

Anwendung der Fourier- Reihenentwicklung bei Komplexer Wechselstromrechnung

Grenzen der komplexen Wechselstromrechnung

Beschreibung eines Cosinus-förmigen Signals mit Kreisfrequenz ω_0 mittels komplexen Spitzenwertzeiger

$$x(t) = \hat{X} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \underline{X} = \hat{X} e^{j\varphi_0}$$

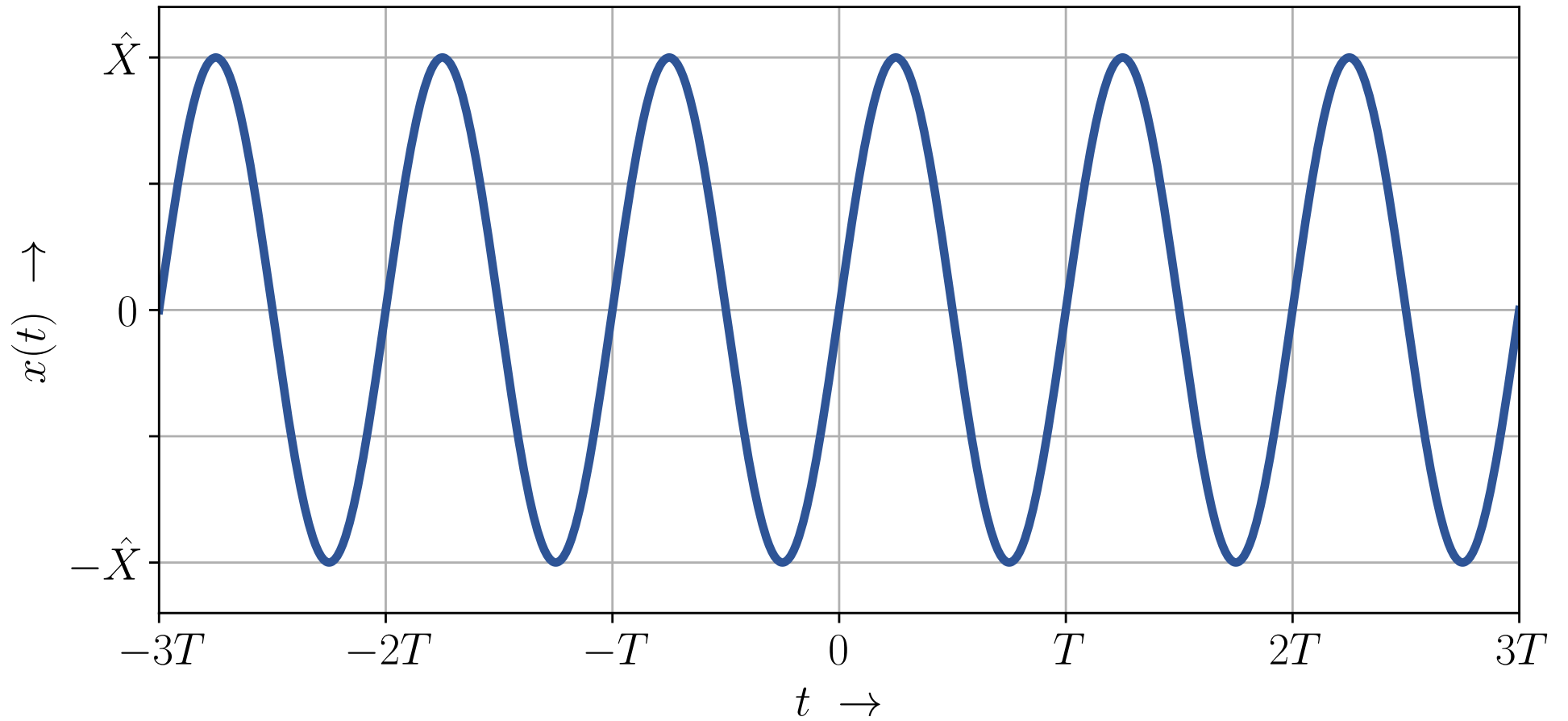
Rücktransformation in den Zeitbereich

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\underline{X} \cdot e^{j\omega t}\} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{X} \cdot e^{j\omega t} + \underline{X}^* \cdot e^{-j\omega t})$$

Anwendung in der *Komplexen Wechselstromrechnung* für Strom und Spannung

Wichtig: Anwendung nur möglich für Sinus-förmige Signale

Periodische Signale - Sinus



Weitere Periodische Signale

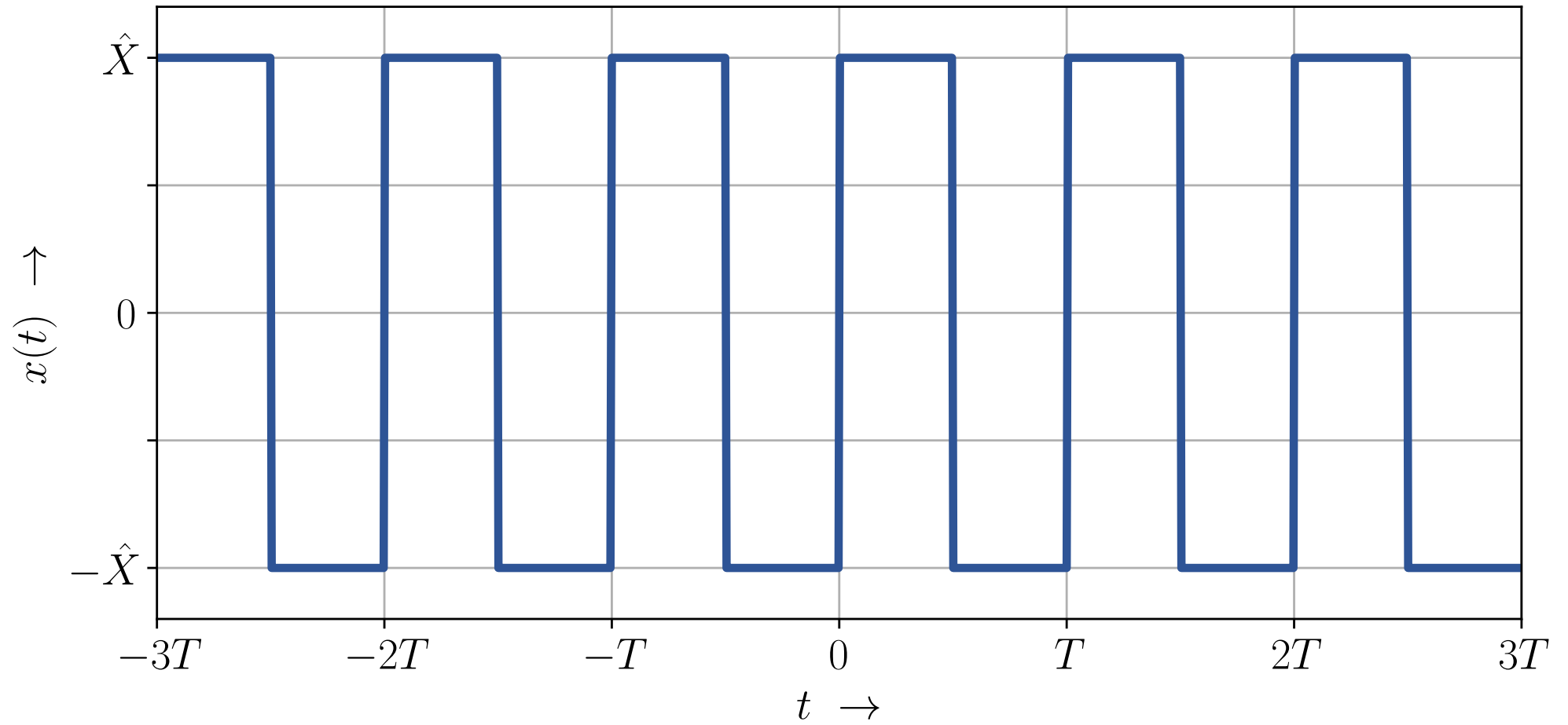
Erweiterung der Komplexen Wechselstromrechnung für weitere periodische Signale

