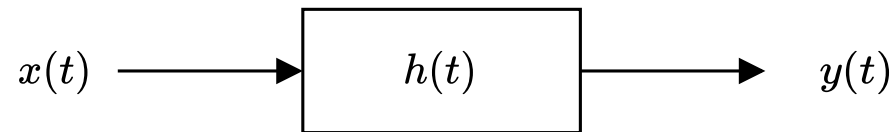


**Faltung**

## Das Faltungsintegral

Gegeben ist ein Eingangssignal  $x(t)$  und ein lineares zeitinvariantes System mit Impulsantwort  $h(t)$



Das Ausgangssignal  $y(t)$  lässt sich nun mittels der Faltung zwischen  $x(t)$  und  $h(t)$  berechnen

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

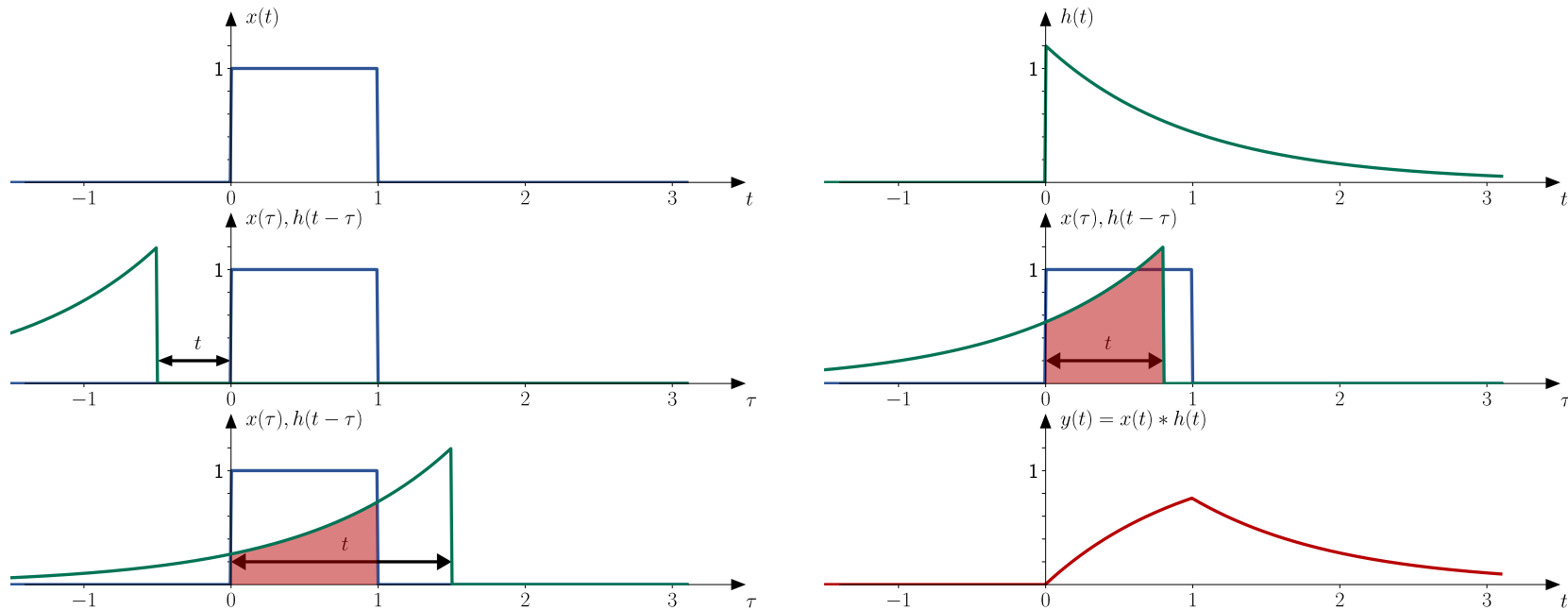
Wichtige algebraische Eigenschaften der Faltung

- Kommutativgesetz:  $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
- Assoziativgesetz:  $(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
- Assoziativgesetz bezüglich einer Konstanten:  $(c \cdot x(t)) * y(t) = c \cdot (x(t) * y(t))$
- Distributivgesetz:  $(x(t) + y(t)) * z(t) = x(t) * z(t) + y(t) * z(t)$

