

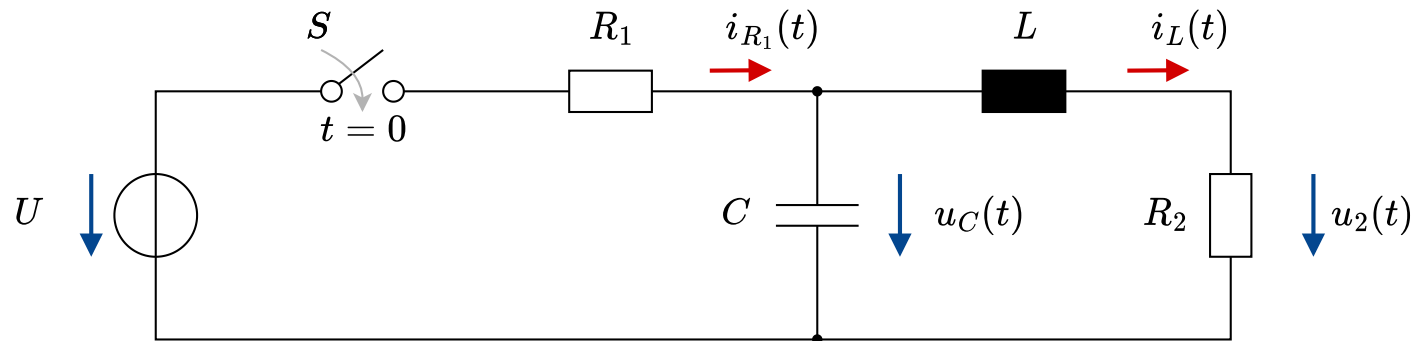
# Analyse deterministischer Signale im Frequenzbereich

— *Laplace-, Fourier- und z-Transformation* —

# Laplace-Transformation

## Schaltvorgang an passiven elektrischem Netzwerk

*Aufgabe:* Ermittlung der Spannung  $u(t)$  nach Schließen des Schalters  $S$  bei  $t = 0$



*Vorgehen:* Aufstellen und Lösen der Differentialgleichung (DGL)

$$L \frac{d}{dt} i_L(t) = u_C(t) - R_2 \cdot i_L(t)$$

$$C \frac{d}{dt} u_C(t) = i_L(t) - i_{R_1}(t) = i_L(t) - \frac{U_q - u_C(t)}{R_1}$$

$$u_2(t) = R_2 \cdot i_L(t)$$

*Problematik:* Lösen der DGL meist sehr aufwändig

## Laplace-Transformation

Transformation von Zeitsignalen in den Laplace-Bereich mit komplexer Frequenz  $s = \sigma + j\omega$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

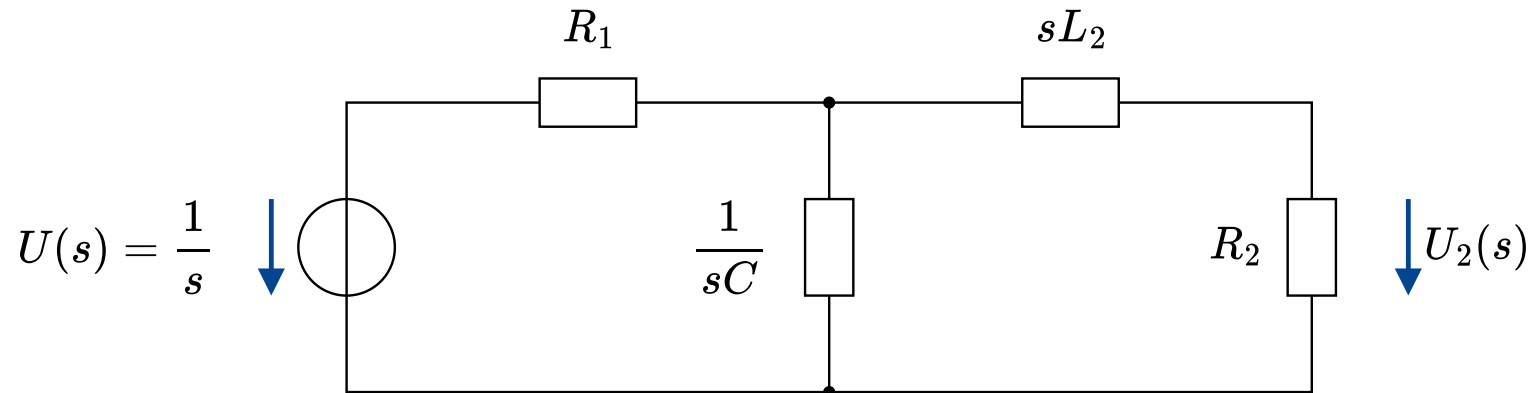
Rücktransformation in den Zeitbereich

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} U(s) \cdot e^{s \cdot t} ds$$

Wichtige Korrespondenzen

Zeitbereich	Laplace-Bereich
$\delta(t)$	1
$\varepsilon(t)$	$1/s$
$\frac{d}{dt}$	$s$

## Transformation in Laplace-Bereich



Vorteil: DGL wird in algebraische Gleichung überführt

$$\begin{aligned}
 U_2(s) &= U(s) \cdot \frac{\frac{(R_2+sL)/sC}{R_2+sL+1/sC}}{R_1 + \frac{(R_2+sL)/sC}{R_2+sL+1/sC}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + sL} = \\
 &= U(s) \cdot \frac{R_2}{s^2 \cdot R_1 LC + s \cdot (CR_1 R_2 + L) + R_1 + R_2} \\
 &= U(s) \cdot \frac{\frac{R_2}{R_1 LC}}{(s + s_1)(s + s_2)} \quad \text{mit} \quad s_{1,2} = \frac{CR_1 R_2 + L}{2CLR_1} \pm \frac{\sqrt{C^2 R_1^2 R_2^2 - 4CLR_1^2 - 2CLR_1 R_2 + L^2}}{2CLR_1}
 \end{aligned}$$

## Rücktransformation in den Zeitbereich

Abhängig von der Lage der Pole lässt sich die Laplace-Transformierte der gesuchten Größe wieder in den Zeitbereich transformieren

Schwingungsfall, d.h.  $\text{Im}\{s_{1,2}\} \neq 0$  bzw.  $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ :

$$u_2(t) = \varepsilon(t) \cdot U \cdot \frac{R_2}{CLR_1} \cdot \frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma^2 + \omega^2} \cdot \left( \cos(\omega t) + \frac{\sigma}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

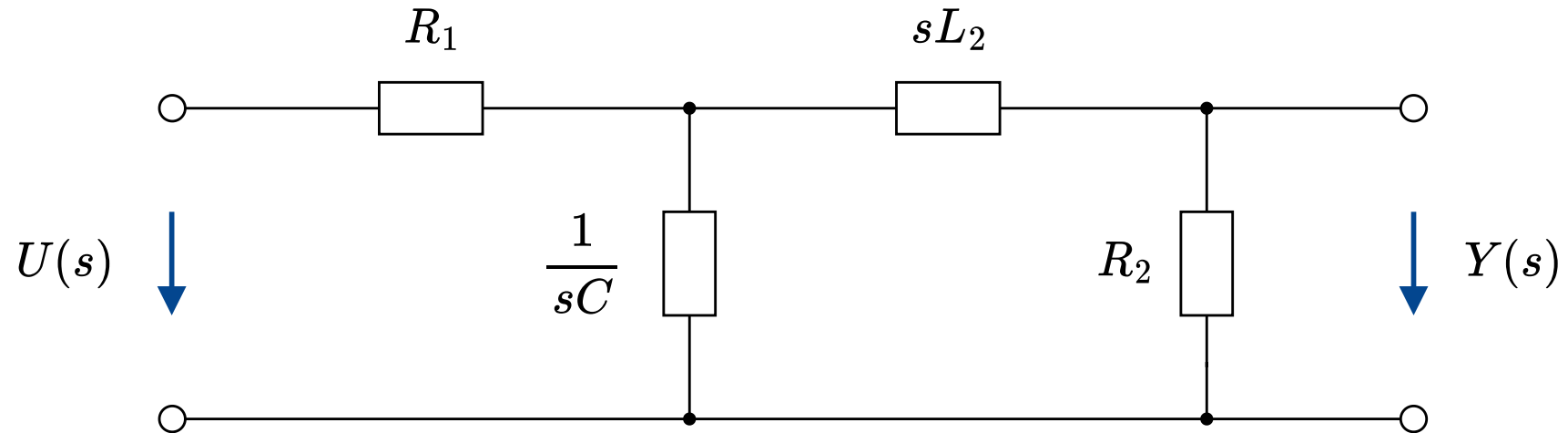
Aperiodischer Grenzfall, d.h. Für  $s_1 = s_2 = \sigma$ :

$$u_2(t) = \varepsilon(t) \cdot U \cdot \frac{R_2}{CLR_1} \cdot \frac{1 - (1 + t\sigma)e^{-t\sigma}}{\sigma^2}$$

Kriechfall, d.h.  $\text{Im}\{s_{1,2}\} = 0$  aber  $\text{Re}\{s_1\} \neq \text{Re}\{s_2\}$ :

$$u_2(t) = \varepsilon(t) \cdot U \cdot \frac{R_2}{CLR_1} \cdot \left( \frac{1}{s_1 s_2} + \frac{s_2 e^{-s_1 t} - s_1 e^{-s_2 t}}{s_1 s_2 (s_1 - s_2)} \right)$$

## Beschreibung des Systems mittels Übertragungsfunktion



Laplace Transformation zur Systembeschreibung mittels Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{R_2}{R_1 LC}}{(s + s_1)(s + s_2)} \quad \text{mit} \quad s_{1,2} = \frac{CR_1 R_2 + L}{2CLR_1} \pm \frac{\sqrt{C^2 R_1^2 R_2^2 - 4CLR_1^2 - 2CLR_1 R_2 + L^2}}{2CLR_1}$$