- Rechtecksignal
- Dreiecksignal
- Sägezahnsignal

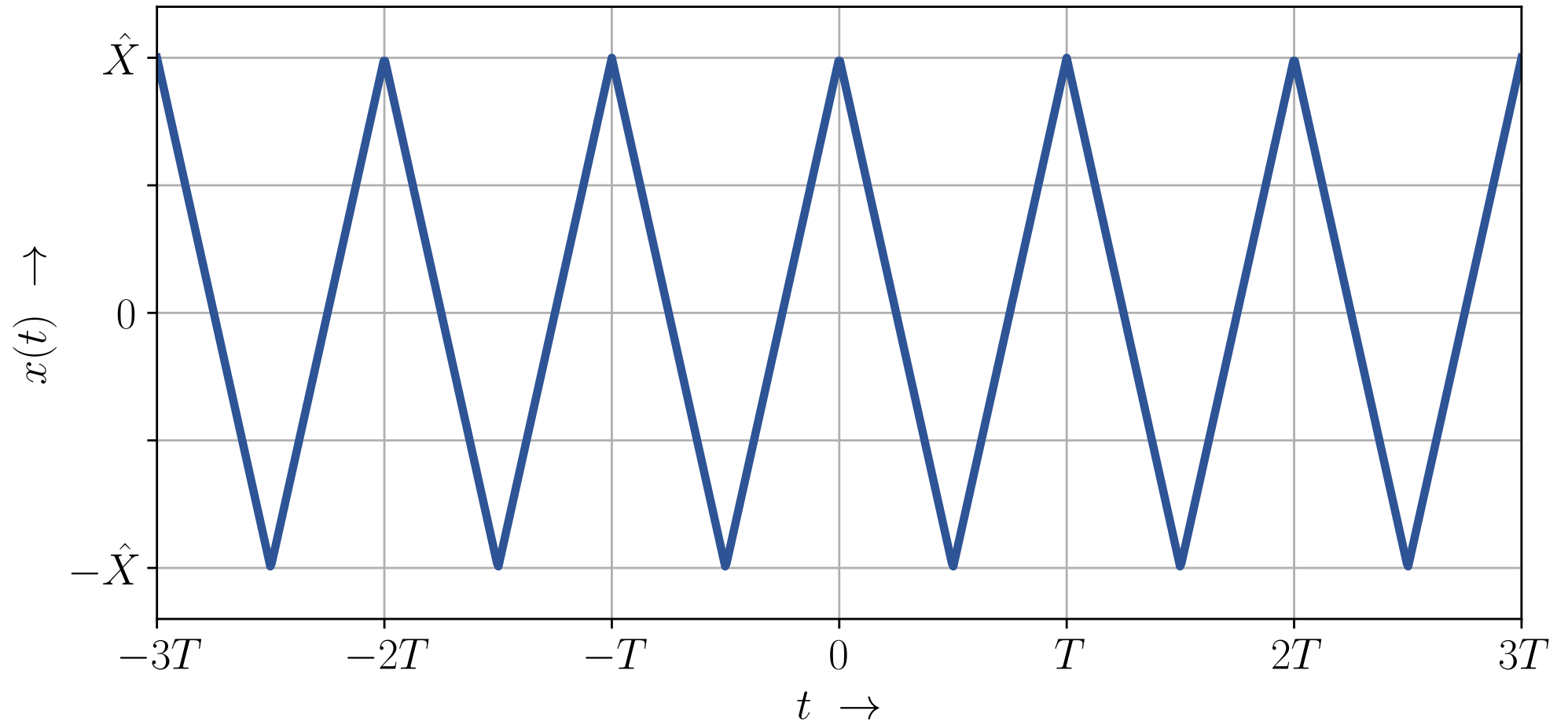
Signale werden charakterisiert durch

- Periodendauer T
- Fundamentalkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
- Fundamentalfrequenz $f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

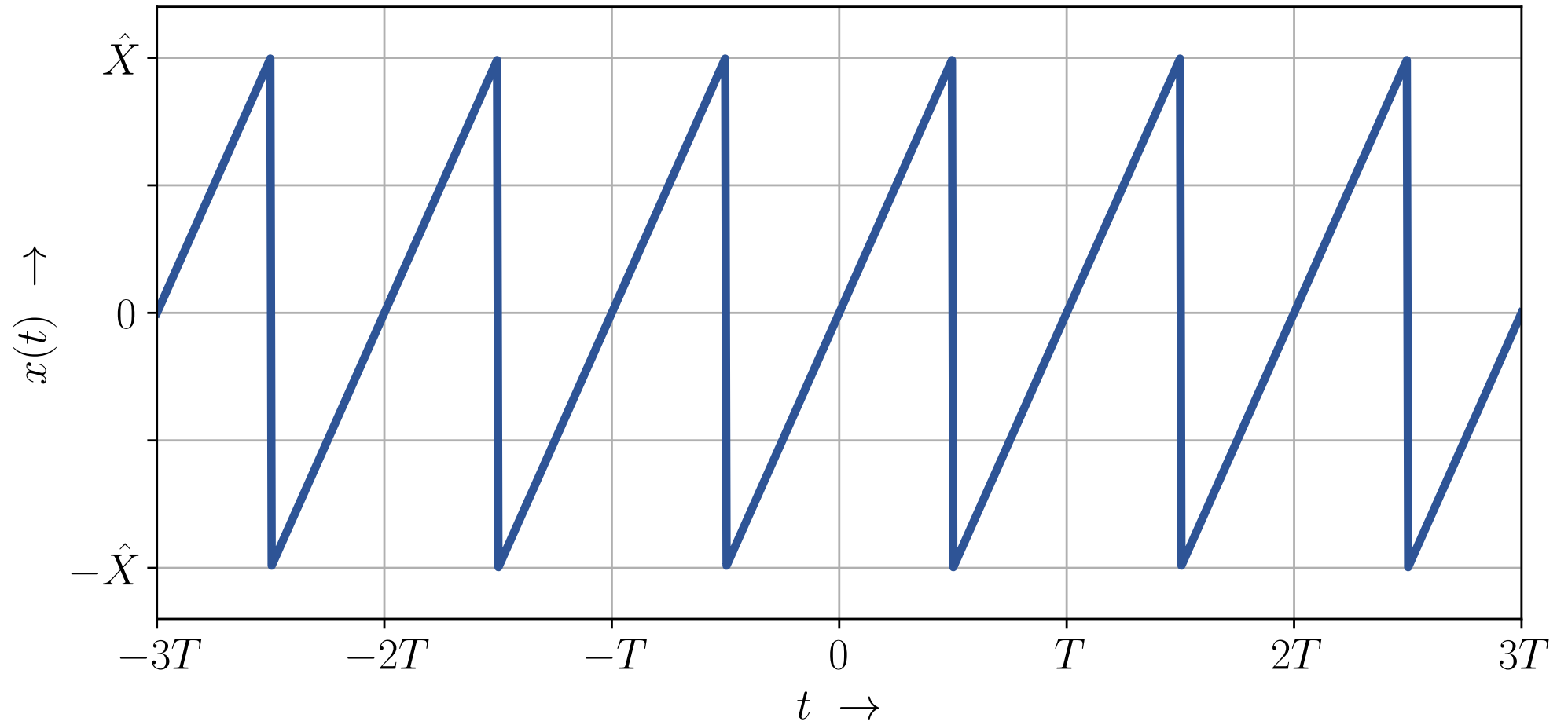
Periodische Signale - Rechteck



Periodische Signale - Dreieck



Periodische Signale - Sägezahn



Fourier-Reihenentwicklung

Jedes Periodische Signal lässt sich als unendliche Reihe von Sinus- und Cosinus-Funktion beschreiben

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \quad \text{mit Periodendauer} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Die Koeffizienten der einzelnen Summanden lassen sich ermitteln durch

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\text{Perioden-}}^{\text{dauer}} x(t) \cdot \cos(n\omega_0 \cdot t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 \cdot t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos(n\omega_0 \cdot t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\text{Perioden-}}^{\text{dauer}} x(t) \cdot \sin(n\omega_0 \cdot t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \sin(n\omega_0 \cdot t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sin(n\omega_0 \cdot t) dt$$

Fourier-Reihe in Amplituden- und Phasendarstellung

Umrechnen der Fourier-Reihe in eine Amplituden- und Phasendarstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) = \frac{\hat{X}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{X}_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

mit

$$\hat{X}_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{und} \quad \varphi_n = -\arctan_{(2)}(b_n, a_n) = \begin{cases} -\arctan(b_n/a_n) & \text{für } a_n > 0 \\ -\arctan(b_n/a_n) + \pi & \text{für } a_n < 0 \wedge b_n < 0 \\ -\arctan(b_n/a_n) - \pi & \text{für } a_n < 0 \wedge b_n \geq 0 \\ -\pi/2 & \text{für } a_n = 0 \end{cases}$$

Berechnung der Fourierkoeffizienten a_n und b_n aus Amplitude \hat{X}_n und Phase φ_n

$$a_n = \hat{X}_n \cos(\varphi_n)$$

$$b_n = -\hat{X}_n \sin(\varphi_n)$$

Fourier-Reihe mit komplexen Koeffizienten

Anwendung der Euler'schen Formel auf die Amplituden- und Phasendarstellung

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{\hat{X}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{X}_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = \frac{\hat{X}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{X}_n}{2} \left(e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \varphi_n)} \right) = \\ &= \frac{\hat{X}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\hat{X}_n}{2} \cdot e^{j\varphi_n} \cdot e^{jn\omega_0 t} + \frac{\hat{X}_n}{2} \cdot e^{-j\varphi_n} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega_0 t}\end{aligned}$$

mit

$$\underline{c}_n = \begin{cases} \frac{\hat{X}_n}{2} \cdot e^{j\varphi_n} & \text{für } n \geq 0 \\ \frac{\hat{X}_{-n}}{2} \cdot e^{-j\varphi_{-n}} & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

Berechnung von Amplitude \hat{X}_n und Phase φ_n aus dem komplexen Koeffizienten \underline{X}_n

$$\hat{X}_n = 2 \cdot |\underline{c}_n|$$

$$\varphi_n = \arg \{ \underline{c}_n \}$$

Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Fourier-Koeffizienten

Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten

$$\underline{c}_n = \begin{cases} \frac{\hat{X}_n}{2} \cdot e^{j\varphi_n} & \text{für } n \geq 0 \\ \frac{\hat{X}_{-n}}{2} \cdot e^{-j\varphi_{-n}} & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die Symmetrieeigenschaften

$$\hat{X}_{-n} = \hat{X}_n \quad \text{und} \quad \varphi_{-n} = -\varphi_n$$

Damit folgt für die komplexen Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} \underline{c}_n &= \begin{cases} \frac{\hat{X}_n}{2} \cdot e^{j\varphi_n} & \text{für } n \geq 0 \\ \frac{\hat{X}_{-n}}{2} \cdot e^{-j\varphi_{-n}} & \text{für } n < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\hat{X}_n}{2} \cos(\varphi_n) + j \cdot \frac{\hat{X}_n}{2} \sin(\varphi_n) & \text{für } n \geq 0 \\ \frac{\hat{X}_{-n}}{2} \cos(\varphi_{-n}) + j \cdot \frac{\hat{X}_{-n}}{2} \sin(\varphi_{-n}) & \text{für } n < 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (a_n - jb_n) & \text{für } n \geq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (a_n + jb_n) & \text{für } n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten aus der Zeitfunktion

Zusammenhang zwischen komplexen und reellen Fourier-Koeffizienten

$$\underline{c}_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (a_n - j b_n) & \text{für } n \geq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (a_n + j b_n) & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