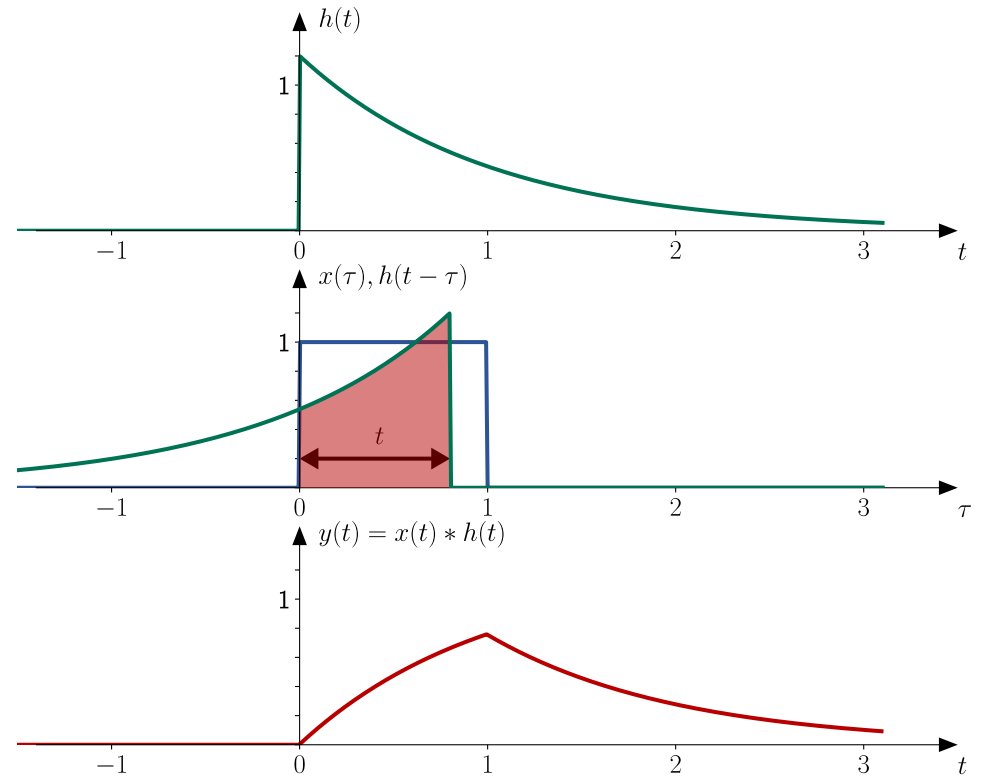
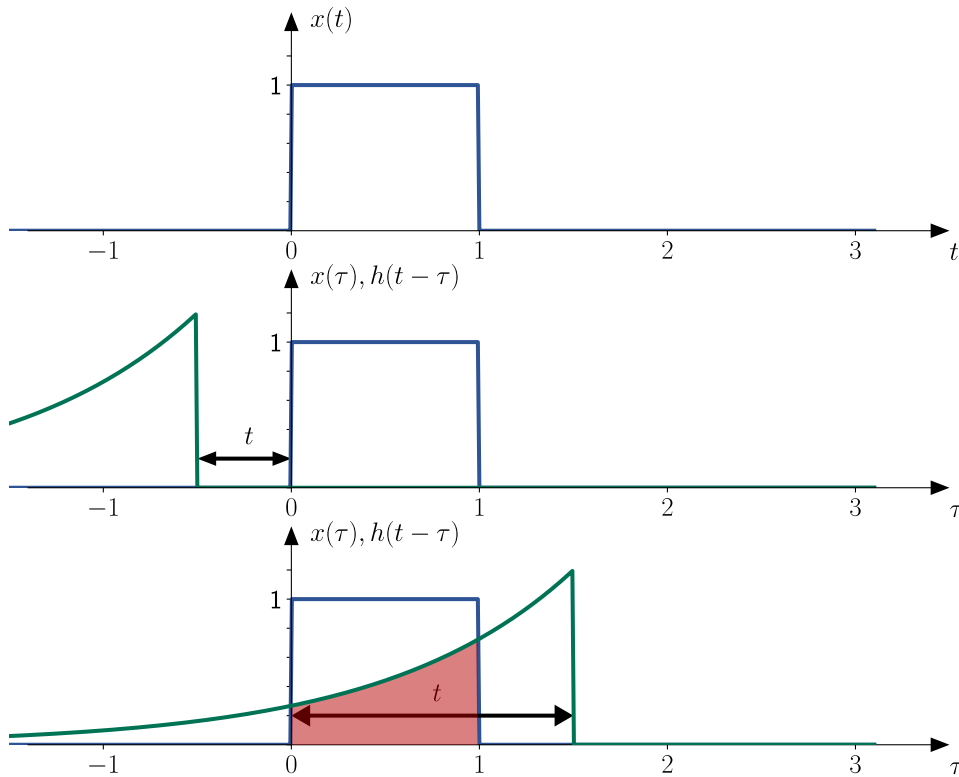
## Interpretation des Faltungsintegrals

