# Tutorial: Leistungsdichtespektrum

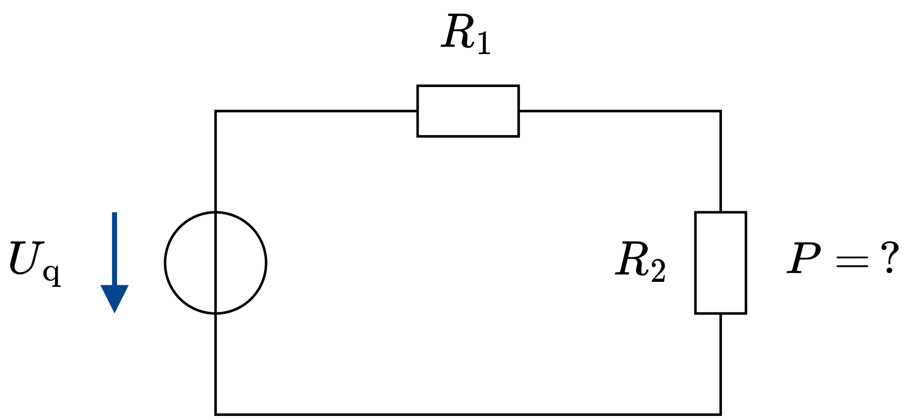
# DC Leistungsaufnahme eines Widerstandes

Welche Leistung nimmt der Widerstand $R$ auf?

$$U_\mathrm{q} = 100\,\mathrm{V}$$

$$R_1 = 20\,\Omega$$

$$R_2 = 30\,\Omega$$



# AC Leistungsaufnahme eines Widerstandes

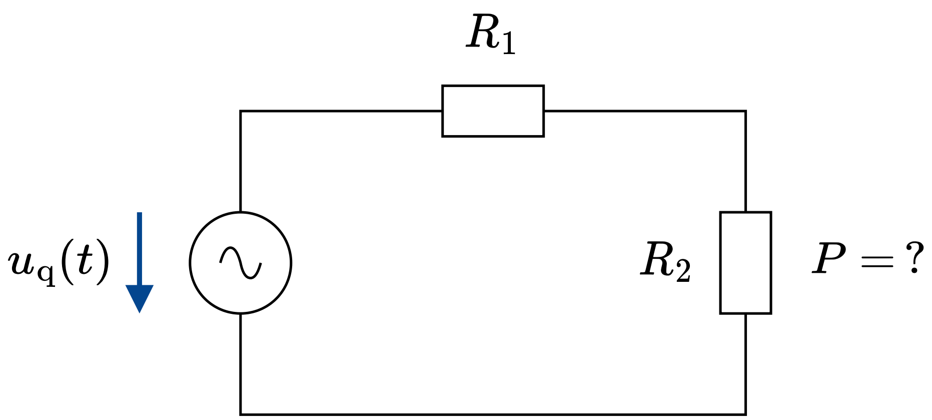
Welche Leistung nimmt der Widerstand $R$ auf?

$$u_\mathrm{q}(t) = 100\,\mathrm{V} \cdot \cos(2\pi f t)$$

$$f = 500\,\mathrm{Hz}$$

$$R_1 = 20\,\Omega$$

$$R_2 = 30\,\Omega$$



# AC Leistungsaufnahme eines Widerstandes mit Kondensator I

Welche Leistung nimmt der Widerstand $R$ auf?