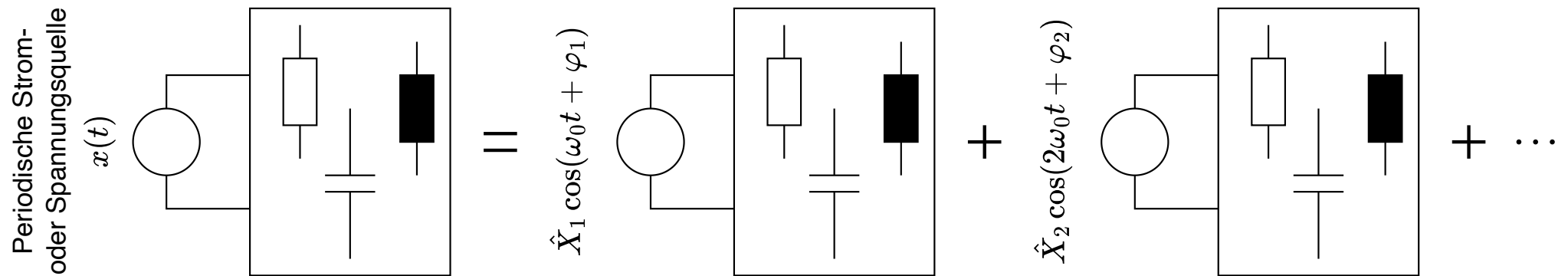
Aus dieser Definition folgt die Symmetrie der reellen Fourier-Koeffizienten $a_{-n} = a_n$ und $b_{-n} = b_n$

Somit lassen sich die komplexen Fourier-Koeffizienten direkt berechnen

$$\begin{aligned} \underline{c}_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{T} \int_{\text{Perioden-}}^{\text{dauer}} x(t) \cdot \cos(n\omega_0 \cdot t) dt - j \cdot \frac{2}{T} \int_{\text{Perioden-}}^{\text{dauer}} x(t) \cdot \sin(n\omega_0 \cdot t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \int_{\text{Perioden-}}^{\text{dauer}} x(t) \cdot (\cos(n\omega_0 \cdot t) - j \cdot \sin(n\omega_0 \cdot t)) dt = \frac{1}{T} \int_{\text{Perioden-}}^{\text{dauer}} x(t) \cdot e^{jn\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

Anwendung der Fourier-Reihenentwicklung bei komplexer Wechselstromrechnung

Idee: Anwendung des Überlagerungsverfahrens



Analyse der Teilnetzwerke mit komplexer Wechselstromrechnung und Überlagerung der jeweiligen Ergebnisse

Berechnung des komplexen Spitzenwertzeigers der n -ten Frequenz aus Fourier-Koeffizienten

$$\underline{X}_n = a_n - jb_n = \hat{X} \cdot e^{j\varphi_n} = 2 \cdot \underline{c}_n$$

Entsprechend ergibt sich für Effektivwertzeiger

$$\underline{X}_{\text{eff},n} = \frac{a_n - jb_n}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_n} = \sqrt{2} \cdot \underline{c}_n$$

Zusammenfassung - Umrechnen der Koeffizienten

	Reele Form	Amplituden-Phasen-Form	Komplexe Form	Spitzenwertzeiger
a_n	a_n	$\hat{X}_n \cos(\varphi_n)$	$2 \cdot \operatorname{Re}\{\underline{c}_n\}$	$\operatorname{Re}\{\underline{X}_n\}$
b_n	b_n	$-\hat{X}_n \sin(\varphi_n)$	$-2 \cdot \operatorname{Im}\{\underline{c}_n\}$	$-\operatorname{Im}\{\underline{X}_n\}$
\hat{X}_n	$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$	\hat{X}_n	$2 \cdot \underline{c}_n $	$ \underline{X}_n $
φ_n	$\arctan_{(2)}(b_n, a_n)$	φ_n	$\arg\{\underline{c}_n\}$	$\arg\{\underline{X}_n\}$
\underline{c}_n	$\frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad n \geq 0$ $\frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n}) \quad n < 0$	$\frac{\hat{X}_n}{2} \cdot e^{j\varphi_n} \quad n \geq 0$ $\frac{\hat{X}_{-n}}{2} \cdot e^{-j\varphi_{-n}} \quad n < 0$	\underline{c}_n	$\frac{1}{2} \cdot \underline{X}_n$
\underline{X}_n	$a_n - jb_n$	$\hat{X}_n \cdot e^{j\varphi_n}$	$2 \cdot \underline{X}_n$	\underline{X}_n

Zusammenfassung - Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Reele Fourier-Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\text{Perioden-}}^{\text{dauer}} x(t) \cdot \cos(n\omega_0 \cdot t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\text{Perioden-}}^{\text{dauer}} x(t) \cdot \sin(n\omega_0 \cdot t) dt$$

Komplexe Fourier-Koeffizienten

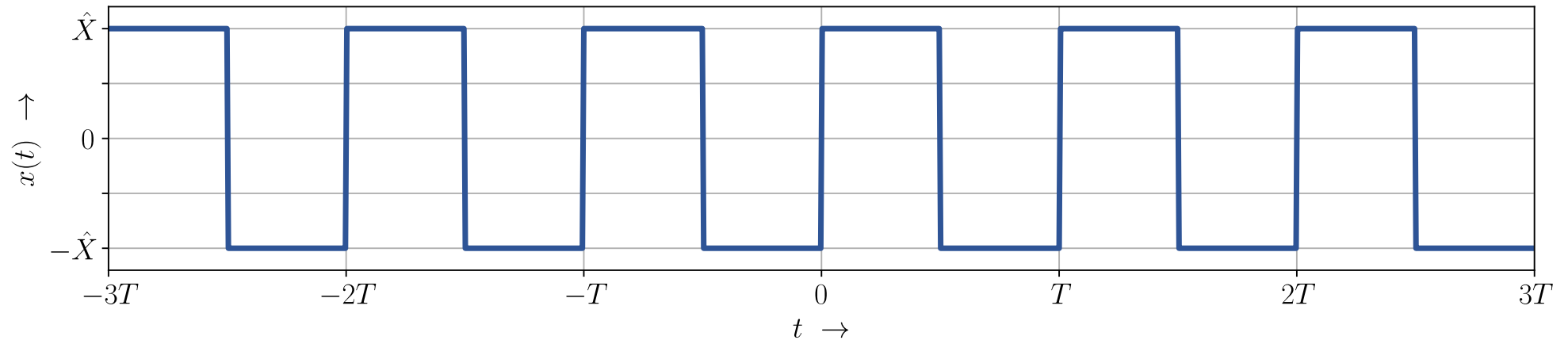
$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{\text{Perioden-}}^{\text{dauer}} x(t) \cdot e^{jn\omega_0 t} dt$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten verschiedener Signalformen

Analyse der Standard-Signale

- Rechtecksignal
- Dreiecksignal
- Sägezahnsignal

Beispiel: Rechtecksignal

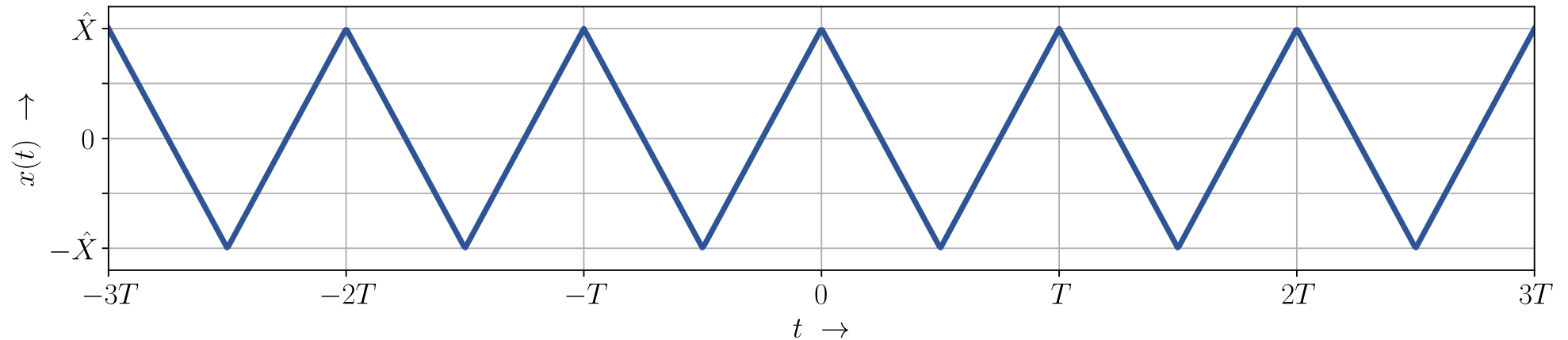


$$a_n = 0 \quad \text{für } n = 0, \dots, \infty \quad \text{und} \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4 \cdot \hat{X}}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{für } n = 1, \dots, \infty$$

$$\hat{X}_0 = 0 \quad \text{und} \quad \hat{X}_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4 \cdot \hat{X}}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi_n = -\frac{\pi}{2} \quad \text{für } n = 1, \dots, \infty$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -j \cdot \frac{2 \cdot \hat{X}}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{für } n = -\infty, \dots, \infty$$