Die Durchführung des Faltungsintegrals mittels folgendem Vorgehen auch anschaulich interpretiert werden:

1. Spiegeln einer der Zeitfunktionen an der y-Achse
2. Verschieben der gespiegelten Zeitfunktion um  $t$
3.  $y(t)$  entspricht der Fläche unter dem Produkt der beiden Zeitfunktionen

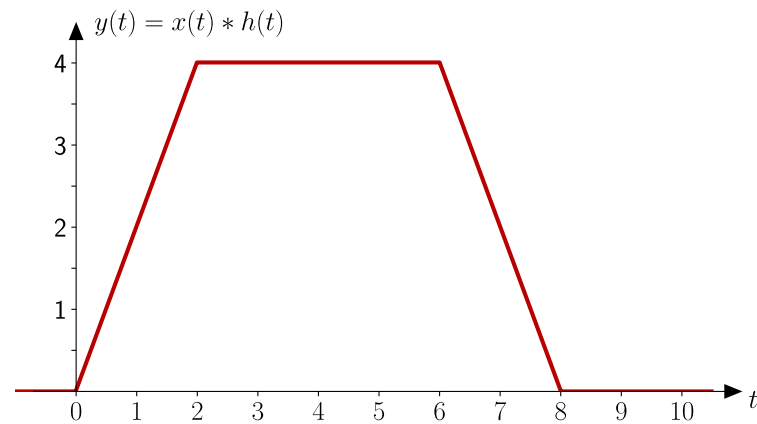
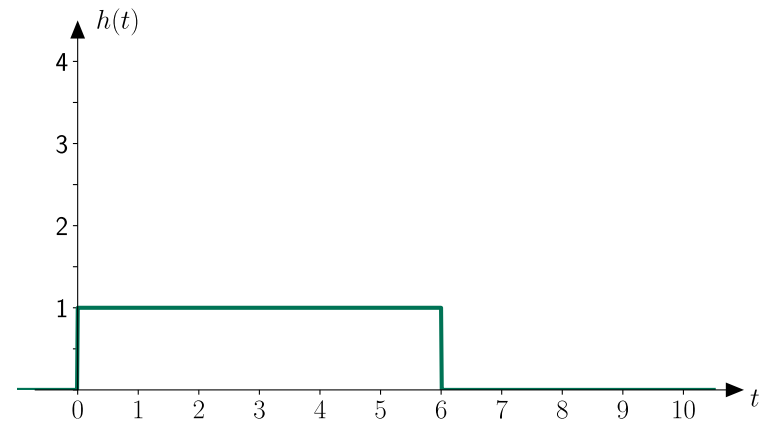
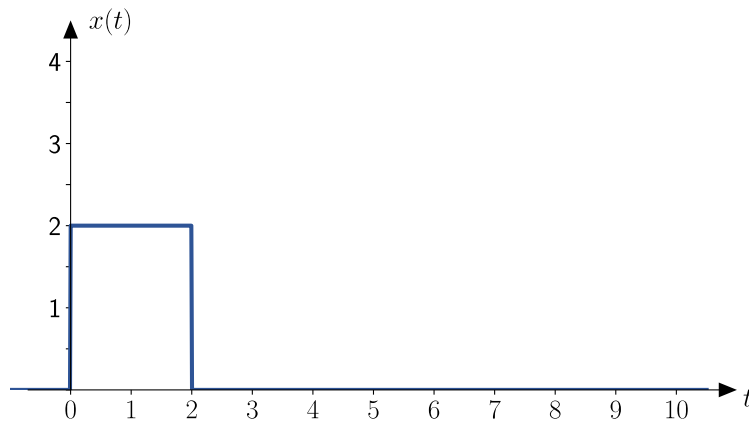