Übertragungsfunktion beschreibt *nur* Systemverhalten

Berechnung des Ausgangssignals  $Y(s)$  bei beliebigem Eingangssignal  $U(s)$

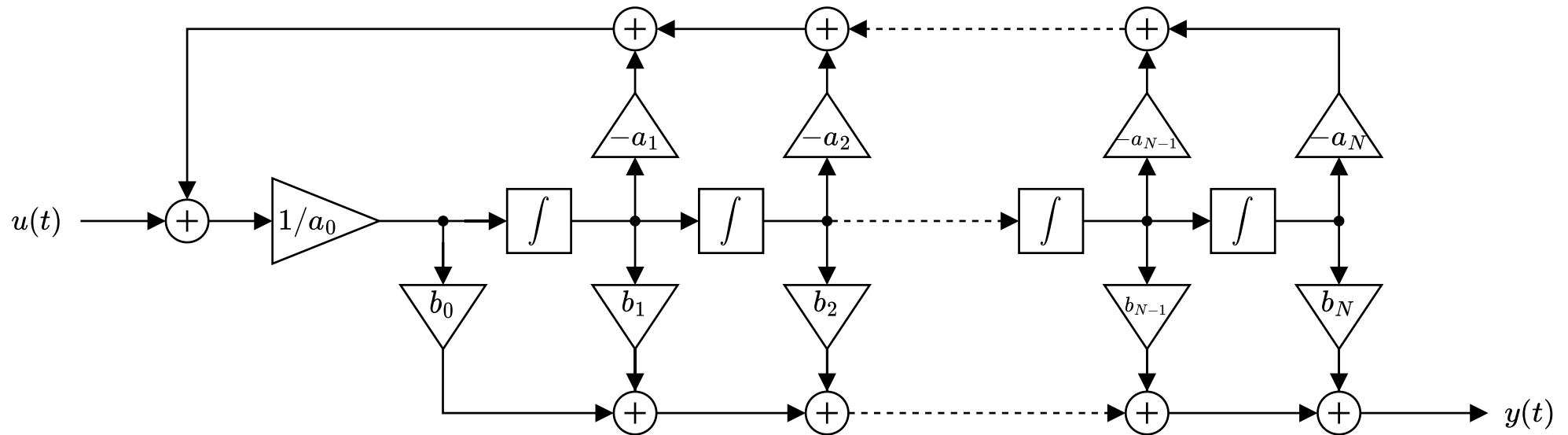
$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

## Allgemeiner Aufbau einer Übertragungsfunktion

Allgemein lässt sich Übertragungsfunktion darstellen als Division zweier Polynome

$$H(s) = \frac{b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + b_2 s^{N-2} + \dots + b_{N-1} s + b_N}{a_0 s^N + a_1 s^{N-1} + a_2 s^{N-2} + \dots + a_{N-1} s + a_N}$$

Darstellung der Übertragungsfunktion in Direkt-Form-II



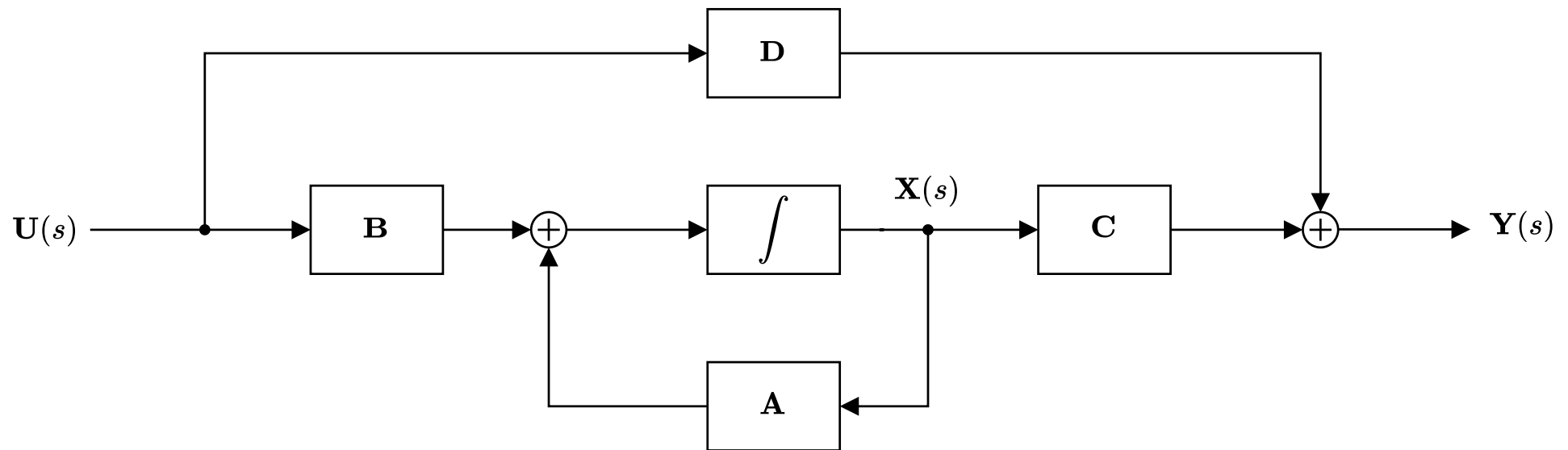


## Beschreibung eines Systems im Zustandsraum

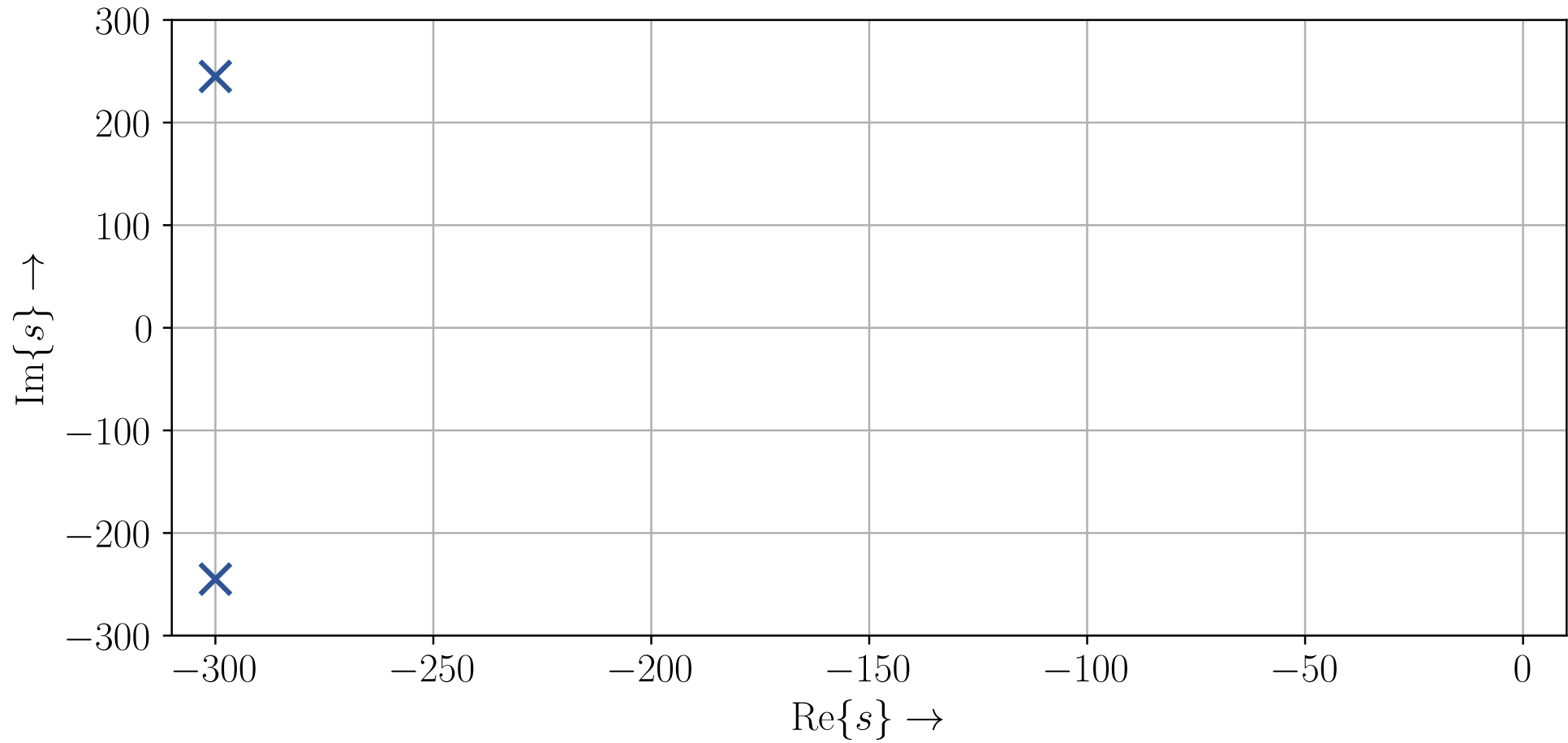
Alternative Beschreibung des Systems im Zustandsraum

