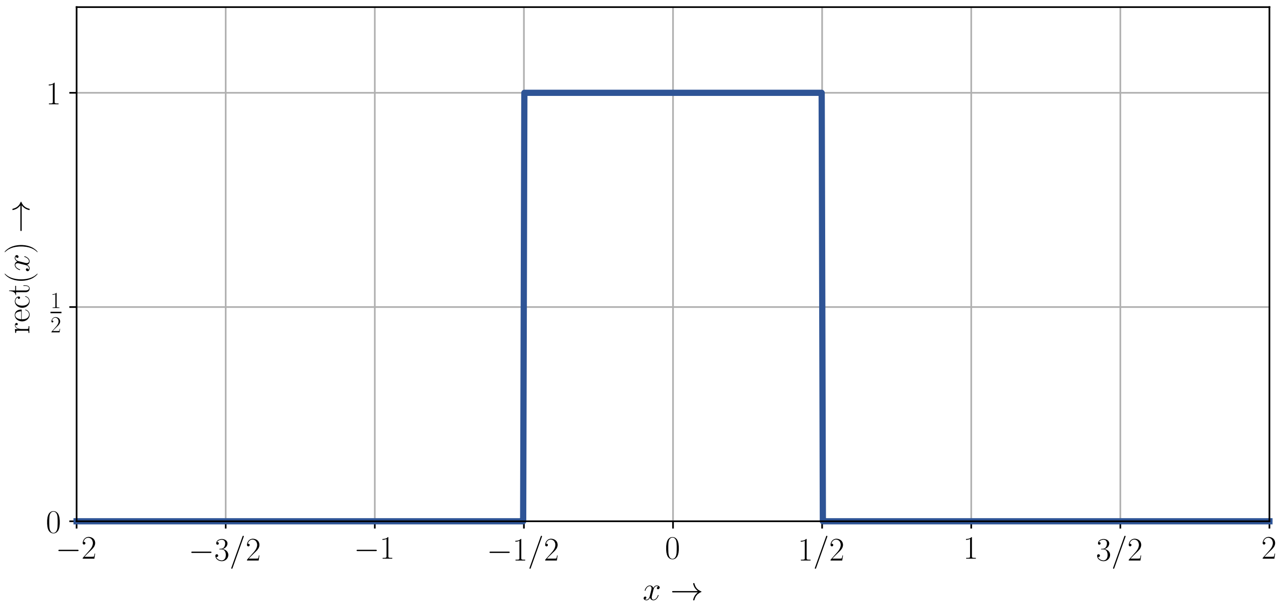
Dirac Impuls

Der Rechteckimpuls

In der Signalverarbeitung sind Rechteckimpulse häufig von Interesse

Mathematische Beschreibung eines Rechteckimpulses

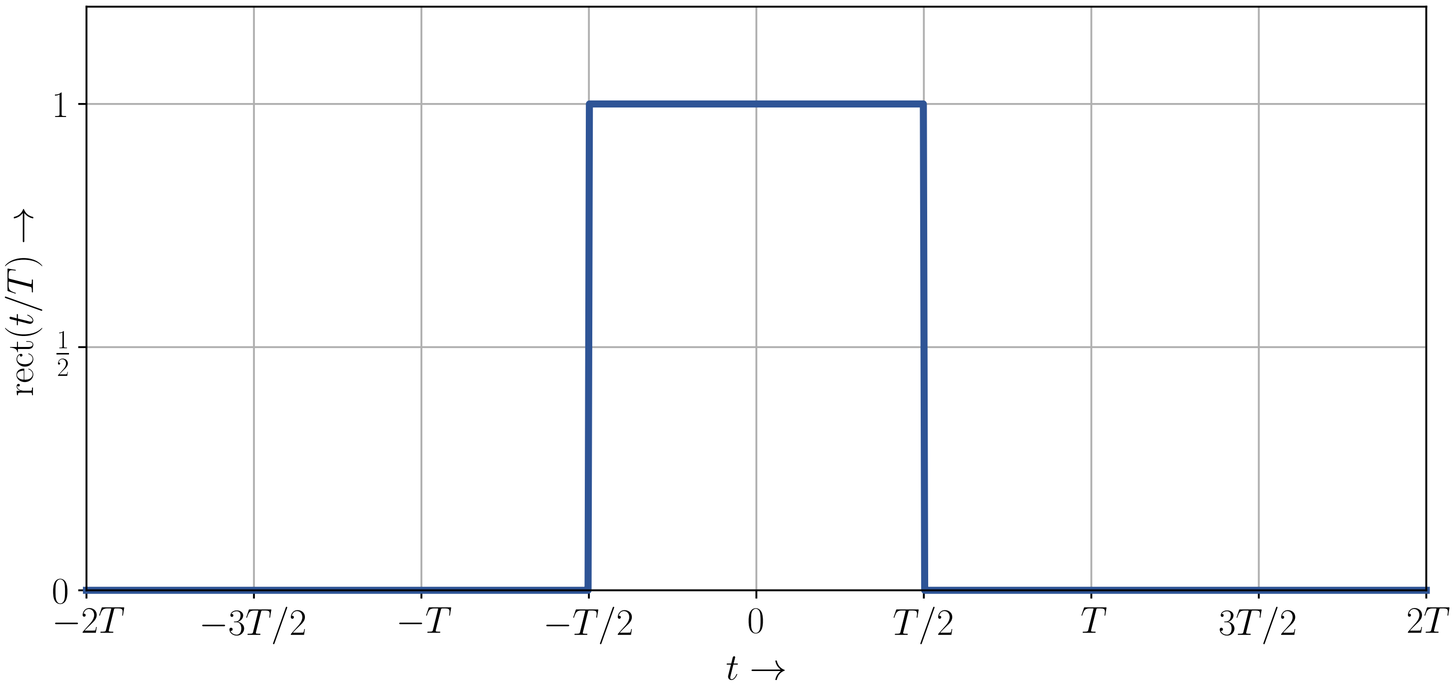
$$f(x) = \mathrm{rect}\,(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Der Rechteckimpuls als Zeitfunktion