# Beispiel zur anschaulichen Durchführung des Faltungsintegrals



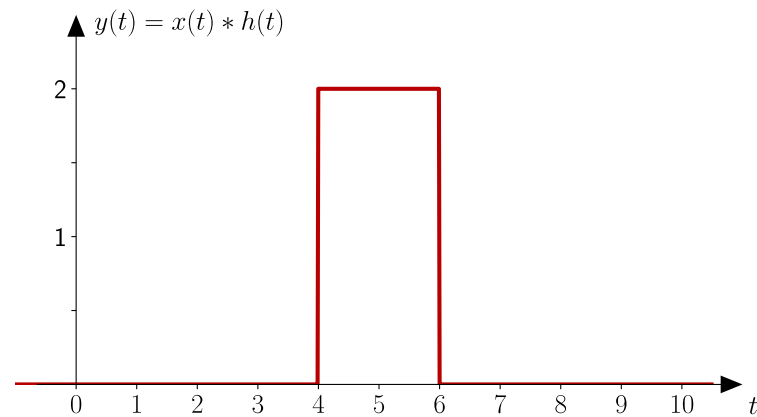
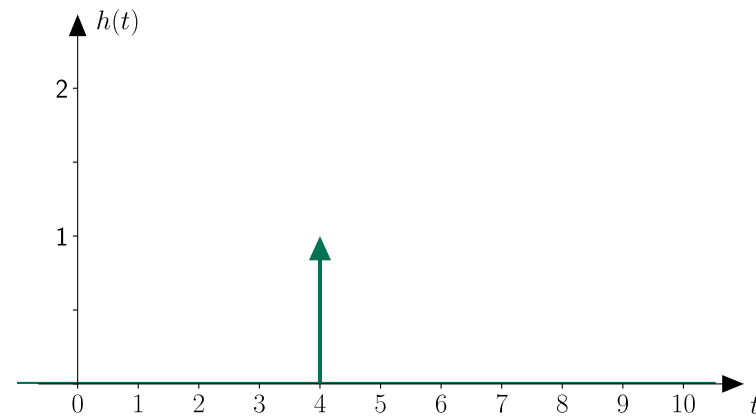
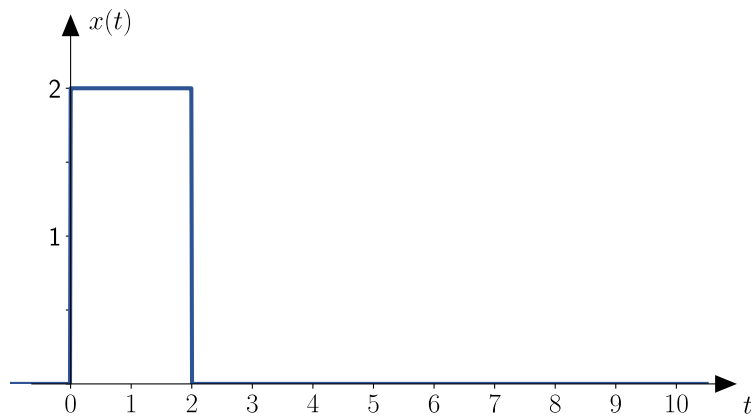
## Beispiel: Faltung zweier Rechteckimpulse

$$x(t) = 2 \cdot \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) \quad h(t) = \text{rect}\left(\frac{t-3}{6}\right) \quad y(t) = x(t) * h(t)$$



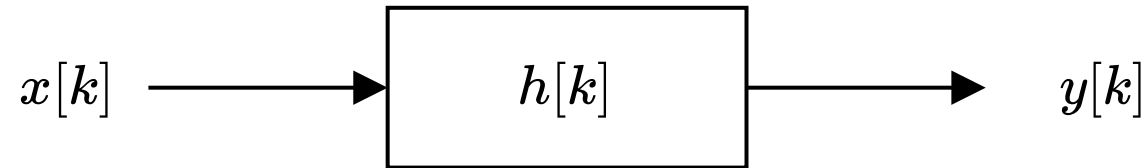
## Beispiel: Faltung eines Rechteckimpulses mit Dirac Impuls

$$x(t) = 2 \cdot \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) \quad h(t) = \delta(t-4) \quad y(t) = x(t) * h(t)$$



## Faltung von zeitdiskreten Funktionen

Gegeben ist das Eingangssignal  $x[k]$  und ein lineares zeitinvariantes System mit Impulsantwort  $h[k]$



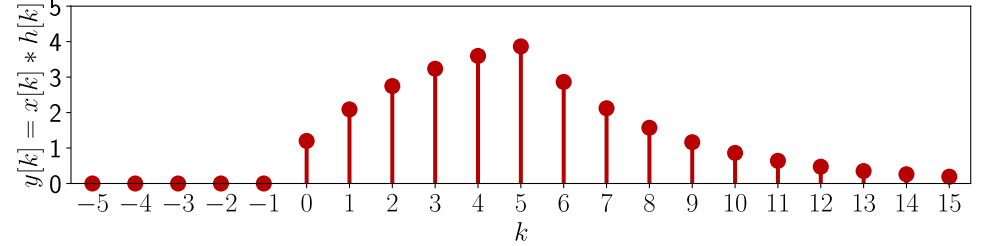
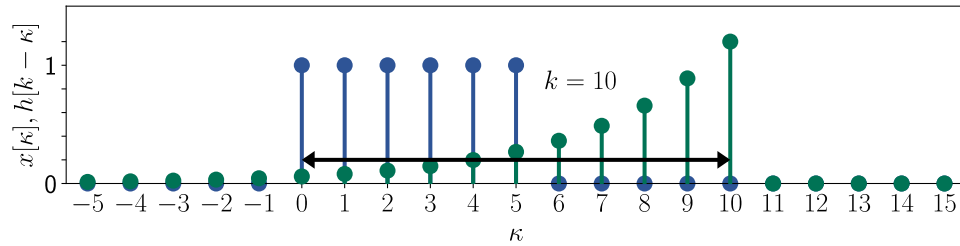
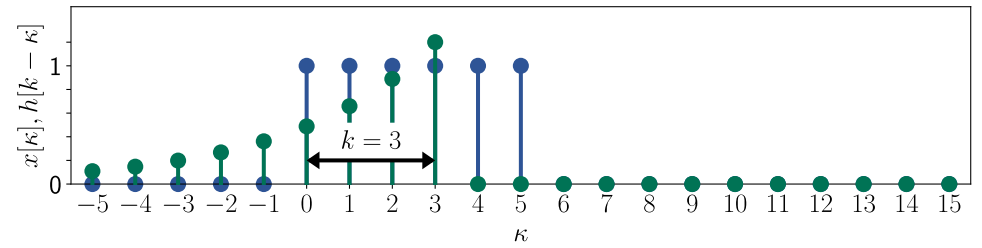
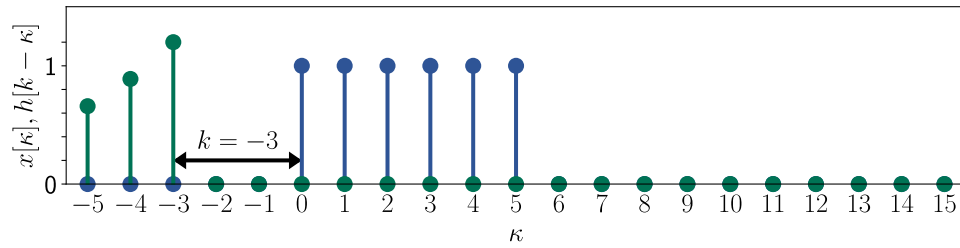
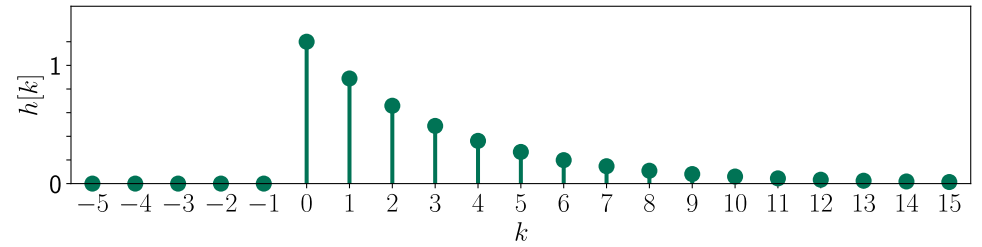
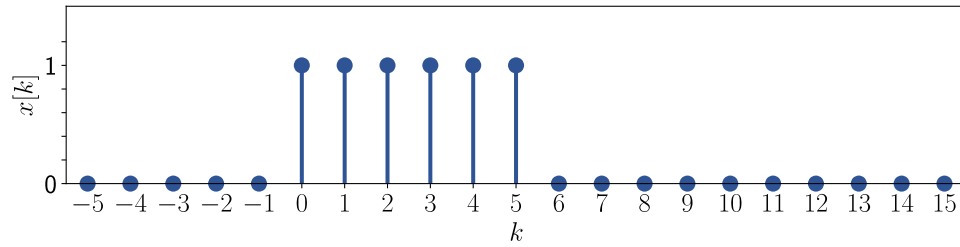
Das Ausgangssignal  $y[k]$  lässt sich nun mittels der Faltung zwischen  $x[k]$  und  $h[k]$  berechnen