Beispiel: Dreieck-Signal

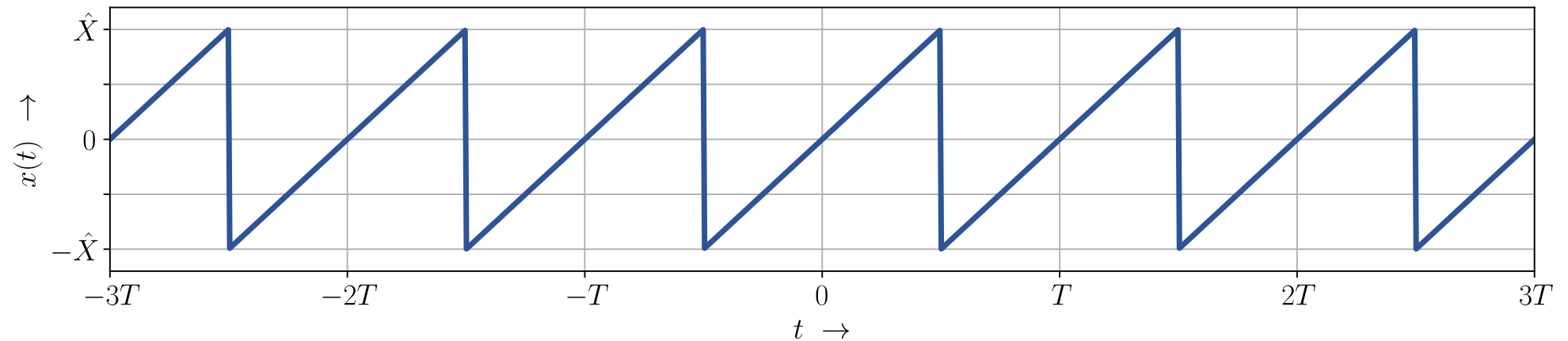


$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{8\hat{X}}{n^2\pi^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{für } n = 0, \dots, \infty \quad \text{und} \quad b_n = 0 \quad \text{für } n = 1, \dots, \infty$$

$$\hat{X}_0 = 0 \quad \text{und} \quad \hat{X}_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{8\hat{X}}{n^2\pi^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi_n = 0 \quad \text{für } n = 1, \dots, \infty$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4\hat{X}}{n^2\pi^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{für } n = -\infty, \dots, \infty$$

Beispiel: Sägezahn-Signal



$$a_n = 0 \quad \text{für } n = 0, \dots, \infty \quad \text{und} \quad b_n = (-1)^{(n+1)} \cdot \frac{2 \cdot \hat{X}}{n\pi} \quad \text{für } n = 1, \dots, \infty$$

$$\hat{X}_0 = 0 \quad \text{und} \quad \hat{X}_n = \frac{2 \cdot \hat{X}}{n\pi} \quad \text{und} \quad \varphi_n = \frac{\pi}{2} \cdot (2n + 1) \quad \text{für } n = 1, \dots, \infty$$

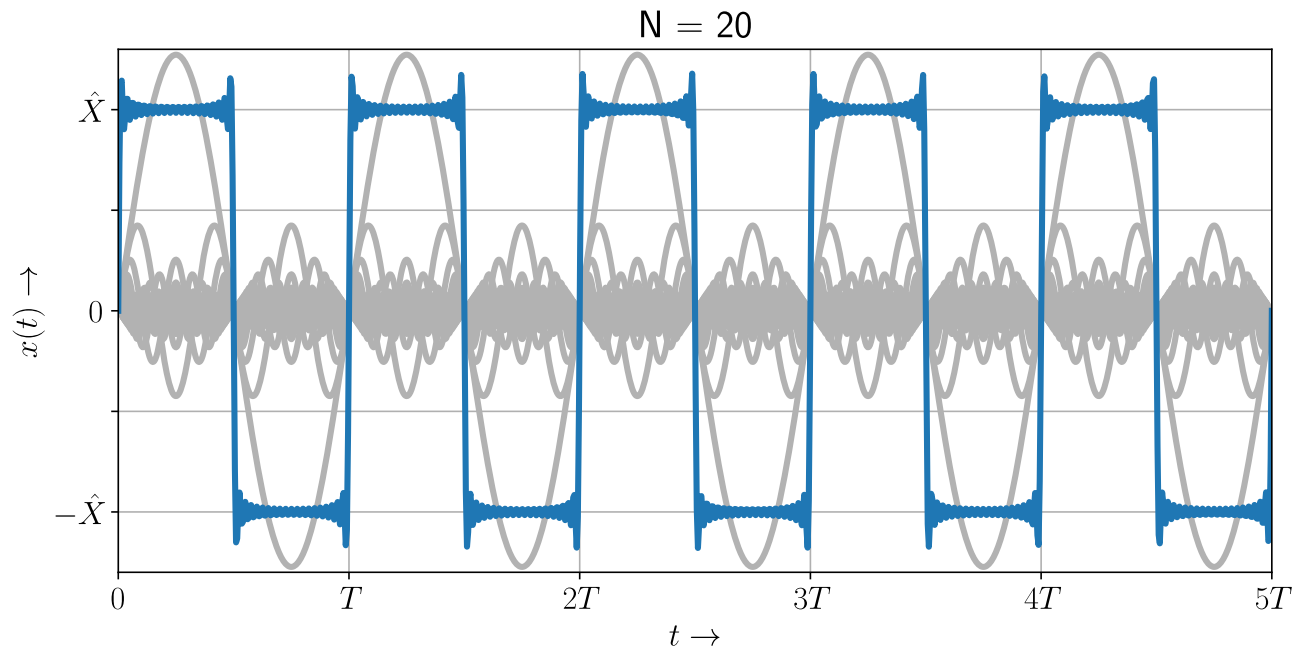
$$\underline{c}_0 = 0 \quad \text{und} \quad \underline{c}_n = j \cdot (-1)^n \cdot \frac{\hat{X}}{n\pi} \quad \text{für } n = -\infty, \dots, \infty \wedge n \neq 0$$

Endliche Fourier-Reihe am Beispiel des Rechtecksignals

In der Praxis lässt sich lediglich die endliche Fourier-Reihe ermitteln aus insgesamt N Summanden

$$x(t) = \frac{4 \cdot \hat{X}}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^N \frac{\sin(n\omega t)}{n}$$