Beschreibung eines Rechteckimpulses als Zeitfunktion mit einer beliebigen Breite T

$$f(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Rechteckimpuls zur Systemanalyse

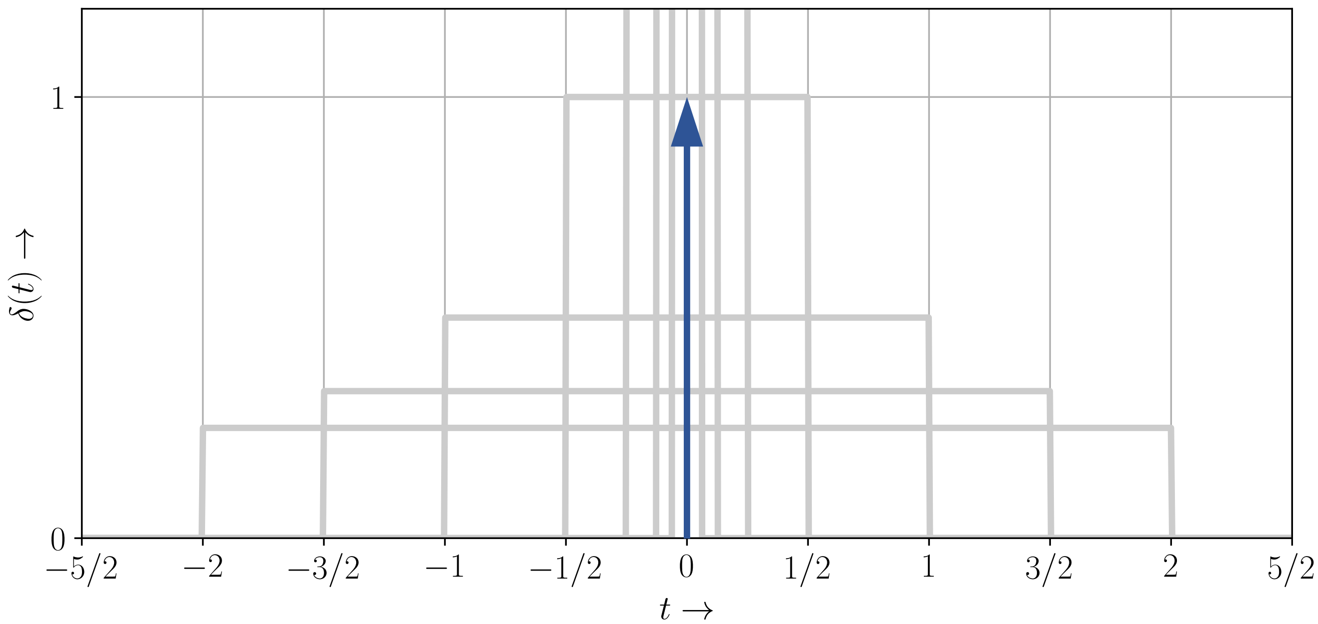
Frage: Wie hoch und wie breit ist Rechteckimpuls zu wählen?