$$s \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s)$$

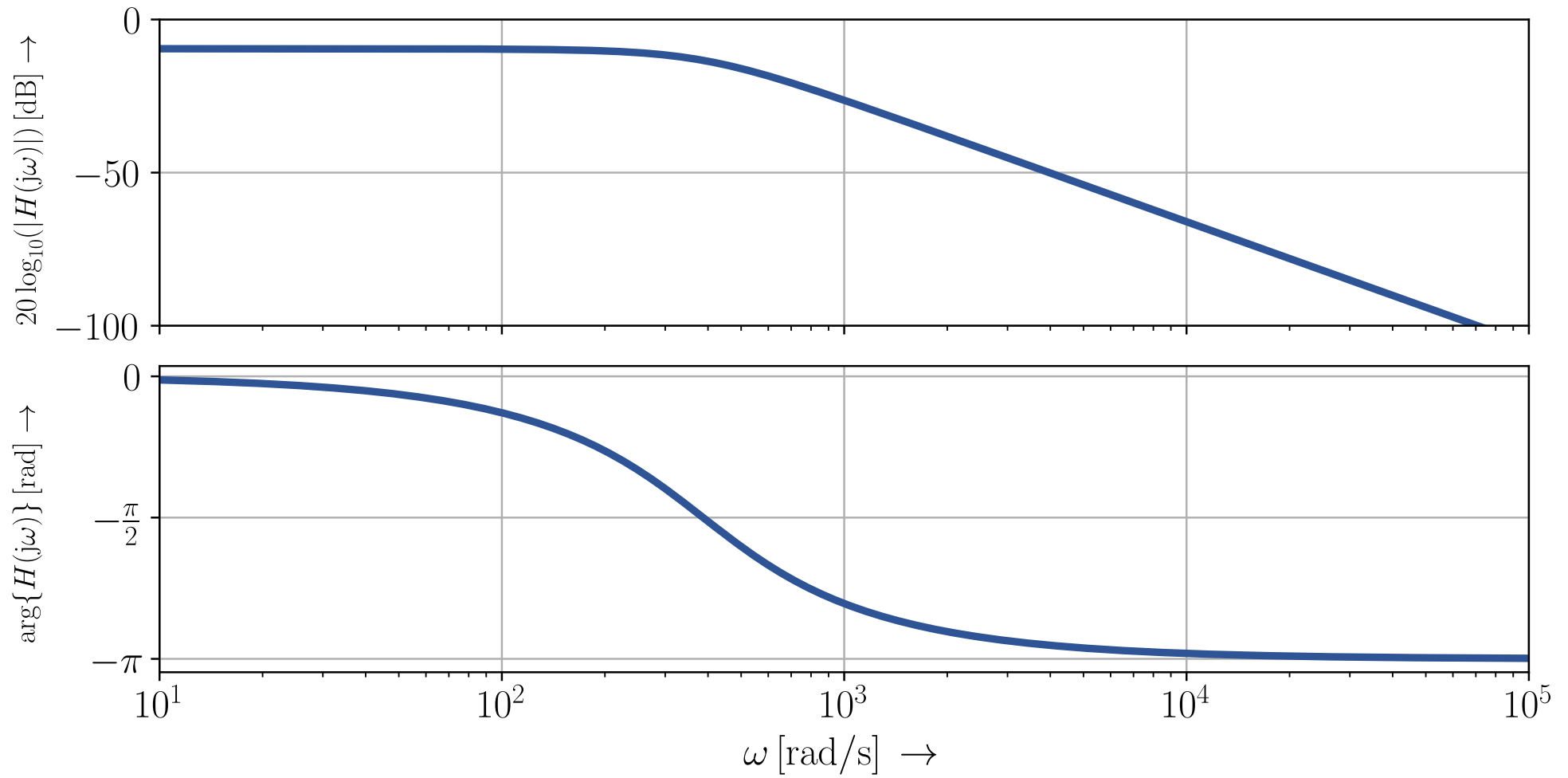
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}(s)$$