Die endliche Fourier-Reihe beschreibt eine Näherung des periodischen Signals

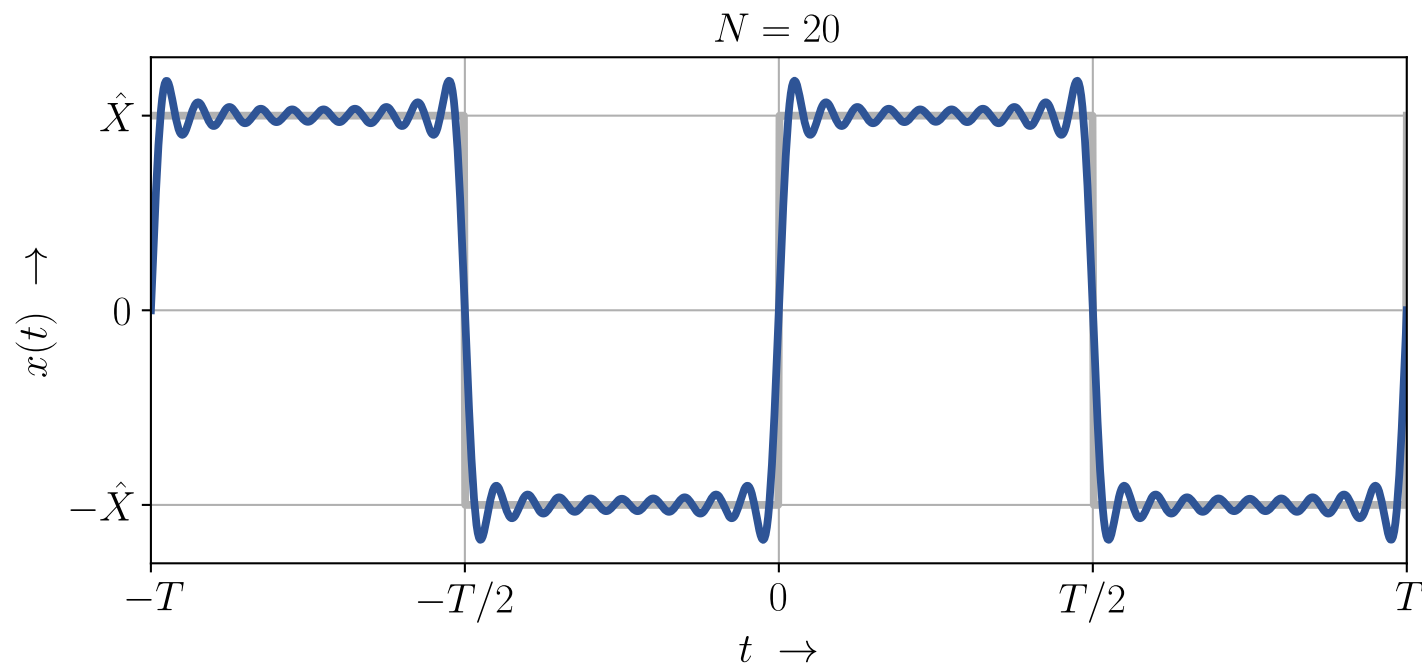


Gibb'sche Phänomen

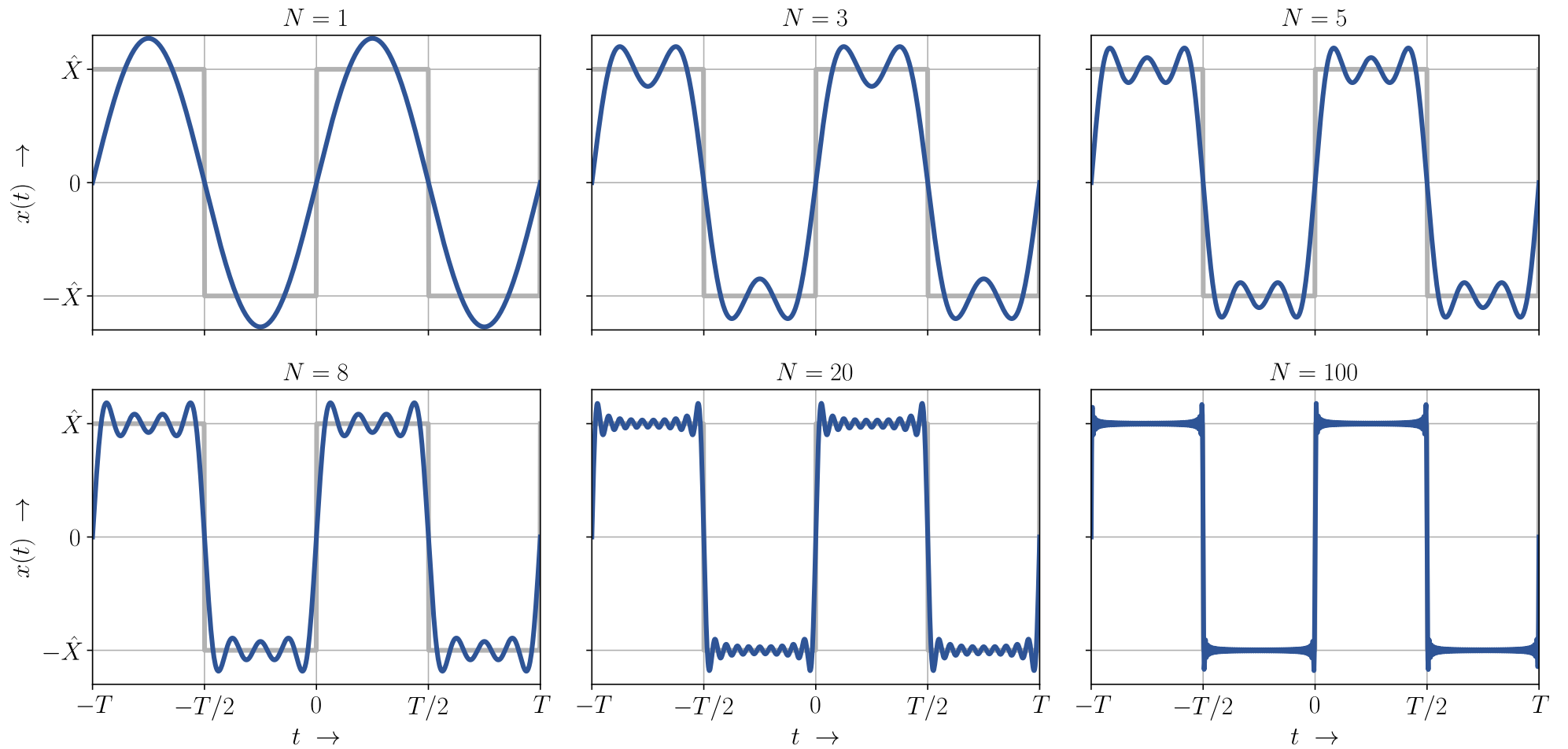
Überschwinger bei nicht-stetigem Signalverlauf

Amplitude der Überschwinger ca. 10% der Signalamplitude

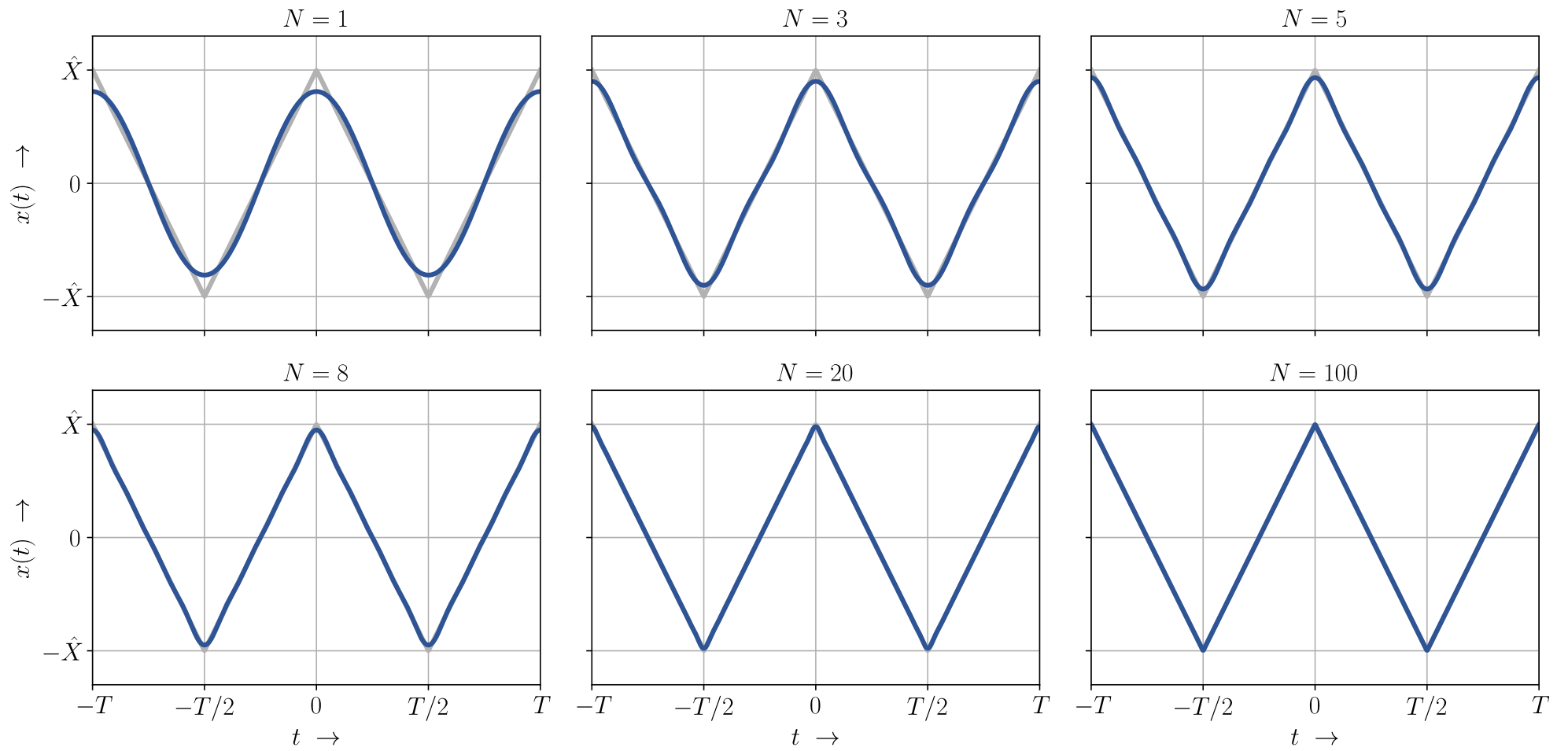
Überschwinger bleiben bei endlicher Fourier-Reihe (d.h. $N < \infty$) immer bestehen