Idee: Definition der Dirac-Funktion $\delta(t)$ als

1. unendliche hohe aber
2. unendlich schmale

Rechteckfunktion

$$\delta(t) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



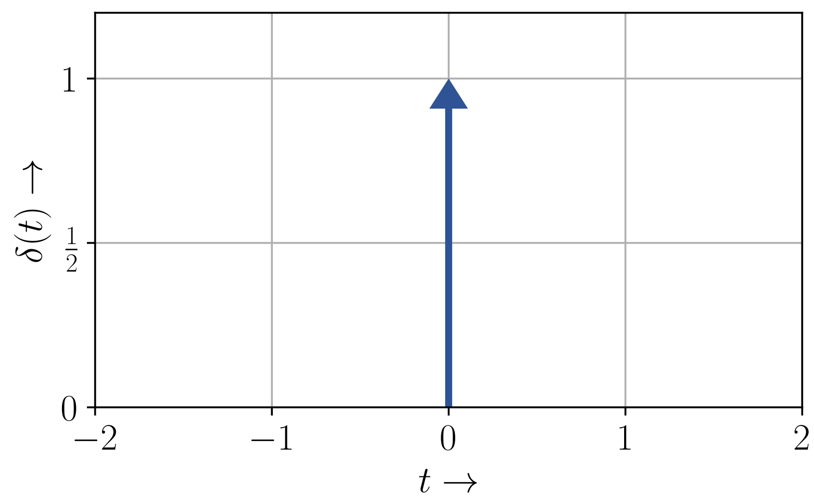
Eigenschaften der Dirac Funkion

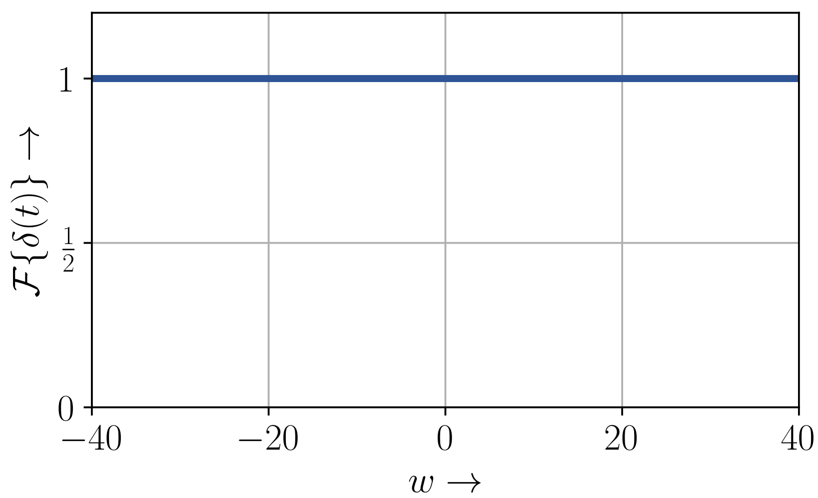
Obwohl Dirac-Funktion unendlich schmal und unendlich hoch ist Integral über diese Funktion endlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot T = 1$$

Damit konvergiert auch das Fourier Integral der Dirac Funktion zu einer Konstanten