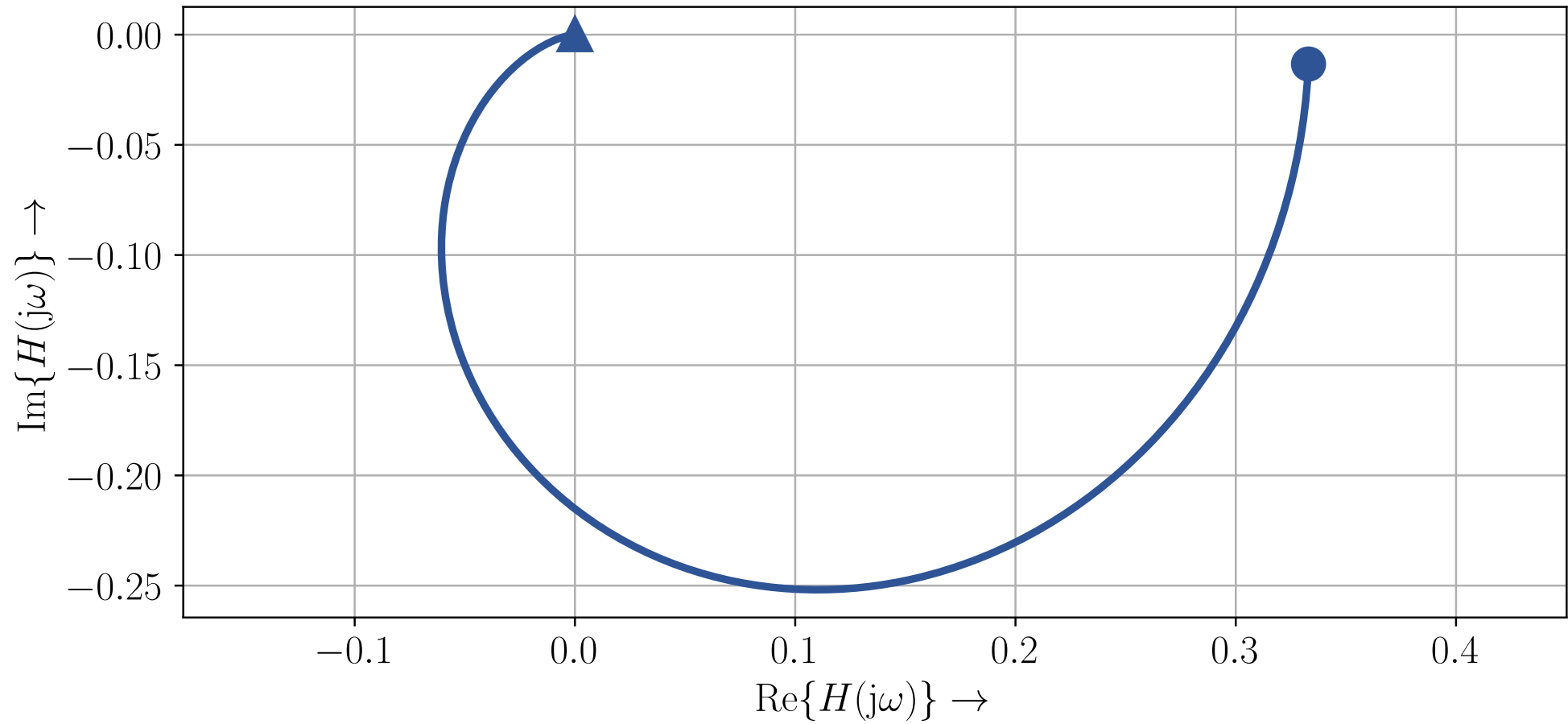
## Pol-Nullstellen-Diagramm



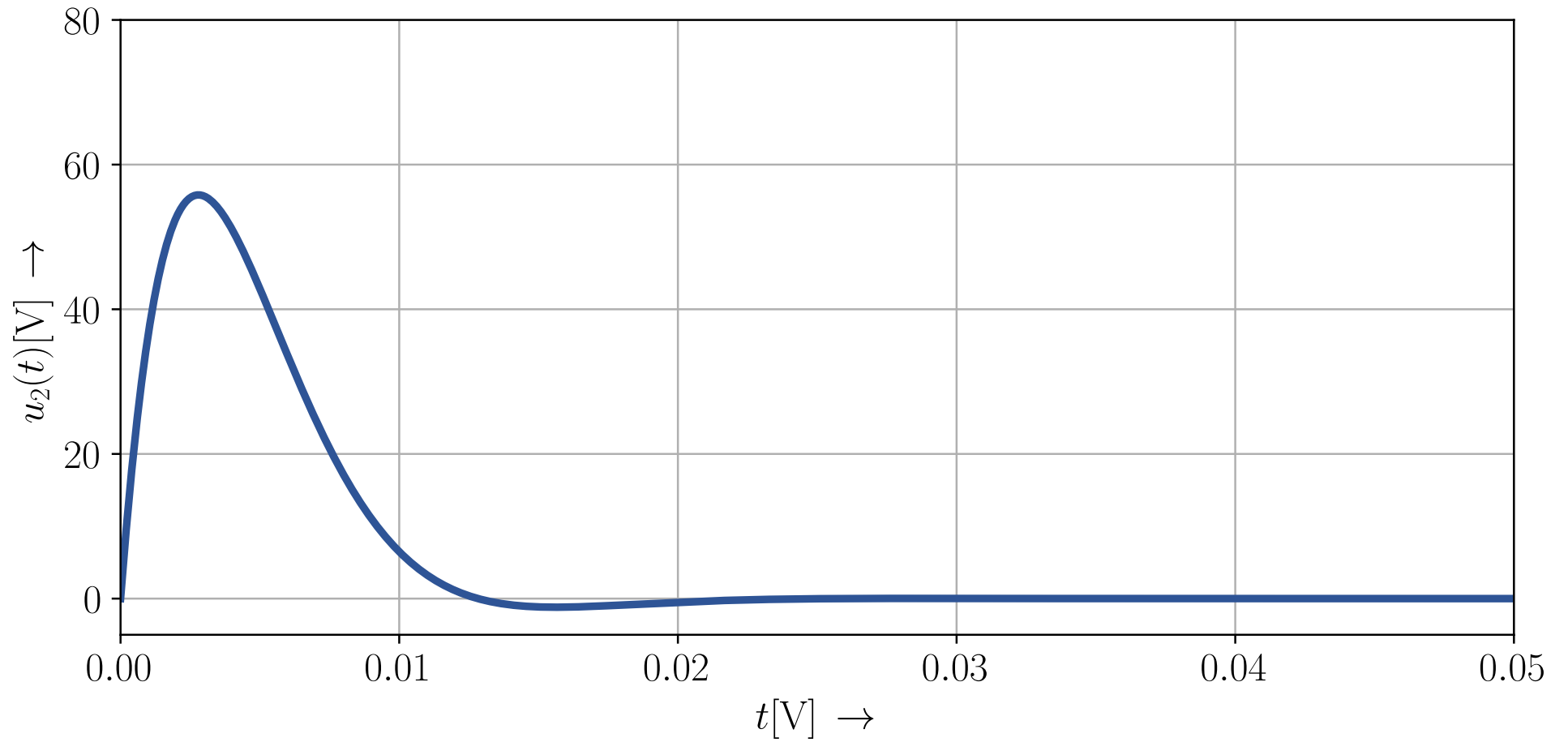
## Bode-Diagramm



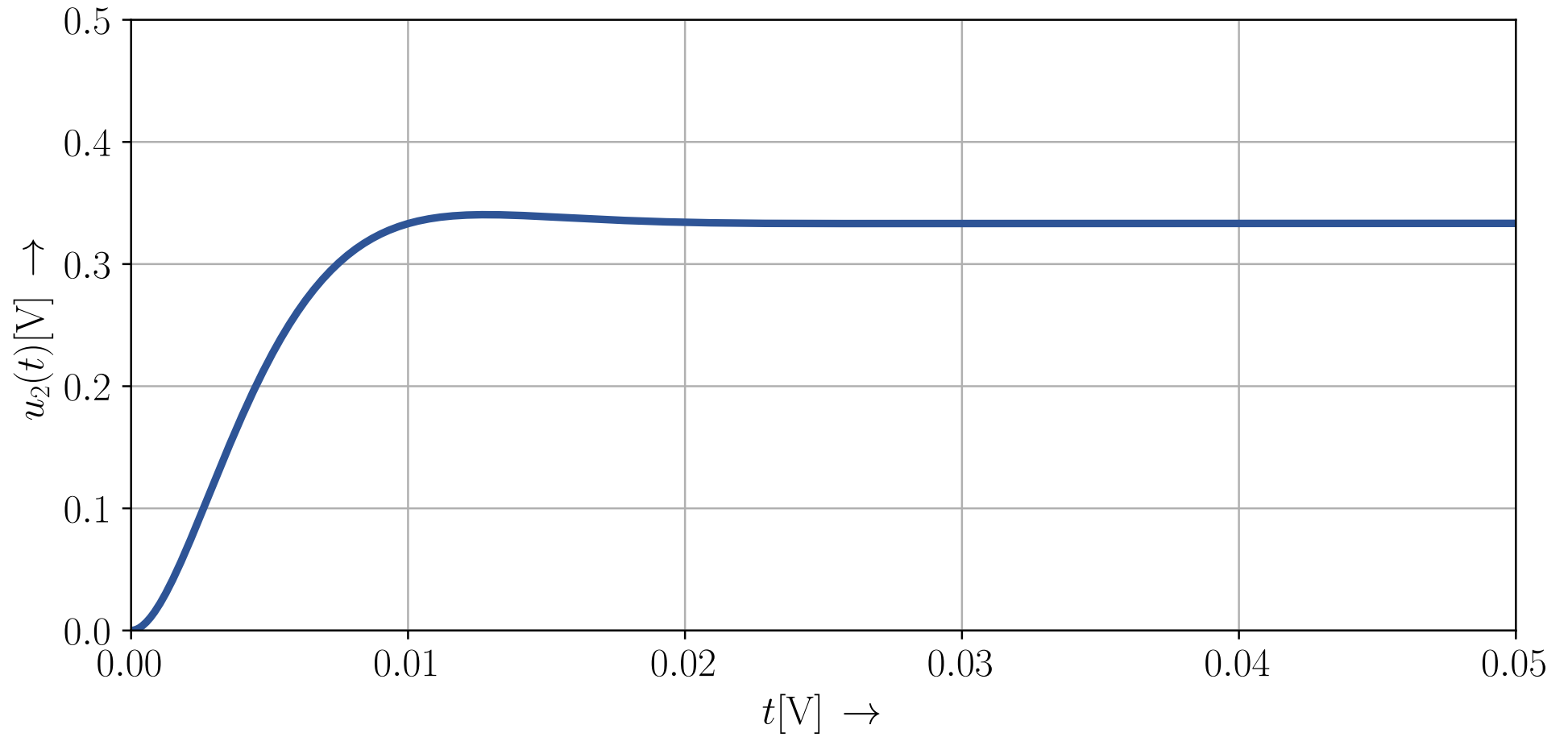
## Ortskurve



## Impulsantwort



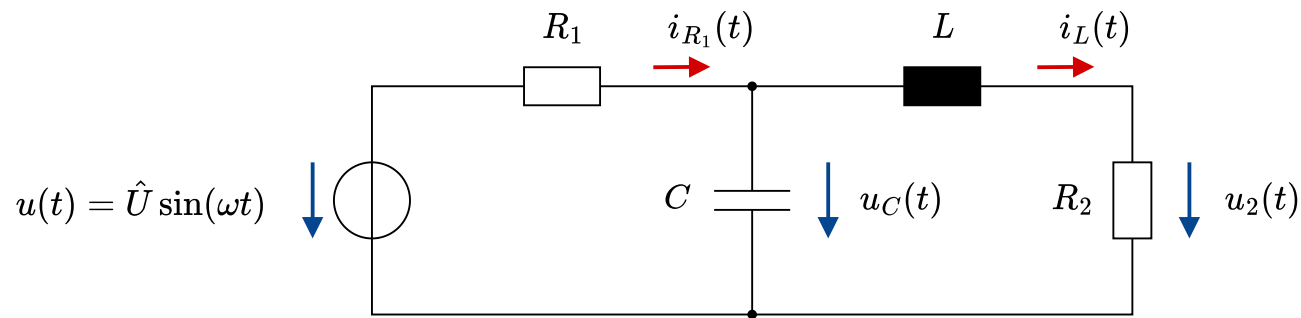
## Sprungantwort



# Fourier-Transformation

## Komplexe Wechselstromrechnung

Analyse eines elektrischen Netzwerkes mit sinusförmiger Quelle



Beschreibung von Spannungen und Strömen als komplexe Zeiger bei der Transformationsfrequenz  $\omega$

$$u(t) = \text{Im} \left\{ \hat{U} \cdot e^{j\omega t} \right\} \Rightarrow \underline{U} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \quad (\text{Effektivwertzeiger})$$

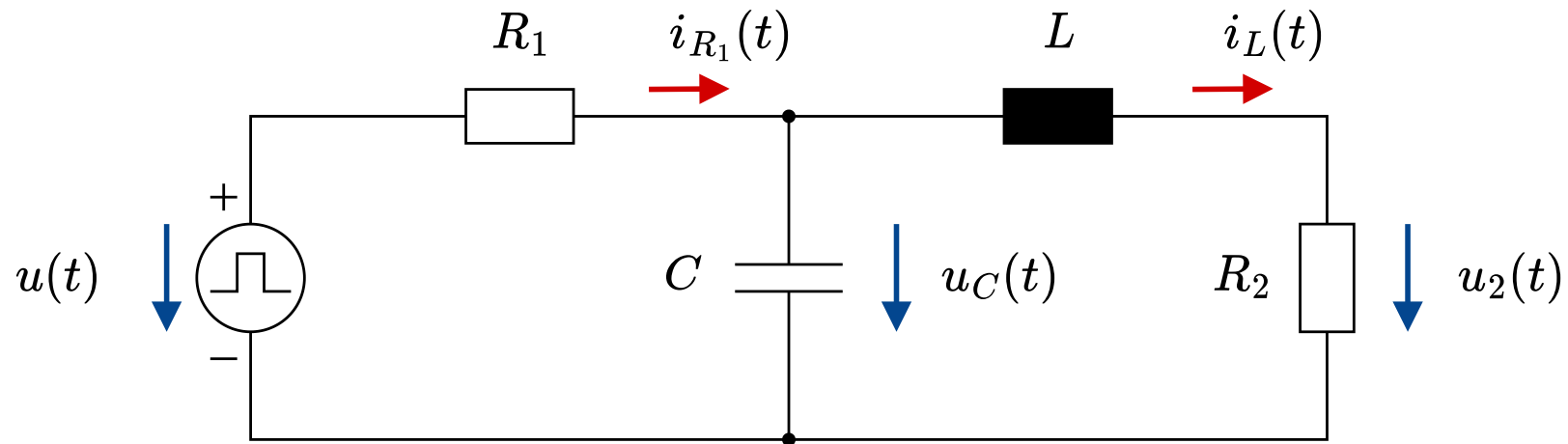
$$\underline{U}_2 = \underline{U} \cdot \frac{\frac{(R_2 + j\omega L)/j\omega C}{R_2 + j\omega L + 1/j\omega C}}{R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L)/j\omega C}{R_2 + j\omega L + 1/j\omega C}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + j\omega L} = \dots$$

$$u_2(t) = \text{Im} \left\{ \underline{U}_2 \cdot e^{j\omega t} \right\} = \hat{U} \cdot R_2 \cdot \frac{(R_1 + R_2 - CLR_1\omega^2) \sin(\omega t) - \omega (CR_1R_2 + L) \cos(\omega t)}{\omega^2 (CR_1R_2 + L)^2 + (R_1 + R_2 - CLR_1\omega^2)^2}$$



## Fourier-Reihenentwicklung periodischer Signale

Analyse eines elektrischen Netzwerkes mit beliebigen periodischen Quellen (Periodendauer  $T$ )



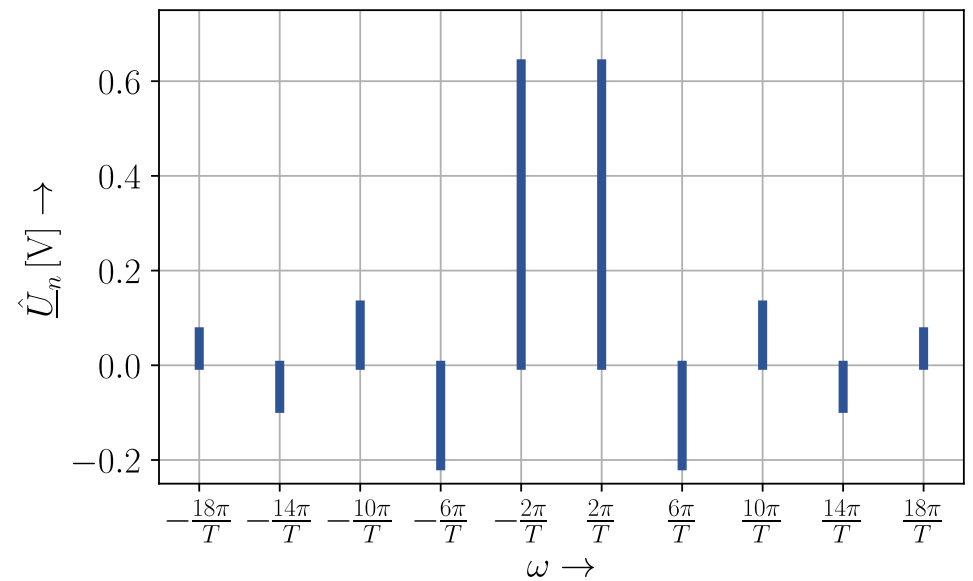
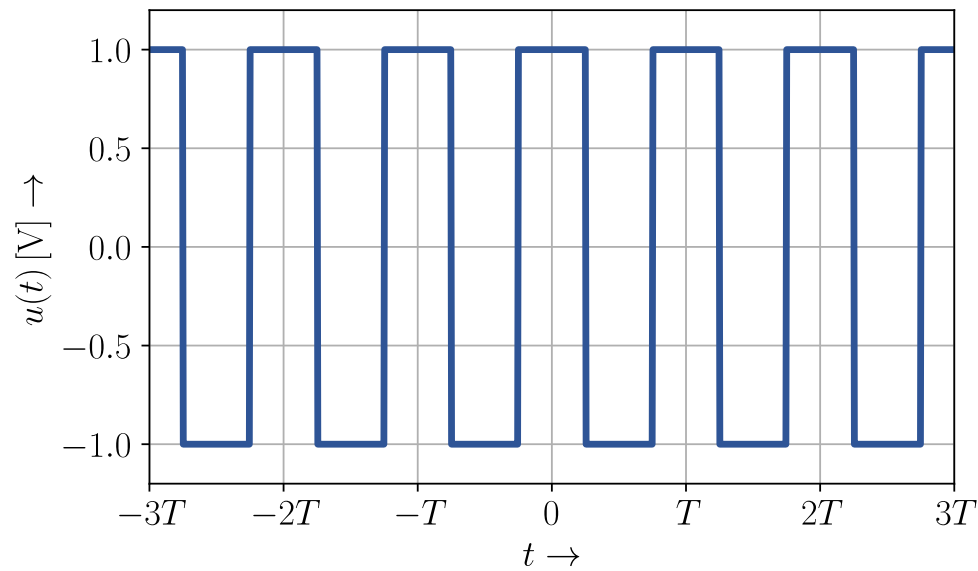
Zerlegung des Signals in unendliche Reihe aus Sinus-Funktionen (Fundamentale Kreisfrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ )

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{U}_n \cdot e^{jn\omega t} \quad \text{mit} \quad \hat{U}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

Anwendung der Idee der komplexen Wechselstromrechnung für jede diskrete Frequenz  $n \cdot \omega$

# Linienpektrum

Darstellung der Fourier-Koeffizienten in einem *Linienpektrum*



Wichtiger Zusammenhang:

*Periodisches Signal*  $\iff$  *diskretes Spektrum*

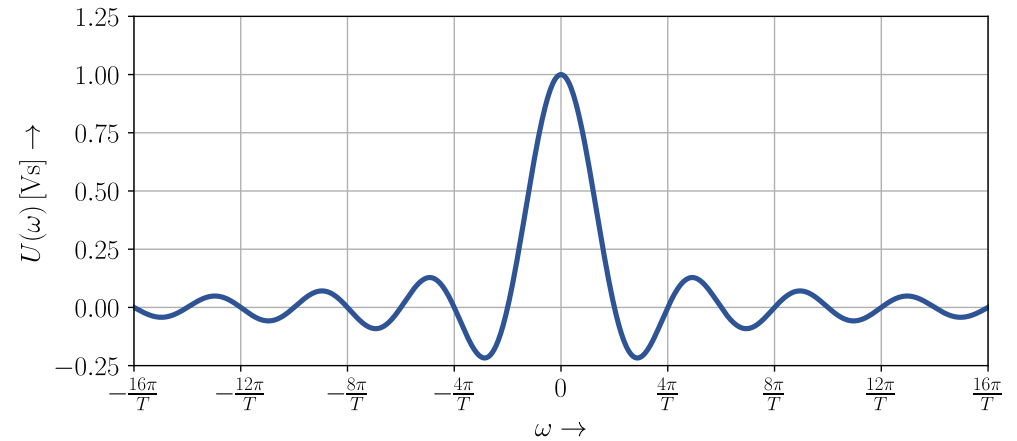
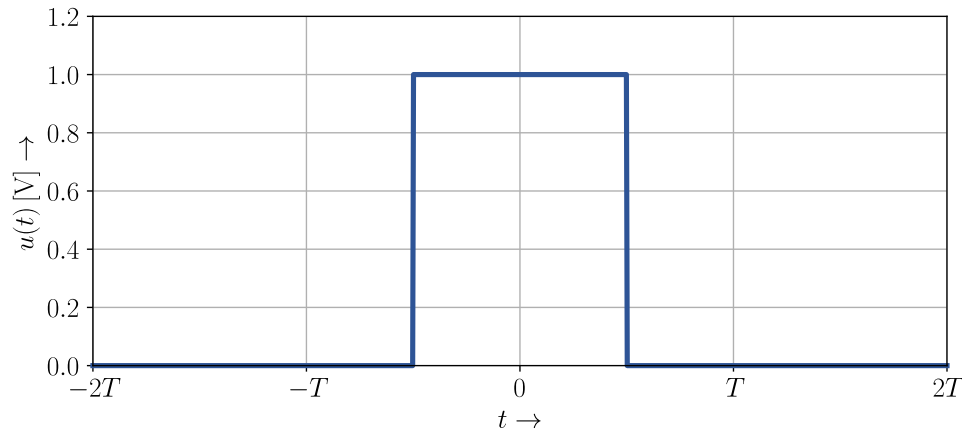
## Fourier-Transformation allgemeiner Signale

Definition einer Fourier-Transformierten allgemeiner (d.h. auch nicht-periodischer) Signale

$$U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad u(t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Wichtiger Zusammenhang:

*Nicht-periodisches Signal*  $\iff$  *kontinuierliches Spektrum*



## Leistungs- und Energie-Signale

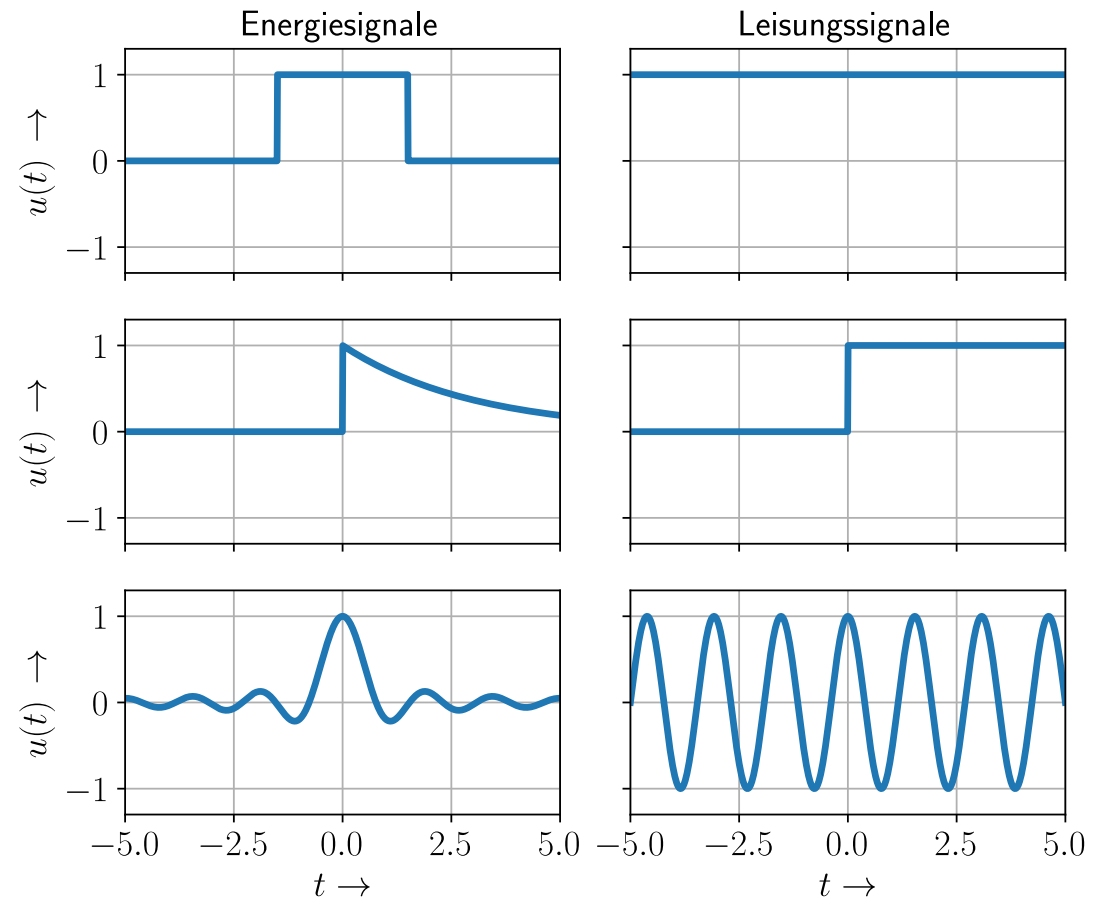
Signal  $u(t)$  ist ein

– Energiesignal, falls

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt = E < \infty$$

– Leistungssignal, falls

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u^2(t) dt = P < \infty$$

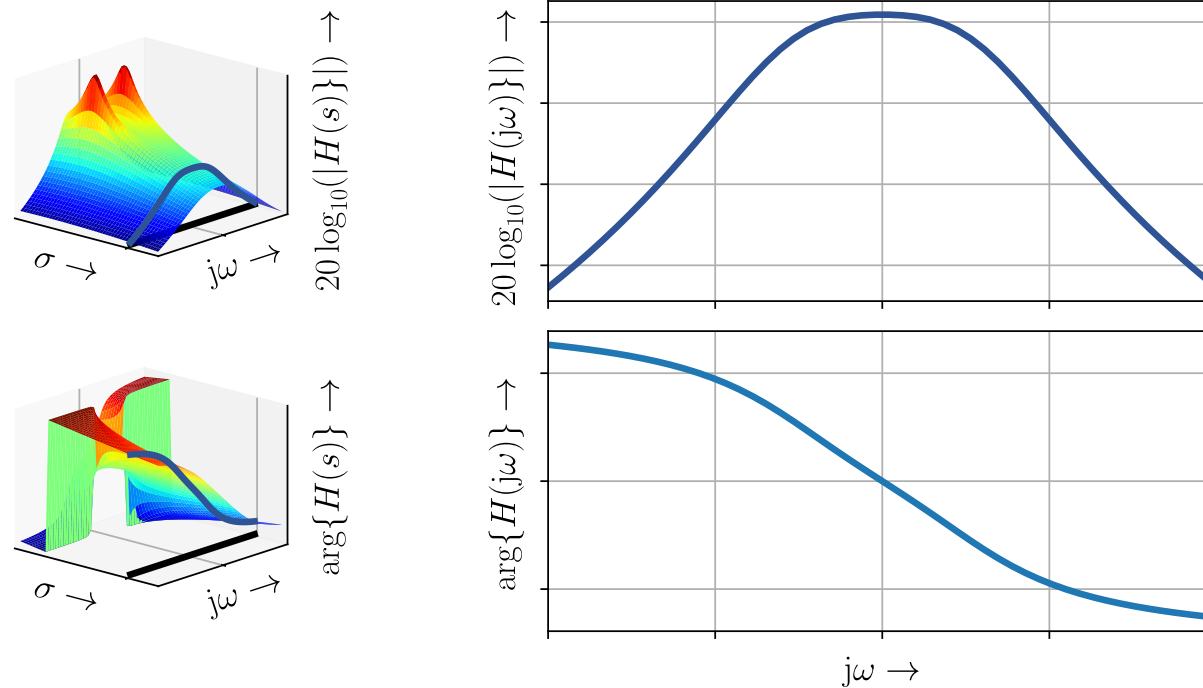


## Fourier-Transformation von Systemen

Analyse des Frequenzverhaltens von Systemen mittels der Fourier-Transformation der Impulsantwort  $h(t)$

$$H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{h(t)\} \Big|_{s=j\omega}$$