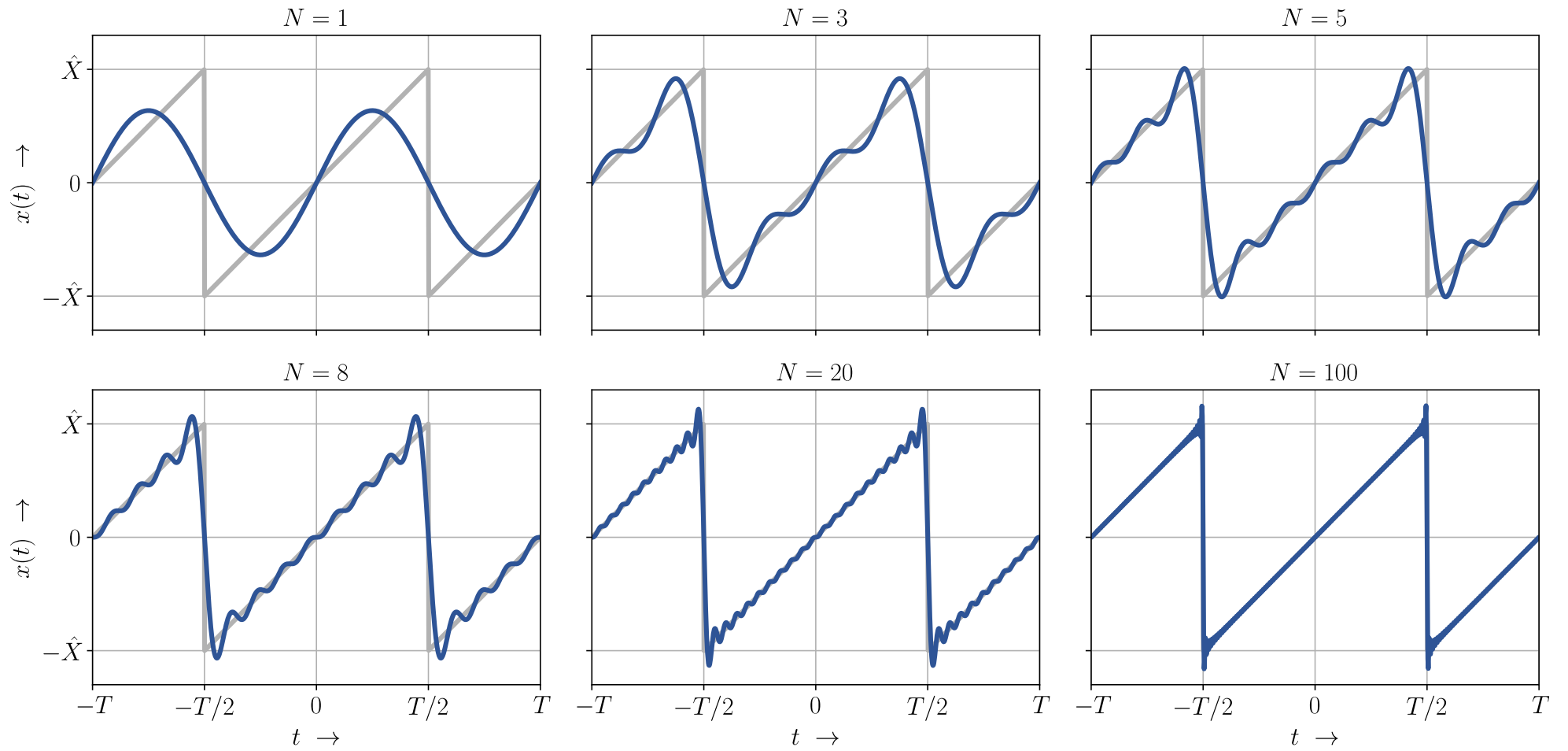
Gibb'sche Phänomen beim Rechtecksignal



Kein Gibb'sches Phänomen beim stetigen Dreiecksignal



Gibb'sche Phänomen beim Sägezahnsignal



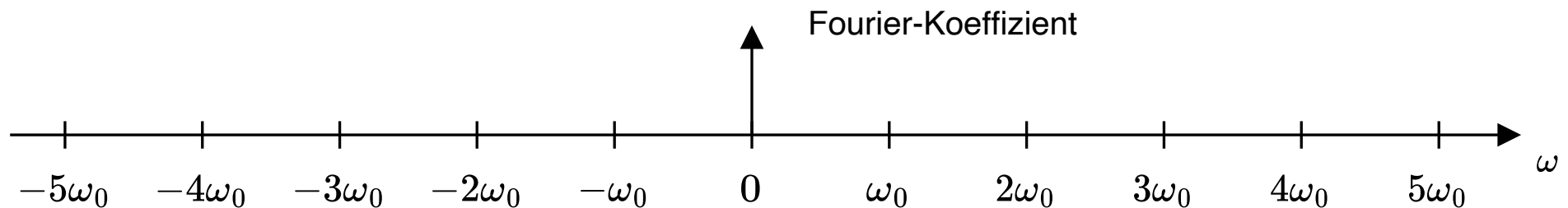
Frequenzbereich

Darstellung der Fourier-Koeffizienten über einer Frequenzachse

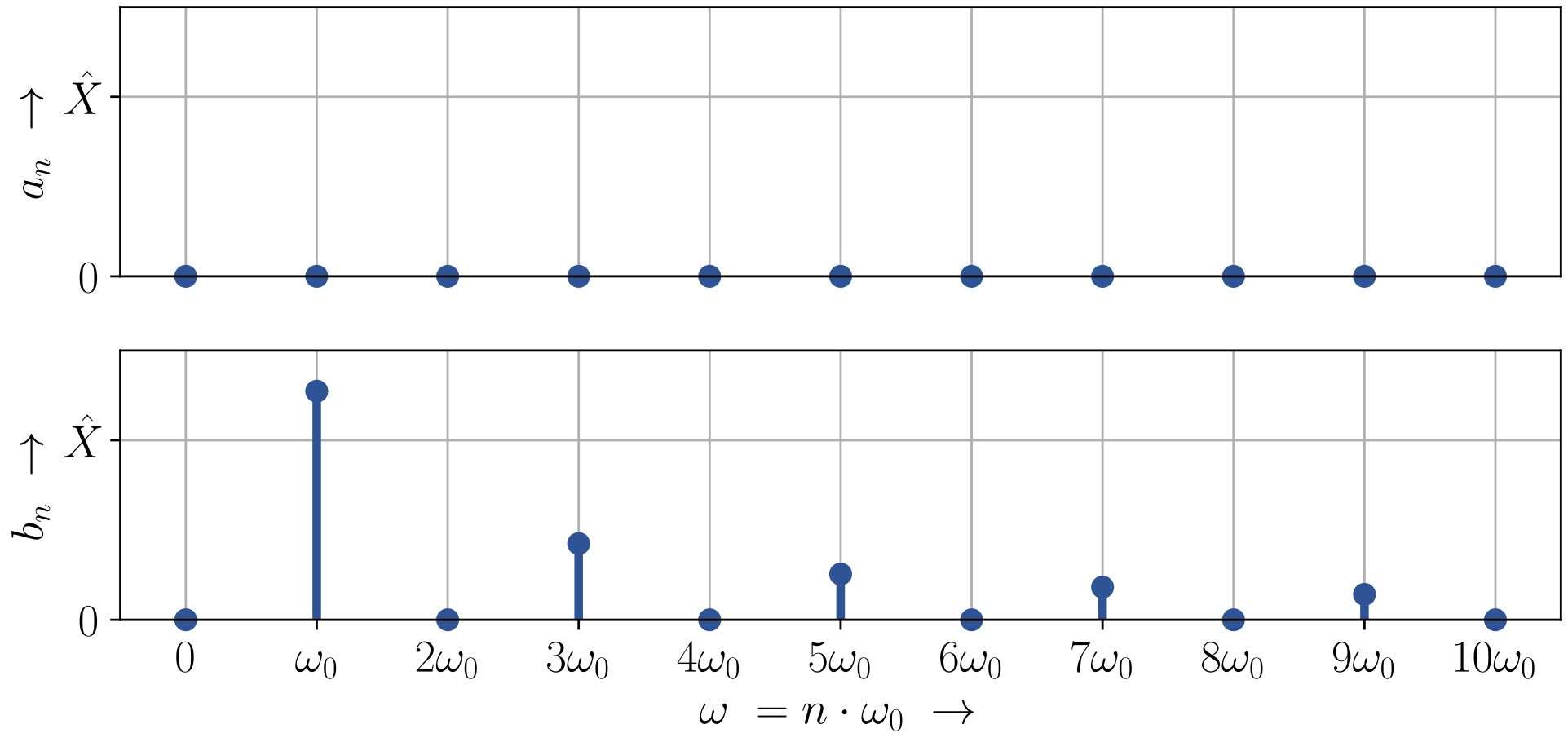
Darstellung der Fourier-Koeffizienten als Linienspektrum über einer Frequenz-Achse ω an Positionen $n \cdot \omega_0$

Linienspektrum der drei Varianten an Fourier-Koeffizienten besteht immer jeweils aus zwei Größen

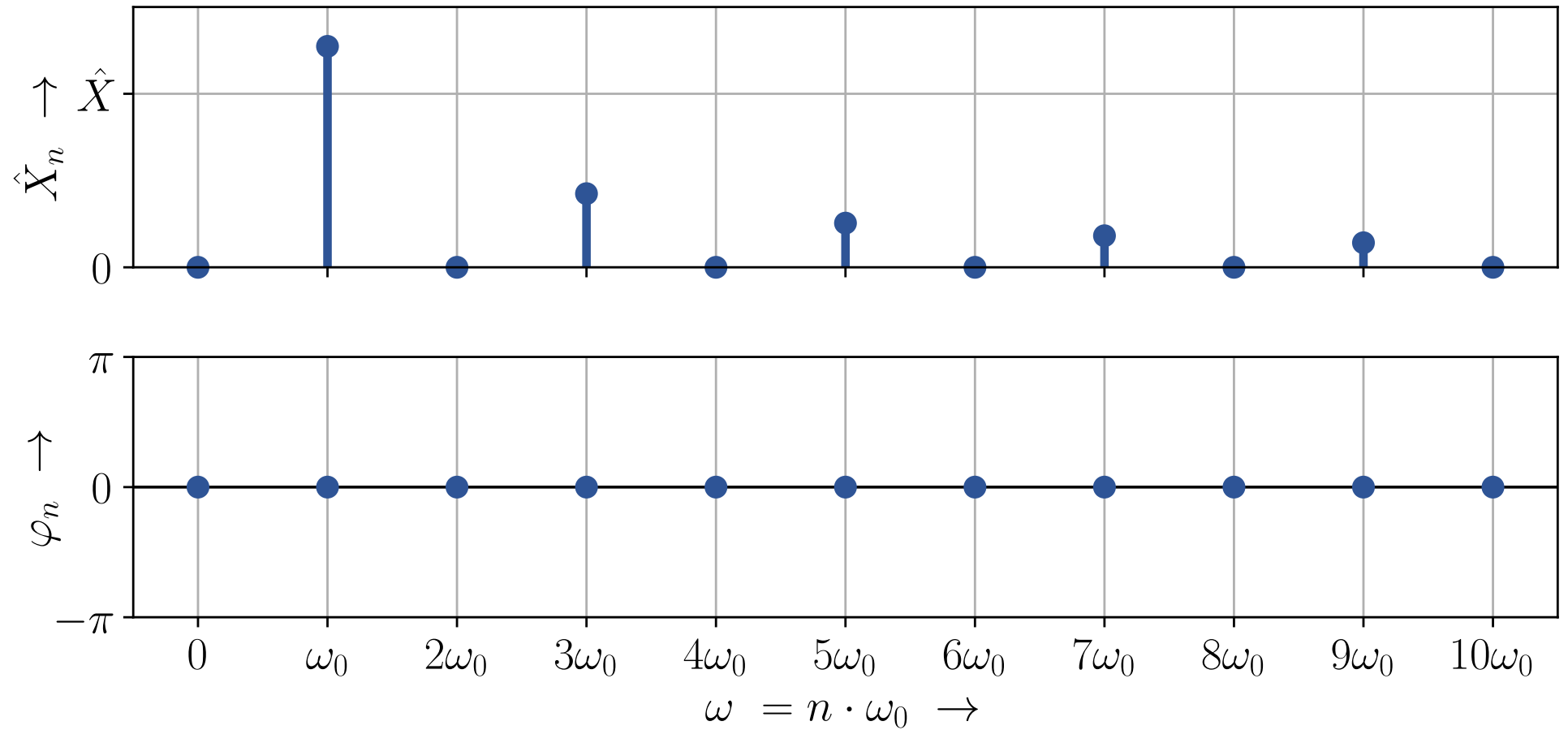
- cos- und sin-Koeffizienten a_n und b_n
- Amplituden- und Phasen-Koeffizienten \hat{X}_n und φ_n
- Real- und Imaginärteil bzw. Betrag und Phase der komplexen Koeffizienten \underline{c}_n