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

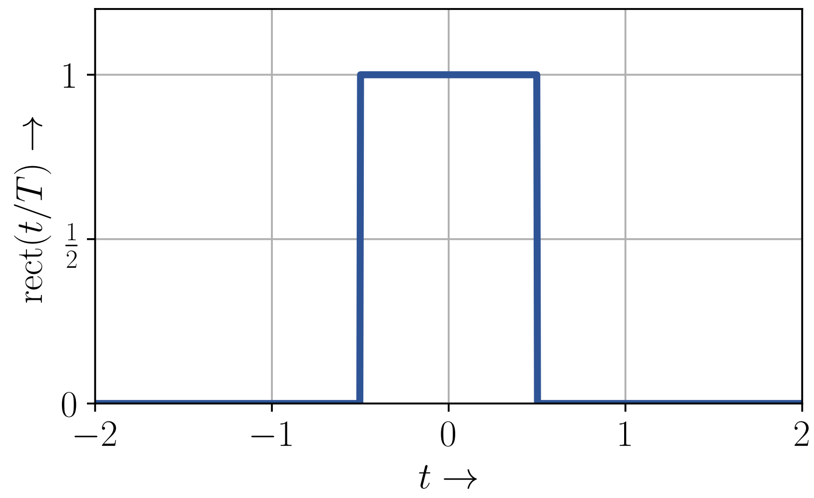


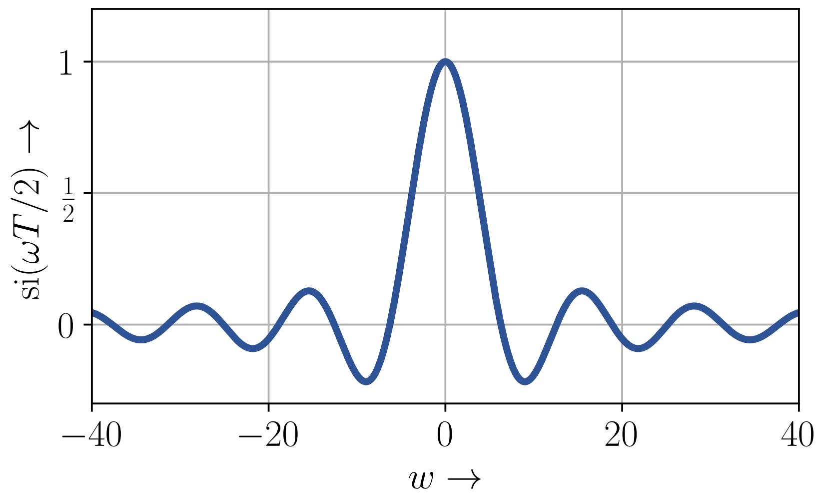


Eigenschaften des Rechteckimpulses I

Fourier Transformation des Rechteckimpulses ergibt si-Funktion

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = \mathrm{si}(\omega T/2)$$

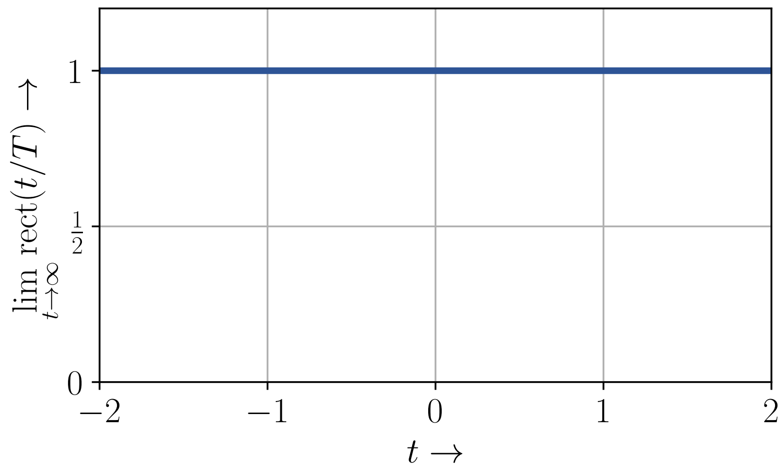


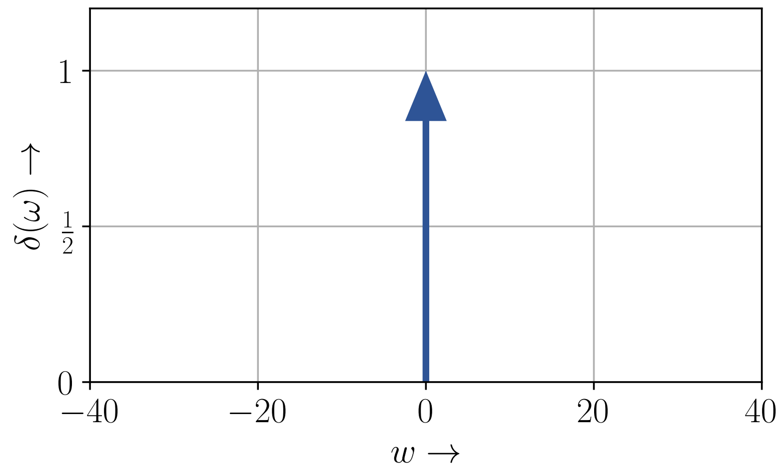


Eigenschaften des Rechteckimpulses II

Für $T \to \infty$ strebt Rechteckfunktion gegen eine Konstante und si-Funktion gegen einen Dirac-Impuls

$$\mathcal{F}\left\{\lim_{T\to\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \lim_{T\to\infty} \mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \lim_{T\to\infty} \mathrm{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \delta(w)$$





Referenzen

[1] B. Girod, R. Rabenstein, A. Stenger, *Signals and Systems,* John Wiley & Sons.