Fourier-Transformation entspricht Auswertung der Laplace-Transformation auf der imaginären Achse



# z-Transformation

## Abtastung von Zeitsignalen

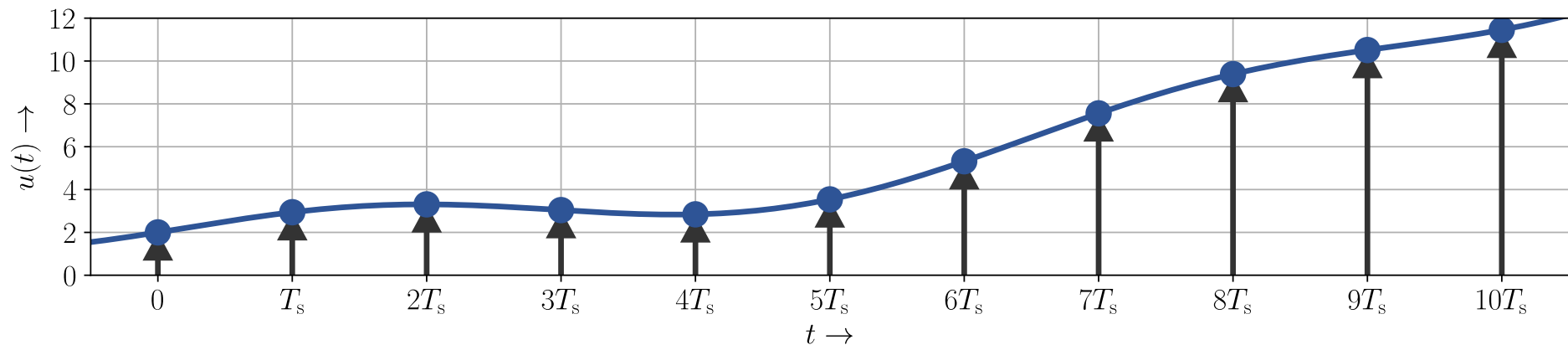
Abtastung eines Zeitsignals zu diskreten Zeitpunkten mit Abtastzeit  $T_s$

Ergebnis ist diskrete Zahlenfolge mit Zeitindex  $k$

$$u[k] = u(k \cdot T_s) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Diskrete Signalwerte  $u(k \cdot T_s)$  entsprechen Multiplikation mit *Delta-Impuls-Kamm*

$$u_s(t) = u(t) \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \mu T_s)$$

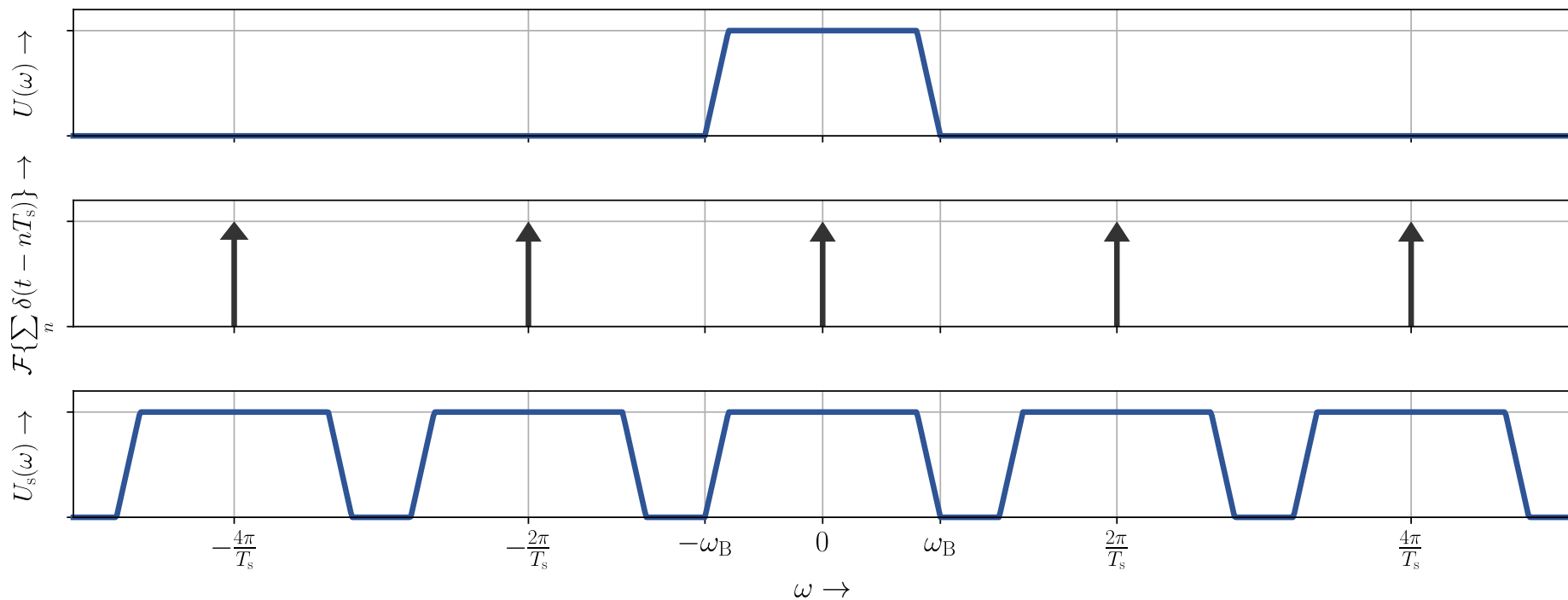


## Abtasttheorem

Multiplikation mit Delta-Impuls-Kamm im Zeitbereich entspricht Faltung mit im Frequenzbereich

Vermeidung der Überlappung der Spektren (Alaising) durch geeignete Wahl der Abtastfrequenz

$$f_s = \frac{1}{T_s} > 2 \cdot \frac{\omega_B}{2\pi}$$



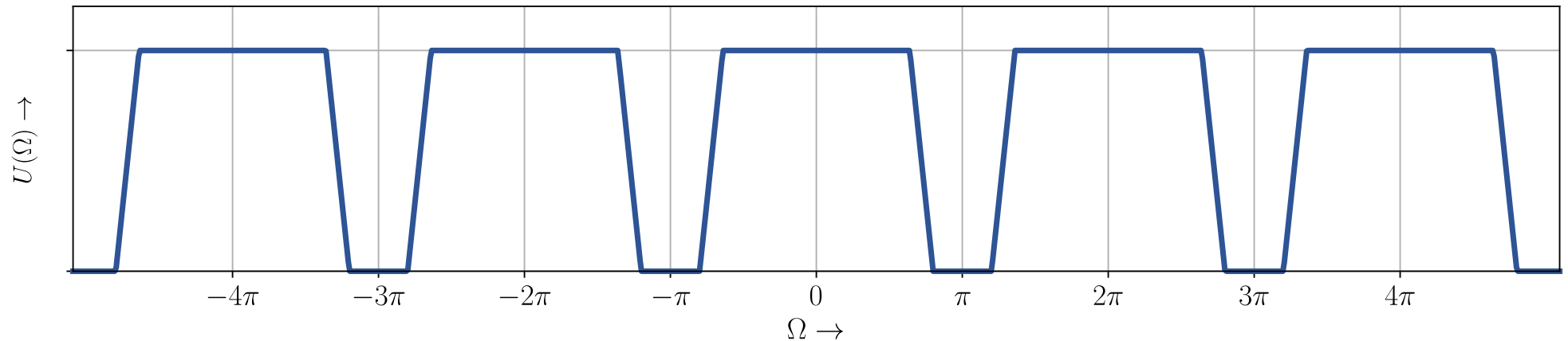


## Discrete Time Fourier Transform

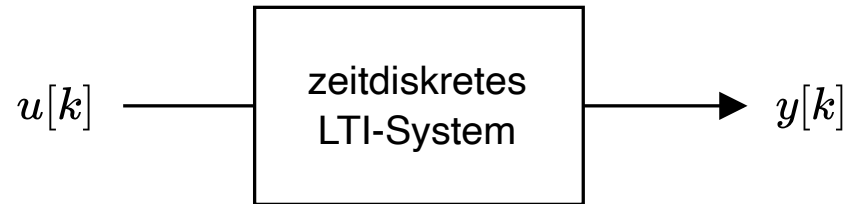
Berechnung des periodischen Spektrums mittels Fourier Transformation auf diskreter Zahlenfolge

Bezeichnung der Transformation auf englisch: *Discrete Time Fourier Transform*

$$U(\Omega) = \text{DTFT}\{u[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]e^{-jk\Omega} \quad \text{bzw.} \quad u[k] = \text{DTFT}^{-1}\{U(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U(\Omega)e^{jk\Omega} d\Omega$$



## Beschreibung von Signalen und Systemen in z-Bereich



Beschreibung des Verhaltens eines abgetasteten Systems durch Differenzgleichung

$$y[k] = \frac{1}{a_0} \left( \sum_{n=0}^N b_n \cdot u[k-n] - \sum_{n=1}^N a_n \cdot y[k-n] \right)$$

Transformation in z-Bereich mit  $z \in \mathbb{C}$

$$U(z) = \mathcal{Z}\{u[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]z^{-k} \quad \text{und} \quad u[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{U(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint U(z)z^{k-1} dz$$

Beschreibung der Verzögerung eines Zeitschrittes in Differenzgleichung mittels Multiplikation mit  $z^{-1}$