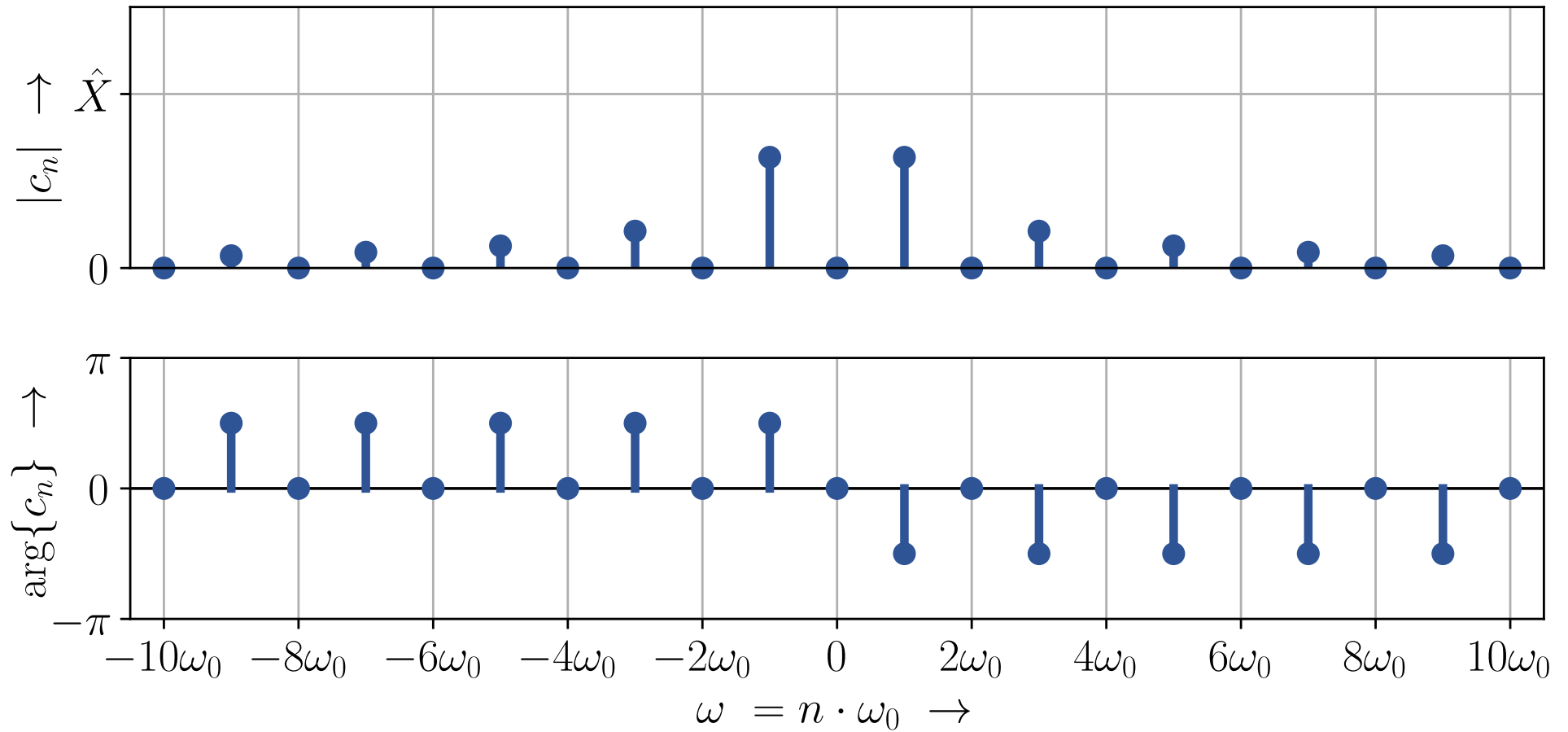
Beispiel: Rechteck im Frequenzbereich mit cos- und sin-Koeffizienten



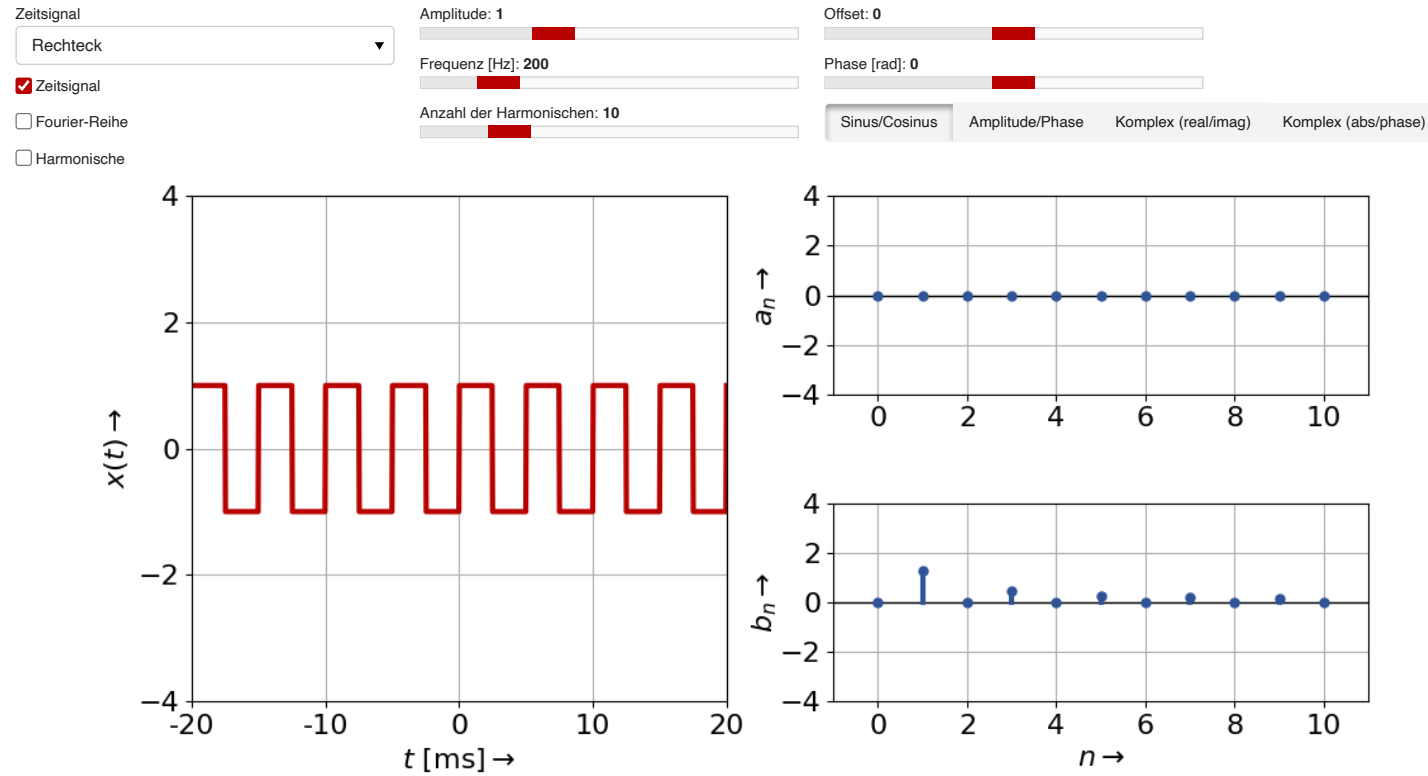
Beispiel: Rechteck im Frequenzbereich mit Amplituden- und Phasen-Koeffizienten



Beispiel: Rechteck mit komplexen Koeffizienten in Betrag und Phase

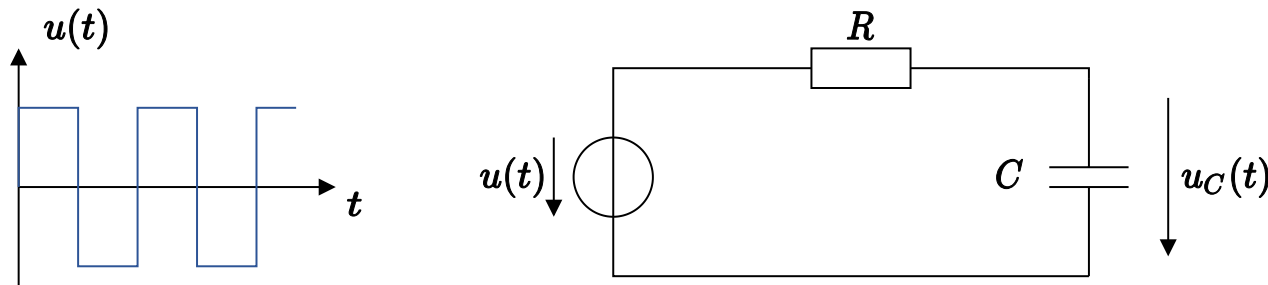


Analyse verschiedener periodischer Signale im Frequenzbereich



Anwendungsbeispiel: Tiefpassfilterung

Gegeben: Rechteck-förmige Spannungsquelle mit Frequenz ω_0 an einer Tiefpass Schaltung