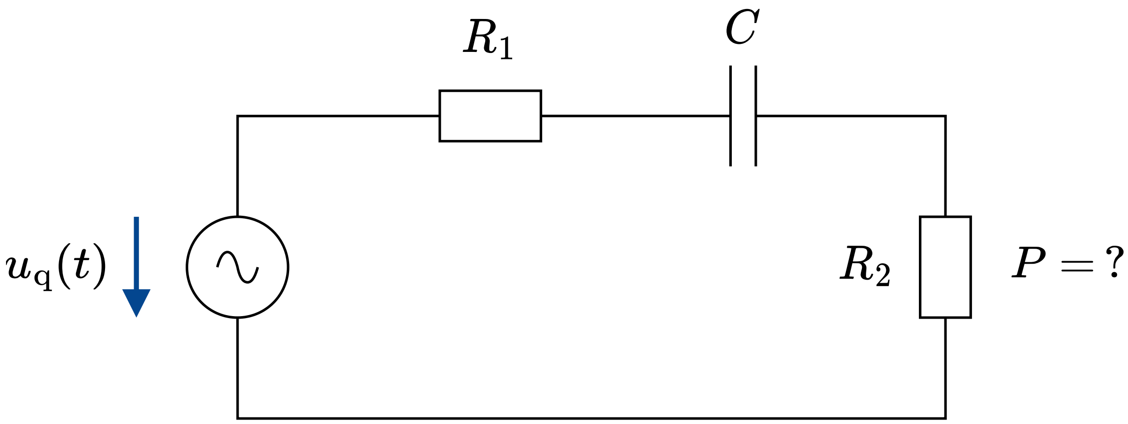
$$u_\mathrm{q}(t) = 100\,\mathrm{V} \cdot \cos(2\pi f t)$$

$$f = 500\,\mathrm{Hz}$$

$$R_1 = 20\,\Omega$$

$$R_2 = 30\,\Omega$$

$$C = 10\,\mu\mathrm{F}$$



# AC Leistungsaufnahme eines Widerstandes mit Kondensator II

- Skizzieren Sie ein Zeigerdiagramm für die Spannung über dem Widerstand $R_2$.
- Skizzieren Sie ein PQ-Diagramm für die Leistungsaufnahme des Widerstandes $R_2$.

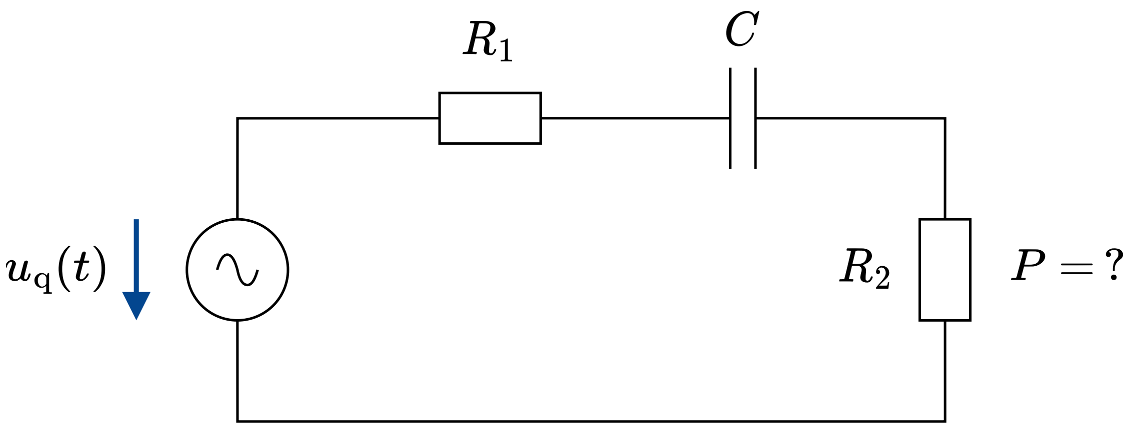
$$u_\mathrm{q}(t) = 100\,\mathrm{V} \cdot \cos(2\pi f t)$$

$$f = 500\,\mathrm{Hz}$$

$$R_1 = 20\,\Omega$$

$$R_2 = 30\,\Omega$$

$$C = 10\,\mu\mathrm{F}$$



# AC Leistungsaufnahme eines Widerstandes bei zwei Spannungsquellen I

- Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für die Spannung über dem Widerstand $R_2$.
- Skizzieren Sie das Fourier-Linienspektrum für die Spannung über dem Widerstand $R_2$.

$$u_{\mathrm{q},1}(t) = 100\,\mathrm{V} \cdot \cos(2\pi f_1 t)$$

$$u_{\mathrm{q},2}(t) = 50\,\mathrm{V} \cdot \cos(2\pi f_2 t)$$

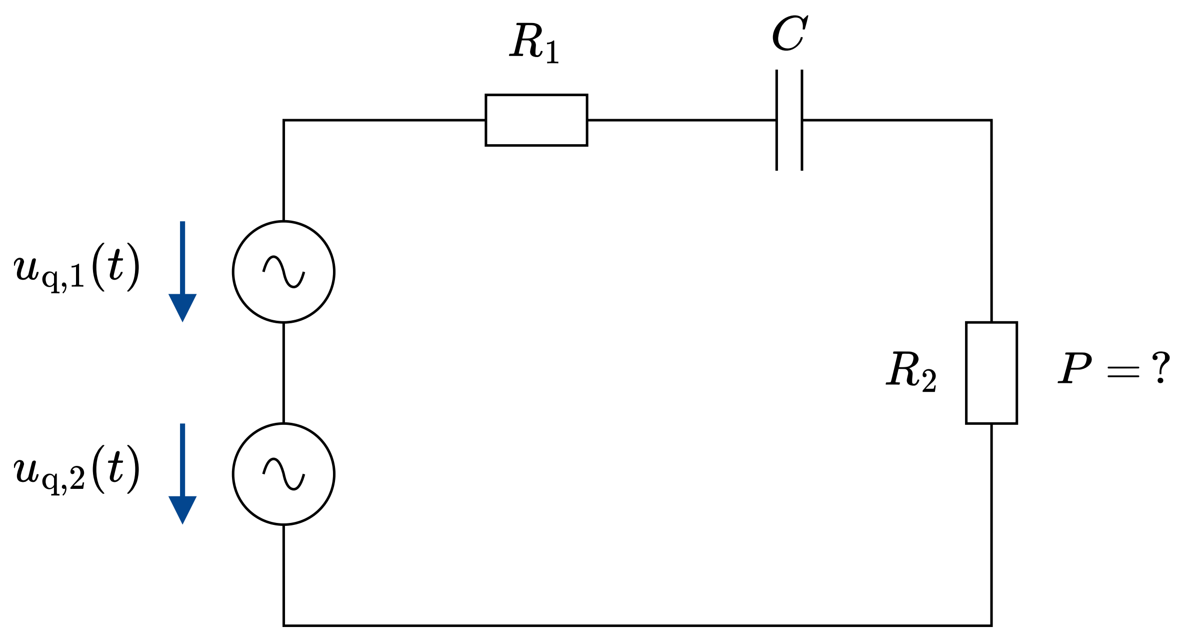
$$f_1 = 500\,\mathrm{Hz}$$

$$f_2 = 1000\,\mathrm{Hz}$$

$$R_1 = 20\,\Omega$$

$$R_2 = 30\,\Omega$$

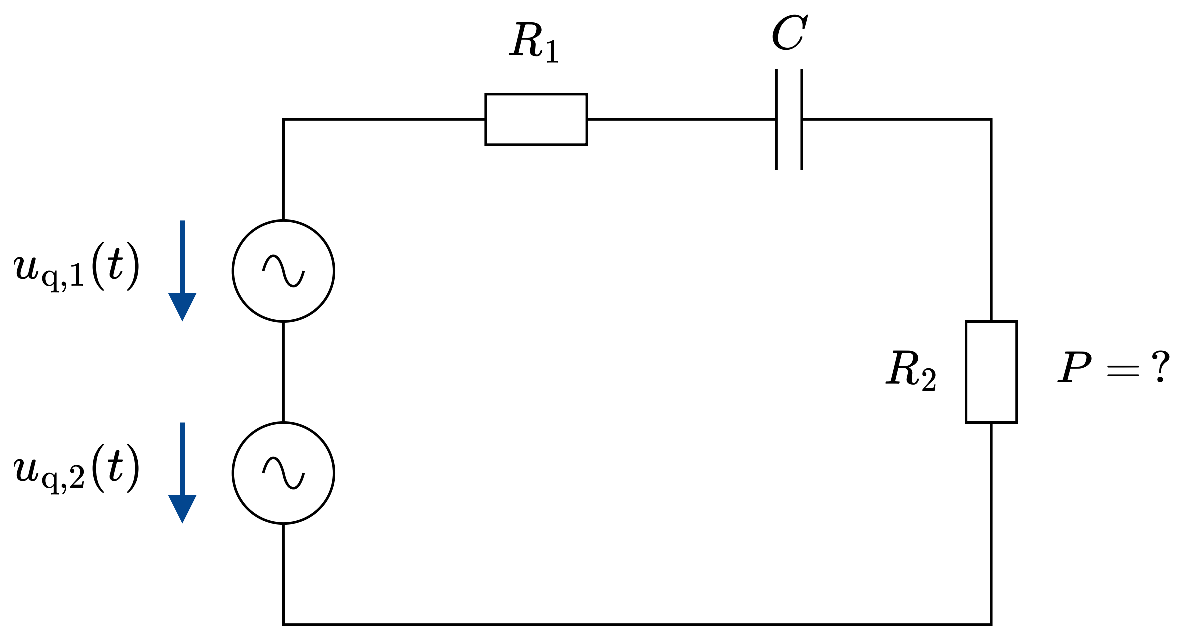
$$C = 10\,\mu\mathrm{F}$$



# AC Leistungsaufnahme eines Widerstandes bei zwei Spannungsquellen II

- Skizzieren Sie das Fourier-Linienspektrum der aufgenommenen Leistung des Widerstandes $R_2$.
- Welcher Unterschied besteht zwischen dem Fourier-Linienspektrum und der Fourier-Transformierten?
- Berechnen Sie die aufgenommene Leistung im Widerstand $R_2$.

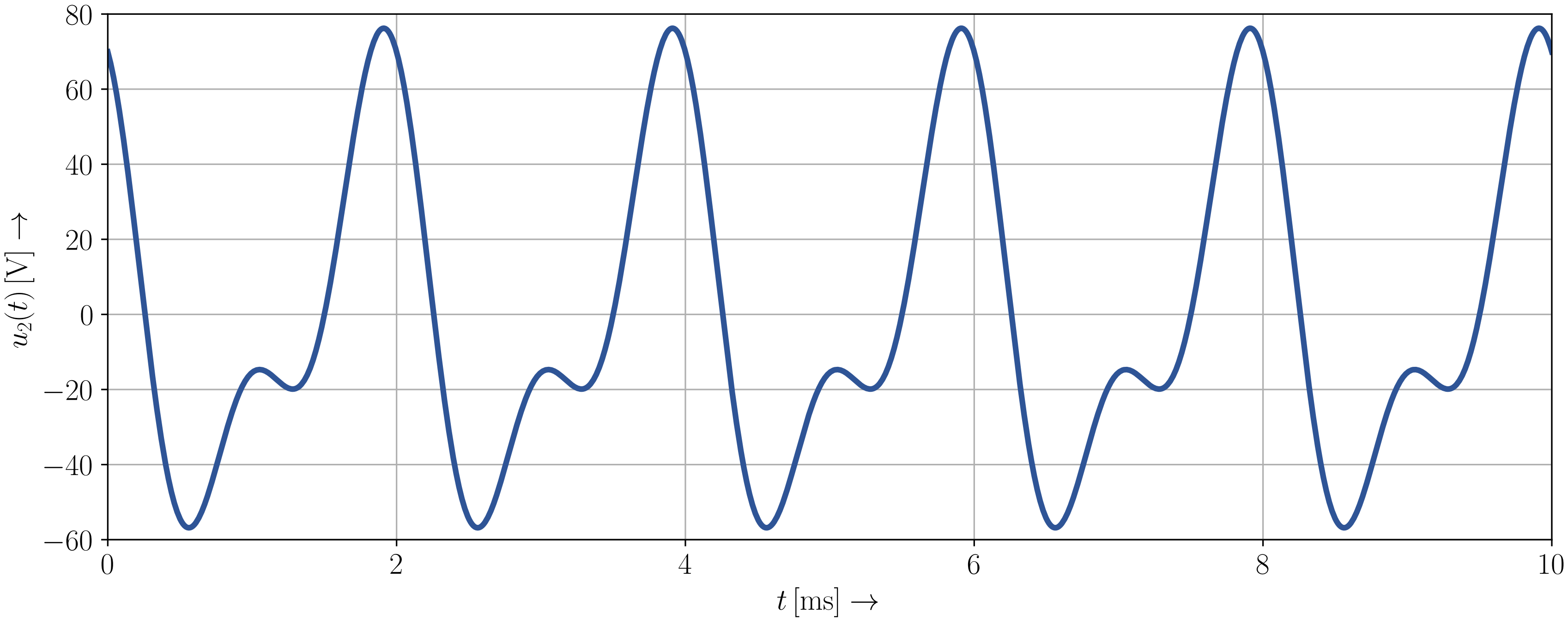
$$u_{\mathrm{q},1}(t) = 100\,\mathrm{V} \cdot \cos(2\pi f_1 t)$$
$$u_{\mathrm{q},2}(t) = 50\,\mathrm{V} \cdot \cos(2\pi f_2 t)$$
$$f_1 = 500\,\mathrm{Hz}$$
$$f_2 = 1000\,\mathrm{Hz}$$
$$R_1 = 20\,\Omega$$
$$R_2 = 30\,\Omega$$
$$C = 10\,\mathrm{mF}$$



# AC Leistungsaufnahme eines Widerstandes bei zwei Spannungsquellen III

Im Zeitbereich sieht die Spannung über $R_2$ folgendermaßen aus




- Geben Sie eine allgemeine Berechnung der Leistung mittels des Zeitsignals an.
- Geben Sie eine allgemeine Berechnung der Leistung mittels des Linienspektrums an.

# Berechnung des Leistungsdichtespektrums eines Zufallsprozesses I

Gegeben ist ein ergodischer (d.h. auch stationärer) Zufallsprozess $x(t)$

Die Autokorrelationsfunktion dieses Prozesses berechnet sich somit aus

$$\varphi_{xx}(\tau) = \mathrm{E}\{x(t+\tau) \cdot x(t)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} x(t+\tau) \cdot x(t) \, \mathrm{d}t$$

Für $\tau = 0$ entspricht dieser Ausdruck der mittleren Leistung $\tilde{P}$ (bezogen auf einen Widerstand)

$$\tilde{P} = \varphi_{xx}(0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} (x(t))^2 \, \mathrm{d}t$$

# Berechnung des Leistungsdichtespektrums eines Zufallsprozesses II

Nun betrachten wir die Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion bezüglich der Zeitdifferenz $\tau$

$$\mathcal{F}\{\varphi_{xx}(\tau)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}(\tau) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} x(t+\tau) \cdot x(t)\,\mathrm{d}t \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \cdot x(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} X(\omega) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \cdot x(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= X(\omega) \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} x(t) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = X(\omega) \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} x(-t) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= X(\omega) \cdot X(-\omega) \cdot c = X(\omega) \cdot X^*(\omega) \cdot c = |X(w)|^2 \cdot c = \Phi_{xx}(\omega) \quad \text{mit} \quad [c] = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

# Berechnung des Leistungsdichtespektrums eines Zufallsprozesses III

Berechnung der mittleren Leistung des Zufallsprozesses aus dem *Leistungsdichtespektrum*

$$\tilde{P} = \varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\cdot 0}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

Beispiel zur Verwendung der Einheiten bei Spannungssignalen

$$[P] = \mathrm{W}$$

$$[x(t)] = \mathrm{V}$$

$$\left[\tilde{P}\right] = \mathrm{V}^2 = \mathrm{W} \cdot \Omega$$

$$[X(\omega)] = \mathrm{Vs}$$

$$[\Phi(\omega)] = \left[|X(\omega)|^2\right] \cdot [c] = V^2\mathrm{s}^2 \cdot \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{V}^2\mathrm{s}$$