$$y[k] = x[k] * h[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot h[k - \kappa]$$

Wichtige algebraische Eigenschaften der Faltung

- Kommutativgesetz
- Assoziativgesetz
- Assoziativgesetz bezüglich einer Konstanten
- Distributivgesetz

# Beispiel zur anschaulichen Durchführung der Faltungssumme





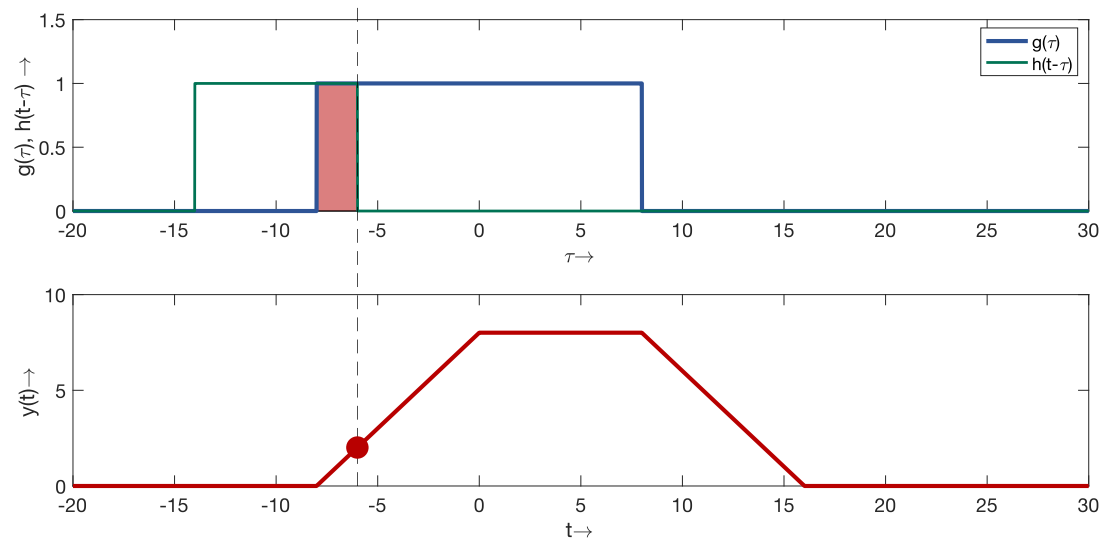
## Programmierung der Faltung in Matlab

In Matlab gibt es den Befehl `conv(x, y)` der die Faltungssumme der beiden Vektoren  $x$  und  $y$  berechnet

$$z[k] = x[k] * y[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot y[k - \kappa]$$

Beispiel zur Umsetzung der Faltung von zeit-diskreten und zeit-kontinuierlichen Signalen in Matlab:

<https://github.com/csiegl182/RandomProcesses/raw/main/matlab/convolution.mlx>



## Beispiel zur Programmierung der Faltung in Python

In Python besitzen die Pakete `numpy` oder `scipy` Methoden, um die Faltungssumme zu berechnen

- `numpy.convolve()`
- `scipy.signal.convolve()`

Die `numpy` Variante implementiert die Faltungssumme direkt (ähnlich wie in Matlab)

$$z[k] = x[k] * y[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot y[k - \kappa]$$

Die `scipy` Variante hat sehr ähnlichen Syntax aber gewisse Vorteile bei der Ausführungsgeschwindigkeit

Beispiel zur Umsetzung der Faltung von zeit-diskreten und zeit-kontinuierlichen Signalen in Python/Numpy:

<https://github.com/csiegl182/RandomProcesses/blob/main/python/convolution.ipynb>

## Referenzen

- [1] B. Girod, R. Rabenstein, A. Stenger, *Signals and Systems*, John Wiley & Sons.