Gesucht: Kondensatorspannung $u_C(t)$

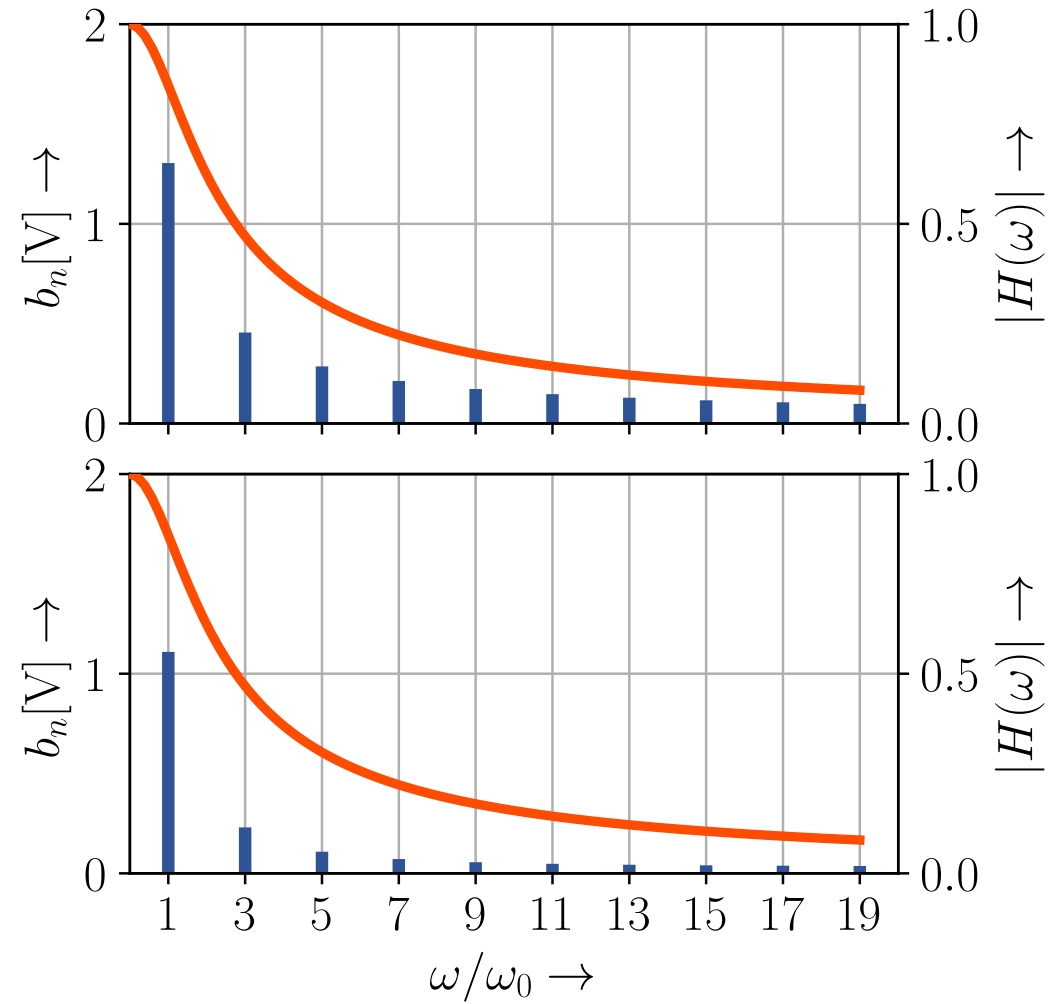
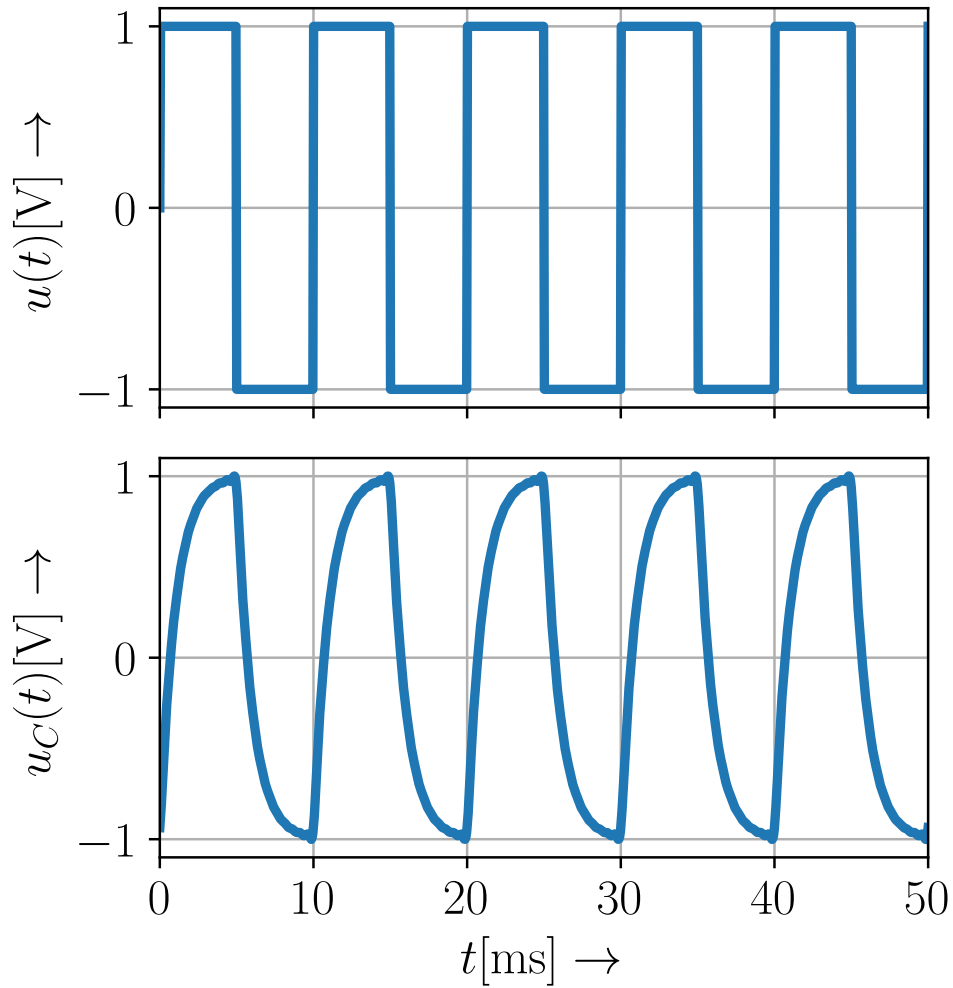
Vorgehen:

Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung für alle Sinus-förmigen Bestandteile von $u(t)$

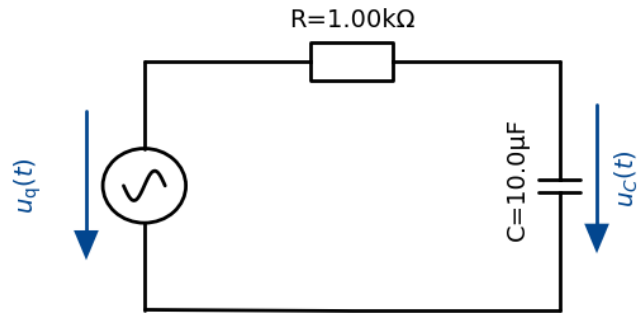
Berechnung des Zeigers der Kondensatorspannung für die jeweiligen Frequenzen

$$\underline{U}_C = \underline{U} \cdot \underline{H}(\omega) \quad \text{mit} \quad \underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR} \quad \omega = \omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \dots$$

Tiefpass-Filterung einer rechteckförmigen Spannungsquelle



Demo: Tiefpassfilterung verschiedener periodischer Signale



Zeitsignal
Cosinus

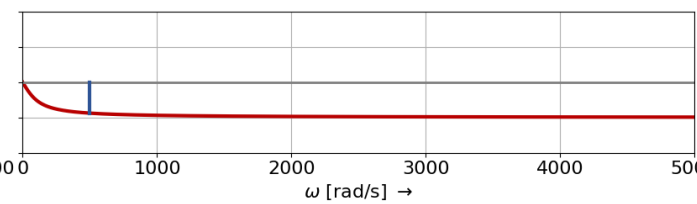
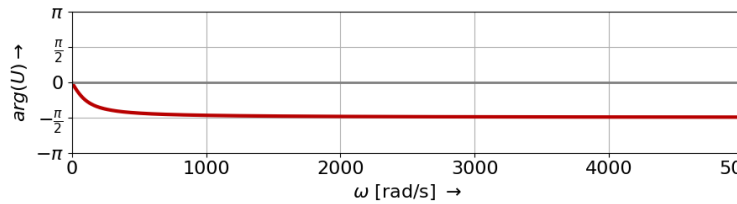
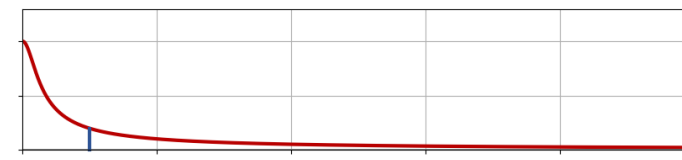
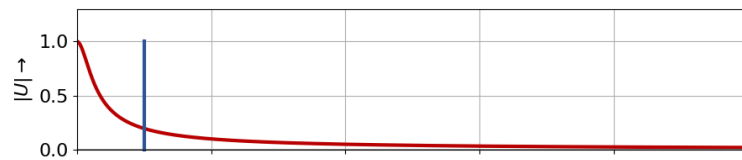
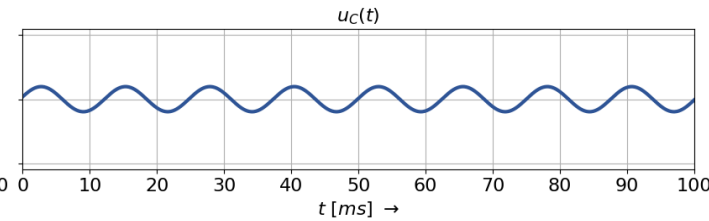
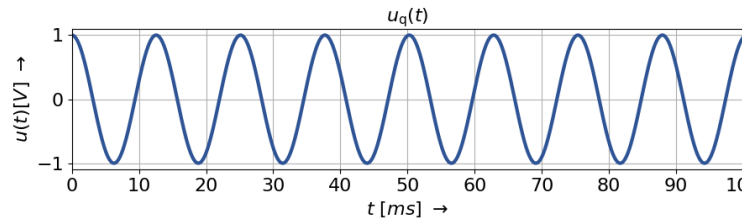
Fundamentale Kreisfrequenz [rad/s]: 500

Phasen-Offset [rad]: 0

Widerstand
1kΩ

Kondensator
10μF

- Lineare Frequenzachse
- Logarithmische Frequenzachse
- Linearer Betragsfrequenzgang
- Logarithmischer Betragsfrequenzgang



Referenzen

- [1] R. Kories, H. Schmidt-Walter, *Taschenbuch der Elektrotechnik*, Verlag Harri Deutsch.
- [2] T. Rießinger, *Mathematik für Ingenieure*, Springer Verlag.