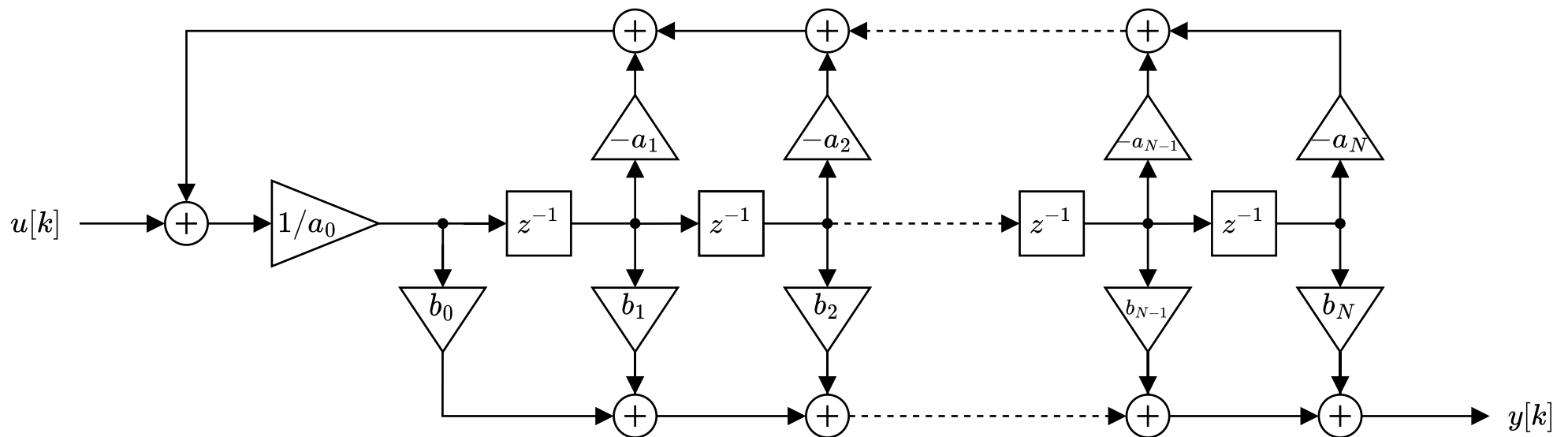
$$Y(z) = \frac{1}{a_0} \left( U(z) \cdot \sum_{n=0}^N b_n \cdot z^{-n} - Y(z) \cdot \sum_{n=1}^N a_n \cdot z^{-n} \right)$$

# Übertragungsfunktion im z-Bereich

Beschreibung einer Übertragungsfunktion bei zeitdiskreten Systemen mittels z-Transformierter

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_N z^{-N} + b_{N-1} z^{-(N-1)} + b_{N-2} z^{-(N-2)} + \dots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_N z^{-N} + a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_{N-2} z^{-(N-2)} + \dots + a_1 z^{-1} + a_0} = \\
 &= \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \dots + b_{N-1} z + b_N}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_{N-1} z + a_N}
 \end{aligned}$$

Blockschaltbild der Übertragungsfunktion in Direkt-Form-II



## Zustandsraumdarstellung zeitdiskreter Systeme

Beschreibung des Systems im Zustandsraum im z-Bereich und im Zeitbereich

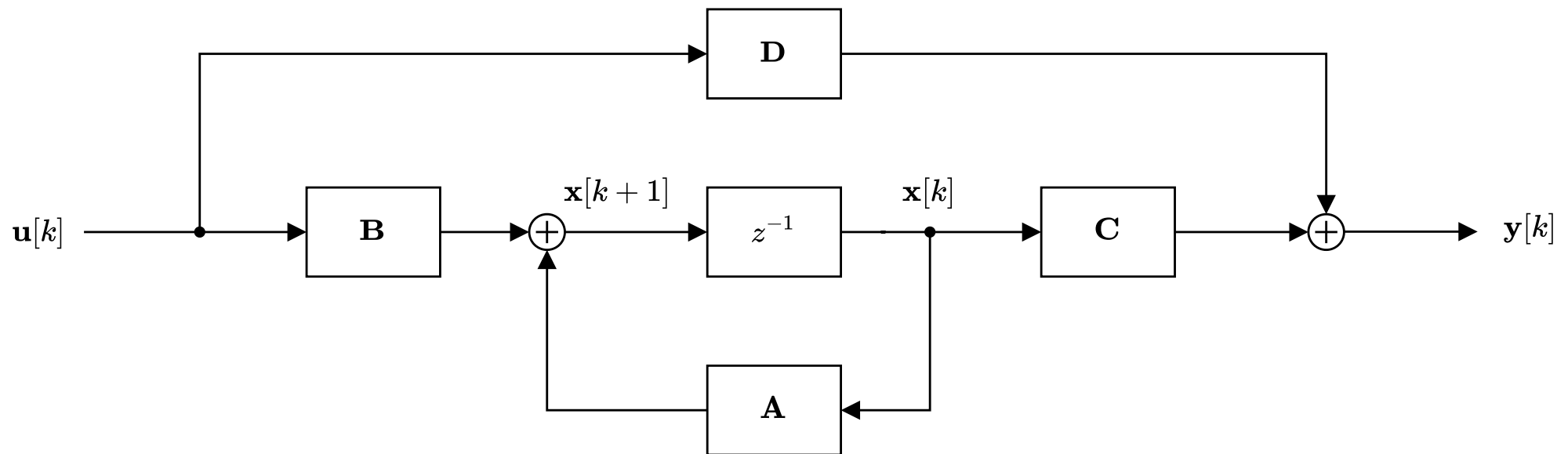
$$z \cdot \mathbf{X}(z) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(z) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(z)$$

$$\mathbf{x}[k + 1] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}[k]$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(z) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}(z)$$

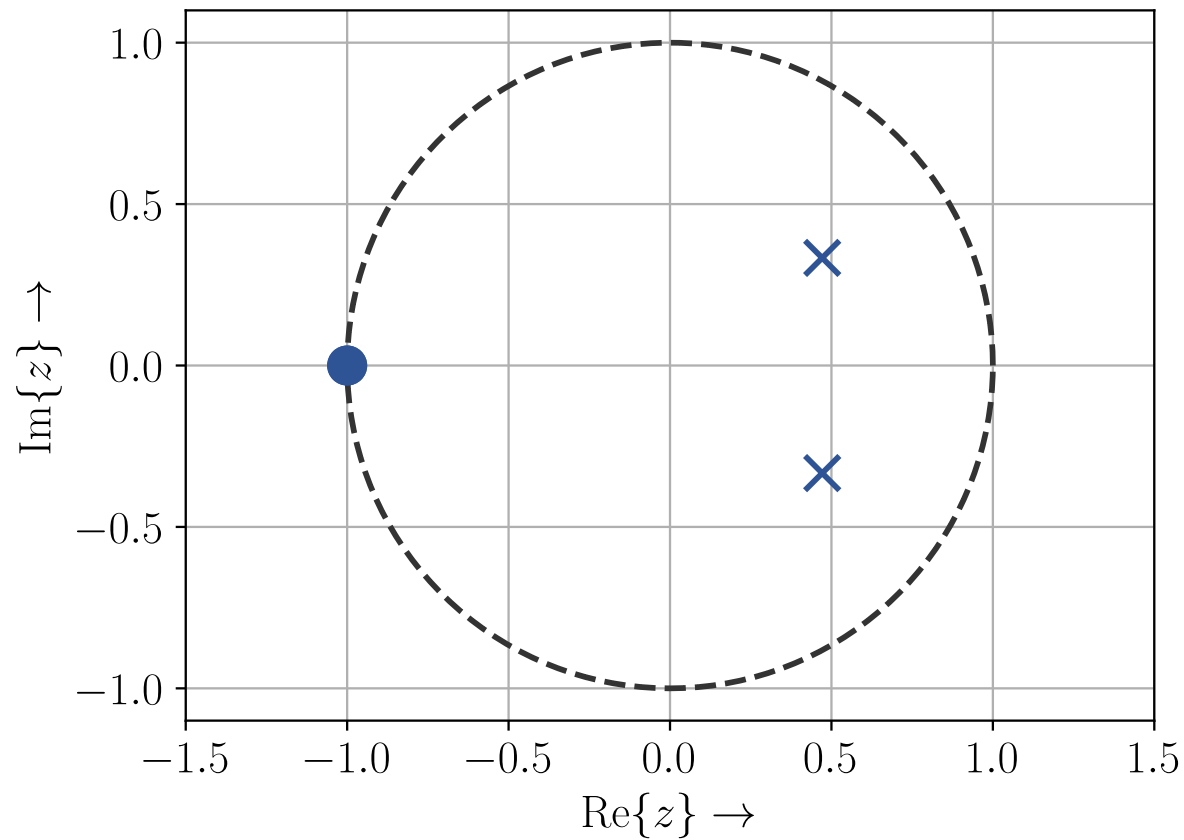
bzw.

