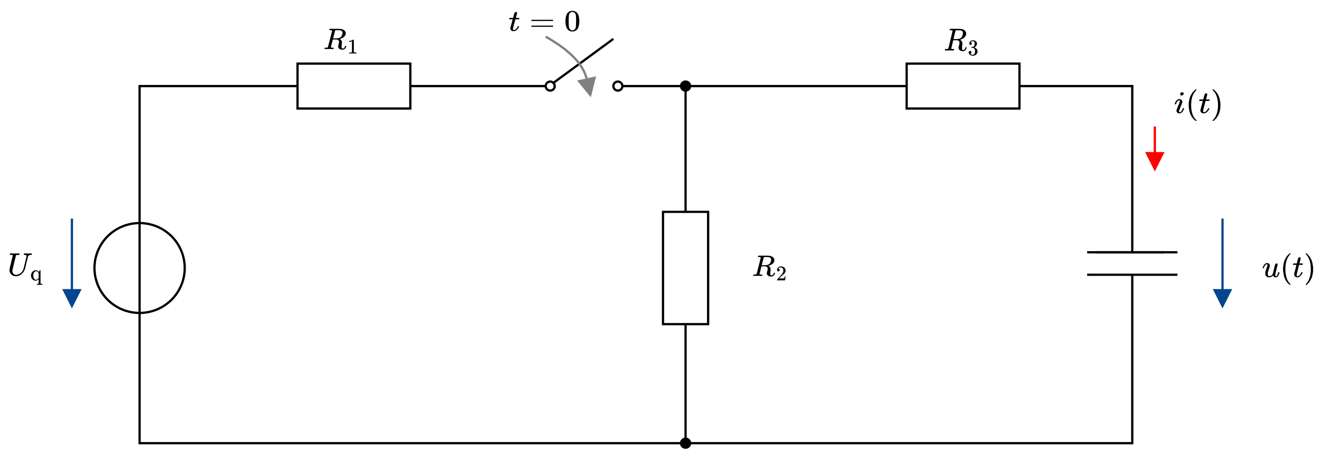
4. Spannungs- und Stromverlauf:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= U_\mathrm{s} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} &&= 1\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{0.1\mathrm{s}}} \\
i(t) &= \frac{-U_\mathrm{s}}{R} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} &&= -10\mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{0.1\mathrm{s}}}
\end{aligned}
$$

Spannungs- und Stromverlauf beim Ausschaltvorgang



Beispiel 2: Einschaltvorgang eines RC-Netzes



$U_\mathrm{q} = 1\,\mathrm{V}$ $\quad$ $R_3 = 100\,\Omega$

$R_1 = 200\,\Omega$ $\quad$ $C = 1\,\mathrm{mF}$

$R_2 = 1\,\mathrm{k}\Omega$

Bei Schießen des Schalter im Zeitpunkt $t = 0$ ist Kondensator vollständig entladen.

Gesucht ist der zeitliche Verlauf von Kondensatorspannung $u(t)$ und -strom $i(t)$.

Beispiel 2: Einschaltvorgang eines RC-Netzes - Lösung

1. Zeitkonstante $\tau = RC$

$$R = (R_1 || R_2) + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = 267\Omega$$

$$\tau = 0.27\mathrm{s}$$

2. Kondensatorspannung im Schaltzeitpunkt: $U_0 = 0$

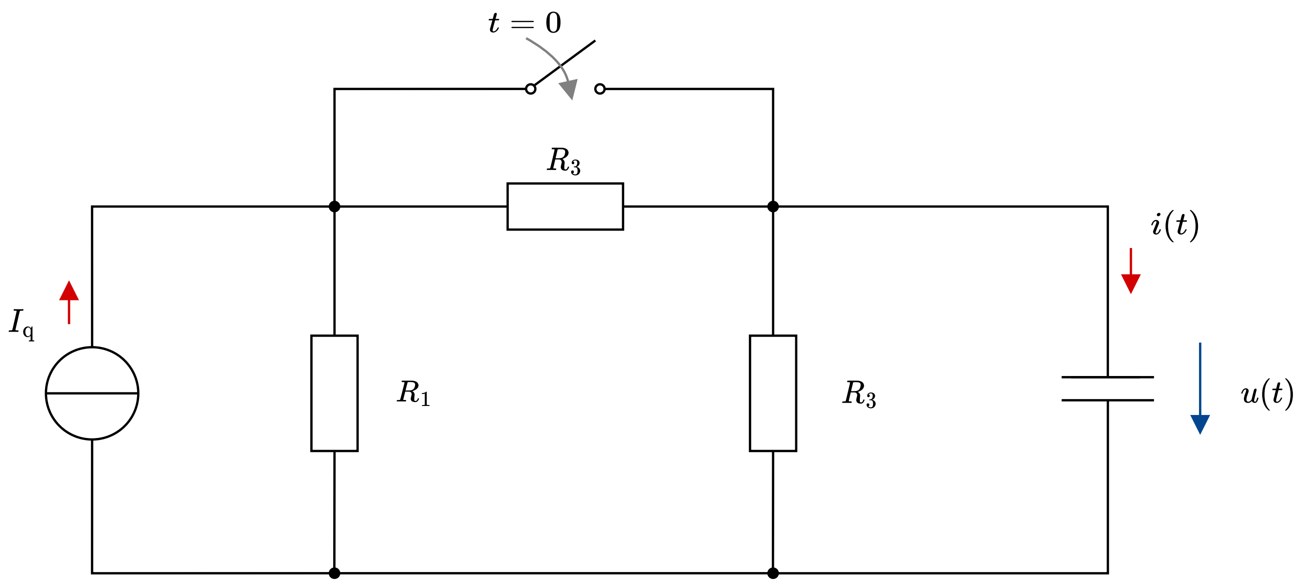
3. Stationärer Endwert der Spannung:

$$U_\infty = U_\mathrm{s} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.83\mathrm{V}$$

4. Spannungs- und Stromverlauf:

$$\begin{aligned} u(t) &= (0 - 0.83V) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{0.27\mathrm{s}}} + 0.83V = 0.83\mathrm{V}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{0.27\mathrm{s}}}) \\ i(t) &= \tfrac{0.83\mathrm{V} - 0}{267\Omega} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{0.27\mathrm{s}}} = 3.1\mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{0.27\mathrm{s}}} \end{aligned}$$

Beispiel 3: Abschalten eines Widerstandes



$I_q = 100\,\mathrm{mA}$ $\quad R_3 = 200\,\Omega$

$R_1 = 100\,\Omega$ $\quad C = 1\,\mathrm{mF}$

$R_2 = 1\,\mathrm{k}\Omega$

Schalter wird im Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen. Zuvor war Schalter sehr lange (d.h. unendlich lange) geöffnet.

Beispiel 3: Abschalten eines Widerstandes - Lösung

1. Zeitkonstante $\tau = RC$

$$R = R_1 || R_3 = 67\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{R_1 R_3 C}{R_1 + R_3} = 67\mathrm{ms}$$

2. Kondensatorspannung im Schaltzeitpunkt:

$$U_0 = I_\mathrm{s} \cdot \frac{R_1 || (R_2 + R_3)}{R_2 + R_3} \cdot R_3 = I_\mathrm{s} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 1.5\mathrm{V}$$

3. Stationärer Endwert der Spannung:

$$U_\infty = I_\mathrm{s} \cdot R_1 || R_3 = 6.7\mathrm{V}$$

4. Spannungs- und Stromverlauf:

$$\begin{aligned} u(t) &= (1.5\mathrm{V} - 6.7V) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{67\mathrm{ms}}} + 6.7\mathrm{V} = 1.5\mathrm{V} + 6.7V \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{67\mathrm{ms}}}) \\ i(t) &= \frac{(6.7\mathrm{V} - 1.5\mathrm{V})}{67\Omega} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{67\mathrm{ms}}} = 78\mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{67\mathrm{ms}}} \end{aligned}$$

Referenzen

[1] G. Hagmann, *Grundlagen der Elektrotechnik,* Aula Verlag.

[2] T. Rießinger, *Mathematik für Ingenieure,* Springer Verlag.

[3] R. Unbehauen, *Grundlagen der Elektrotechnik 1,* Springer Verlag.