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}[k]$$



## Analyse von zeitdiskreten Systemen mittels Pol-Nullstellen-Diagramm

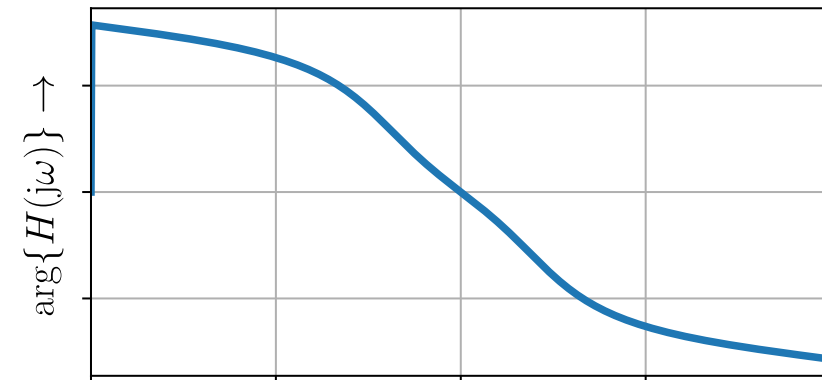
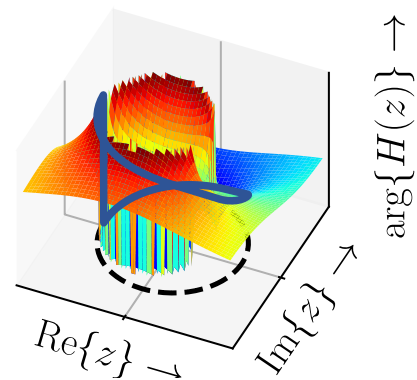
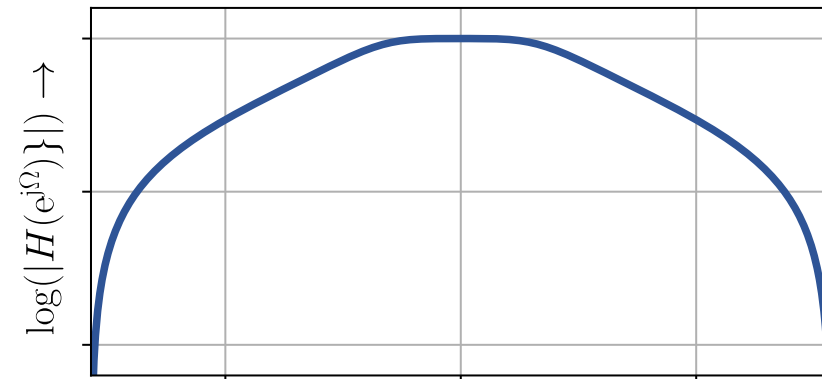
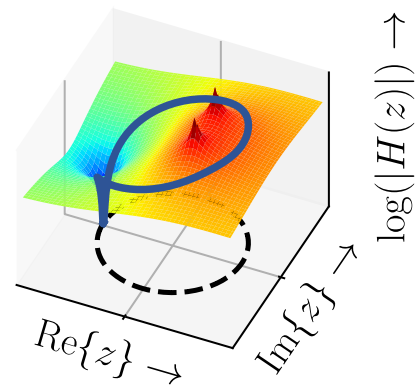
Hier: Butterworth-Tiefpass-Filter  $H(z)$  2. Ordnung



## Zusammenhang zwischen z-Transformation und *Discrete Time Fourier Transform*

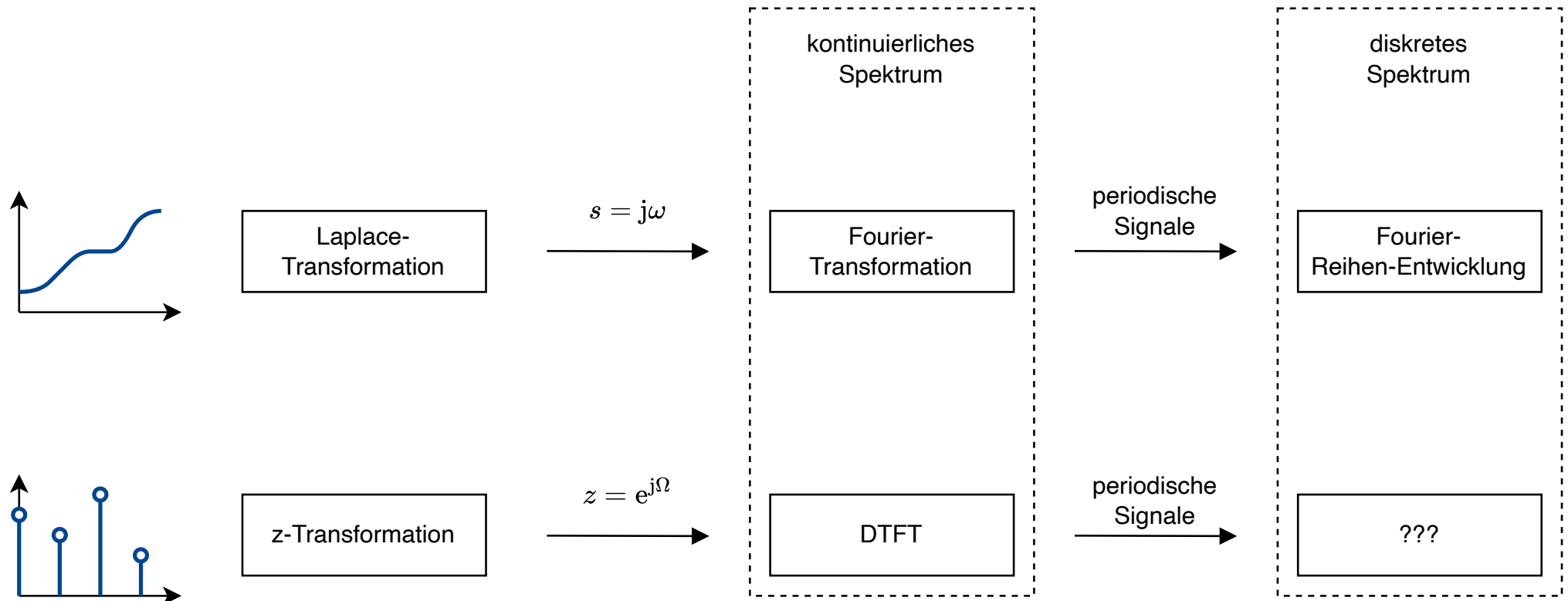
Auswertung der z-Transformierten auf dem Einheitskreis entspricht DTFT

$$H(e^{j\Omega}) = H(z = e^{j\Omega}) = \text{DTFT}\{h[k]\} = \mathcal{Z}\{h[k]\} \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$



# Diskrete Fourier-Transformation

# Vergleich der Transformationen





# Vergleich aller Varianten der Fourier-Transformation

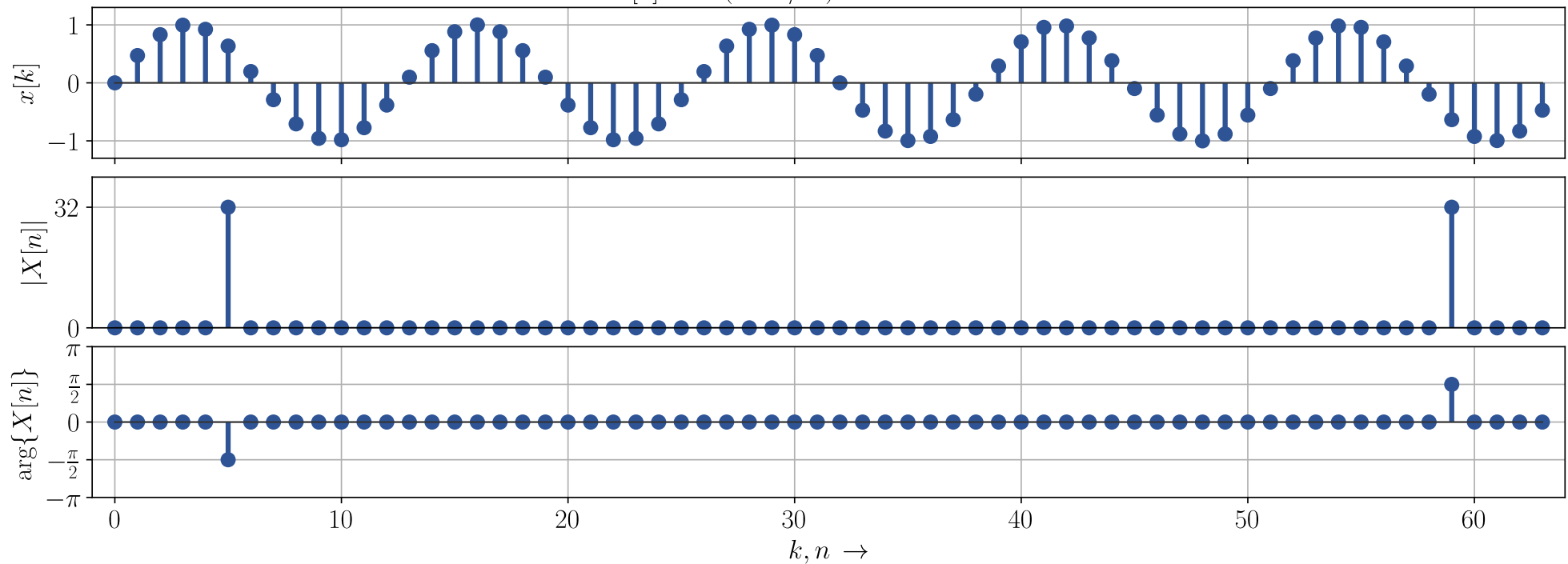
	kontinuierliche Zeitachse	diskrete Zeitachse
kontinuierliche Frequenzachse	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">                     Fourier-Transformation                 </div> $U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">                     DTFT                 </div> $U(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k] \cdot e^{-jk\Omega}$
diskrete Frequenzachse	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">                     Fourier-Reihen-Entwicklung                 </div> <p style="text-align: center;">periodisch in <math>T</math></p> $U_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) \cdot e^{-j2\pi nt/T} dt$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">                     Diskrete Fourier-Transformation (DFT)                 </div> <p style="text-align: center;">periodisch in <math>K</math></p> $U[n] = \sum_{k=0}^{K-1} u[k] \cdot e^{-j2\pi nk/K}$

## Berechnung eines diskreten Spektrums aus einer diskreten Zahlenfolge

Discrete Fourier Transform (DFT)

$$X[n] = \sum_{k=0}^{K-1} x[k] \cdot W_K^{nk} \quad \text{bzw.} \quad x[k] = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} X[n] \cdot W_K^{-nk} \quad \text{mit} \quad W_K = e^{-j\frac{2\pi}{K}}$$

$$x[k] = \sin(10\pi k/K) \quad \text{mit} \quad K = 2^6 = 64$$



## Schnelle Fourier Transformation

Komplexität zur Berechnung der DFT beträgt  $\mathcal{O}(K^2)$

Ausnutzung eines *divide-and-conquer* Ansatzes führt zur Idee der Fast-Fourier-Transform (FFT)

Reduktion der Komplexität mittels FFT auf  $\mathcal{O}(K \cdot \log(K))$

*DFT und FFT sind identisch. DFT bezeichnet den Algorithmus, wohingegen FFT die einzig sinnvolle Implementierung darstellt.*

# Referenzen

- [1] B. Girod, R. Rabenstein, A. Stenger, *Signals and Systems*, John Wiley & Sons.
- [2] R. Kories, H. Schmidt-Walter, *Taschenbuch der Elektrotechnik*, Verlag Harri Deutsch.
- [3] J.-R. Ohm, D. Lücke, *Signalübertragung*, Springer Verlag.
- [4] A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall.