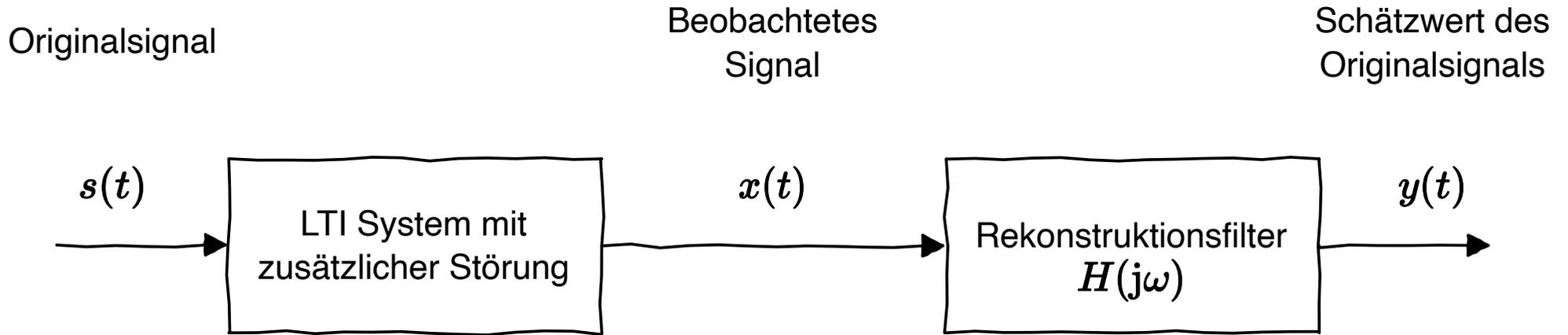


Signalschätzung

Wiener Filter

Schätzung eines verzerrten und gestörten Signals



Anwendungsgebiete:

- Messtechnik: Verzerrung und Rauschen sollen aus dem gemessenen Signal entfernt werden.
- Signalübertragung: Ursprüngliches Sendesignal ist aus Empfangssignal zu schätzen.
- Signalspeicherung: Zur Speicherung eines Signals muss dieses auf Medium angepasst; aus dem gespeicherten Signal muss ursprüngliches Signal rekonstruiert werden.

Rekonstruktionsfilter zur Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers

Aufgabe: Finden eines geeigneten Rekonstruktionsfilters

Optimierungskriterium: Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers (Fehlerleistung)

Rekonstruktionsfehler: $e(t) = y(t) - s(t)$

$$\mathbf{E}\{|e(t)|^2\} = \mathbf{E}\{|y(t) - s(t)|^2\} \longrightarrow \min$$

Fehlerleistung ergibt sich aus Integral über dem Leistungsdichtespektrum

$$\mathbf{E}\{|e(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ee}(\omega) d\omega$$

Somit wird Fehlerleistung minimiert wenn Leistungsdichtespektrum des Fehlers minimal ist

Minimierung des Leistungsdichtespektrums des Fehlers I

Für das Leistungsdichtespektrum des Fehlers ergibt sich

$$\Phi_{ee} = \Phi_{yy} - \Phi_{ys} - \Phi_{sy} + \Phi_{ss}$$

(Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω wird der Einfachheit halber weggelassen)

Weiter ergibt sich

$$\Phi_{ee} = \Phi_{xx}|H|^2 - \Phi_{xs}H - \Phi_{sx}H^* + \Phi_{ss}$$

Das LTI-System H , das Φ_{ee} minimiert lässt sich durch Differntation mit H ermitteln.

Da H im Allgemeinen komplex ist, d.h. $H = |H|e^{j\phi}$

$$\Phi_{ee} = \Phi_{xx}|H|^2 - \Phi_{xs}|H|e^{j\phi} - \Phi_{sx}|H|e^{-j\phi} + \Phi_{ss}$$

Minimierung des Leistungsdichtespektrums des Fehlers II

Getrennte Betrachtung der Differentiation nach Betrag $|H|$ und Phase ϕ

$$\frac{d\Phi_{ee}}{d|H|} = 2|H|\Phi_{xx} - \Phi_{xs}e^{j\phi} - \Phi_{sx}e^{-j\phi} = 2|H|\Phi_{xx} - 2\operatorname{Re}\{\Phi_{xs}e^{j\phi}\} = 0$$

$$\Rightarrow |H| = \frac{\operatorname{Re}\{\Phi_{xs}e^{j\phi}\}}{\Phi_{xx}}$$

$$\frac{d\Phi_{ee}}{d\phi} = -j|H|\Phi_{xs}e^{j\phi} + j|H|\Phi_{sx}e^{-j\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{xs}e^{j\phi} = \Phi_{xs}^*e^{-j\phi}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\{\Phi_{xs}e^{j\phi}\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = -\arg\{\Phi_{xs}\}$$

Damit ergibt sich für den Betrag des Rekonstruktionsfilters

$$|H| = \frac{\operatorname{Re}\{\Phi_{xs}e^{j\phi}\}}{\Phi_{xx}} = \frac{\operatorname{Re}\{|\Phi_{xs}|e^{j(\arg\{\Phi_{xs}\}+\phi)}\}}{\Phi_{xx}} = \frac{|\Phi_{xs}|}{\Phi_{xx}}$$

Wiener Filter

Aus der Minimierung des Leistungsdichtespektrums ergibt sich eine allgemeine Beschreibung des Rekonstruktionsfilters

$$H = |H| \cdot e^{j\phi} = \frac{|\Phi_{xs}|}{\Phi_{xx}} \cdot e^{-j \arg\{\Phi_{xs}\}} = \frac{\Phi_{xs}^*}{\Phi_{xx}}$$

Das resultierende Rekonstruktionsfilter wird auch als *Wiener Filter* bezeichnet

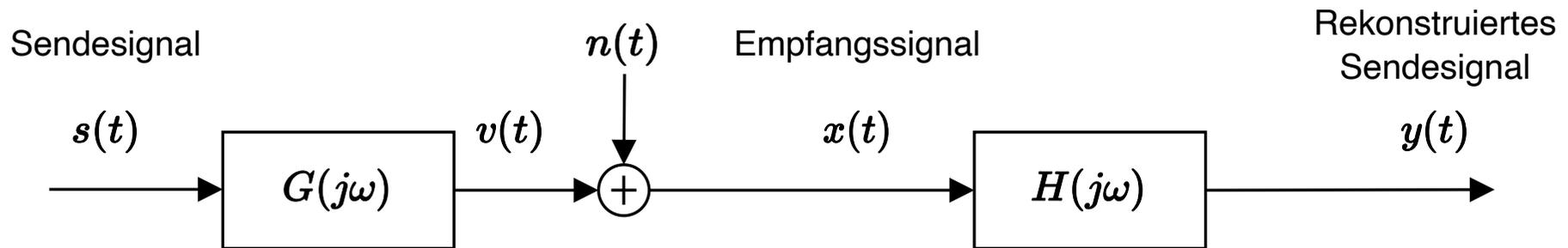
$$H(j\omega) = \frac{\Phi_{xs}^*(\omega)}{\Phi_{xx}(\omega)} = \frac{\Phi_{sx}(\omega)}{\Phi_{xx}(\omega)}$$

Als zeitdiskrete Implementierung ergibt sich für das Wiener Filter

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\Phi_{xs}^*(\Omega)}{\Phi_{xx}(\Omega)} = \frac{\Phi_{sx}(\Omega)}{\Phi_{xx}(\Omega)}$$

Beispiel: Signalübertragung über einen gestörten Kanal

Übertragung des Signals $s(t)$ über den Kanal $G(j\omega)$ mit additivem weißem Rauschen $n(t)$ (unkorreliert zu $s(t)$).



Da $n(t)$ von $s(t)$ und somit auch von $v(t)$ unkorreliert ist folgt

$$\Phi_{xx}(\omega) = \Phi_{vv}(\omega) + \Phi_{nn}(\omega) = \Phi_{ss}(\omega) \cdot |G(j\omega)|^2 + \Phi_{nn}(\omega)$$

Für das Kreuzleistungsdichtespektrum zwischen Sende- und Empfangssignal ergibt sich

$$\Phi_{sx}(\omega) \cdot G(j\omega) = \Phi_{vx}(\omega) = \Phi_{vv}(\omega) = \Phi_{ss}(\omega) \cdot G(j\omega) \cdot G^*(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{sx}(\omega) = \Phi_{ss}(\omega) \cdot G^*(j\omega)$$

Damit ergibt sich der Entwurf des Wiener-Filters zu

$$H(j\omega) = \frac{\Phi_{sx}(\omega)}{\Phi_{xx}(\omega)} = \frac{\Phi_{ss}(\omega) \cdot G^*(j\omega)}{\Phi_{ss}(\omega) |G(j\omega)|^2 + \Phi_{nn}(\omega)}$$

Einschränkungen bei der Anwendung des Wiener-Filters

Probleme bei der Anwendung des Wiener-Filters

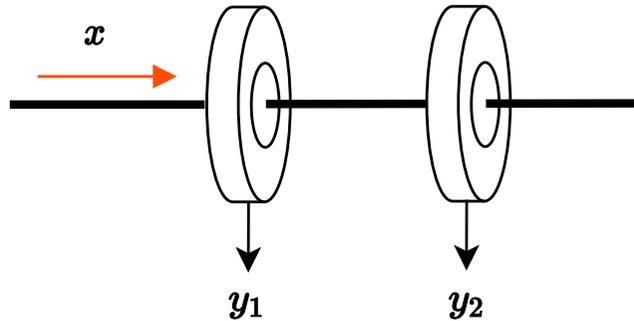
- Optimale Filtereigenschaften nur bei unendlich langer Beobachtungsdauer
- Filterausgang erst nach Abklingen aller Einschwingvorgänge optimal
- Eingangsprozesse müssen stationär sein

Verallgemeinerung zum Kalman-Filter

- Lösung des Optimalfilterproblems für endliche Beobachtungsdauern
- Anwendung auch für zeitvariante Systeme
- *Hier:* Kalman-Filter für zeitdiskrete Systeme (größte Bedeutung für praktische Implementierungen)

Beispiel: Redundante Strommessung I

Betrachtet wird die redundante Messung eines Stromes x durch zwei verrauschte Messwandler



Die verrauschten Messsignale ergeben sich zu

$$y_1 = x + n_1$$

$$y_2 = x + n_2$$

Das additive Rauschen ist mittelwertfrei und unkorreliert (und damit orthogonal).

$$\mathbf{E}\{n_1\} = \mathbf{E}\{n_2\} = 0 \quad \mathbf{E}\{n_1^2\} = \sigma_{n_1}^2 \quad \mathbf{E}\{n_2^2\} = \sigma_{n_2}^2 \quad \mathbf{E}\{n_1 n_2\} = 0$$

Gesucht: Schätzwert des Stromes \hat{x}

Beispiel: Redundante Strommessung II

Optimierung des Schätzwertes zur Minimierung des mittleren quadratischen Schätzfehlers

Schätzfehler: $e = \hat{x} - x$

Optimierungskriterium:

$$\mathbf{E}\{|e|^2\} \rightarrow \min$$

Ansatz zur Schätzung:

$$\hat{x} = k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2$$

Bedingung: *erwartungstreue* Schätzung, d.h. $\mathbf{E}\{\hat{x}\} = \mathbf{E}\{x\}$

$$\mathbf{E}\{\hat{x}\} = \mathbf{E}\{k_1 \cdot (x + n_1) + k_2 \cdot (x + n_2)\} = (k_1 + k_2) \cdot \mathbf{E}\{x\} \stackrel{!}{=} \mathbf{E}\{x\}$$

Damit gilt für die Skalierungsfaktoren:

$$k_2 = 1 - k_1$$

Beispiel: Redundante Strommessung III

Damit ergibt sich für den mittleren quadratischen Fehler

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{|e|^2\} &= \mathbb{E}\{(\hat{x} - x)^2\} = \mathbb{E}\{(k_1 \cdot y_1 + (1 - k_1) \cdot y_2 - x)^2\} = \\ &= \mathbb{E}\left\{\left(k_1 \cdot (x + n_1) + (1 - k_1) \cdot (x + n_2) - x\right)^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(k_1 \cdot n_1 + (1 - k_1) \cdot n_2\right)^2\right\} = \\ &= \mathbb{E}\{k_1^2 \cdot n_1^2 + (1 - k_1)^2 \cdot n_2^2 - 2k_1(1 - k_1)n_1n_2\} = k_1^2\sigma_{n_1}^2 + (1 - k_1)^2\sigma_{n_2}^2 \end{aligned}$$

Optimierung des mittleren quadratischen Fehler über den Faktor k_1

$$\frac{\partial}{\partial k_1} \mathbb{E}\{|e|^2\} = 2k_1\sigma_{n_1}^2 + 2(1 - k_1) \cdot (-1) \cdot \sigma_{n_2}^2 = 2k_1(\sigma_{n_1}^2 + \sigma_{n_2}^2) - 2\sigma_{n_2}^2 \stackrel{!}{=} 0$$

Damit ergibt sich für die Skalierungsfaktoren

$$k_1 = \frac{\sigma_{n_2}^2}{\sigma_{n_1}^2 + \sigma_{n_2}^2} \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{\sigma_{n_1}^2}{\sigma_{n_1}^2 + \sigma_{n_2}^2}$$

Kalman Filter

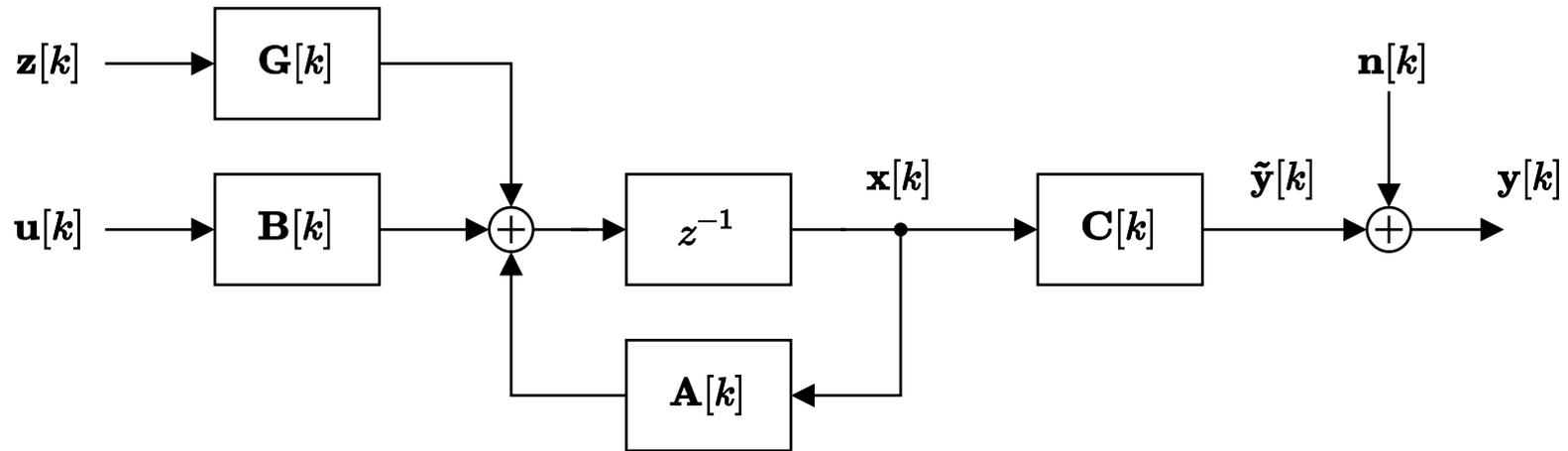
Anwendung des Kalman-Filters

Einsatzgebiete des Kalman-Filters

- Signalfilterung zur Unterdrückung von Messrauschen (z.B. im GPS-Empfänger zur Positionsbestimmung)
- Zustandsschätzung zur Anwendung in der Regelungstechnik
- Signal-Prädiktion

Systemmodell I

Zustandsraummodell des betrachteten zeitdiskreten und zeitvarianten Systems



- $\mathbf{u}[k]$: Vektor der beobachtbaren Eingangssignale
- $\mathbf{z}[k]$: Vektor der nicht-beobachtbaren Eingangssignale (Systemrauschen)
- $\mathbf{n}[k]$: additives Messrauschen
- $\mathbf{y}[k]$: Vektor des verrauschten Ausgangssignals
- $\mathbf{x}[k]$: Zustandsvektor

Systemmodell II

Zustandsdifferenzgleichung

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}[k] \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}[k] \cdot \mathbf{u}[k] + \mathbf{G}[k] \cdot \mathbf{z}[k]$$

Rauschprozesse (System- und Messrauschen) werden als Zufallsprozesse modelliert

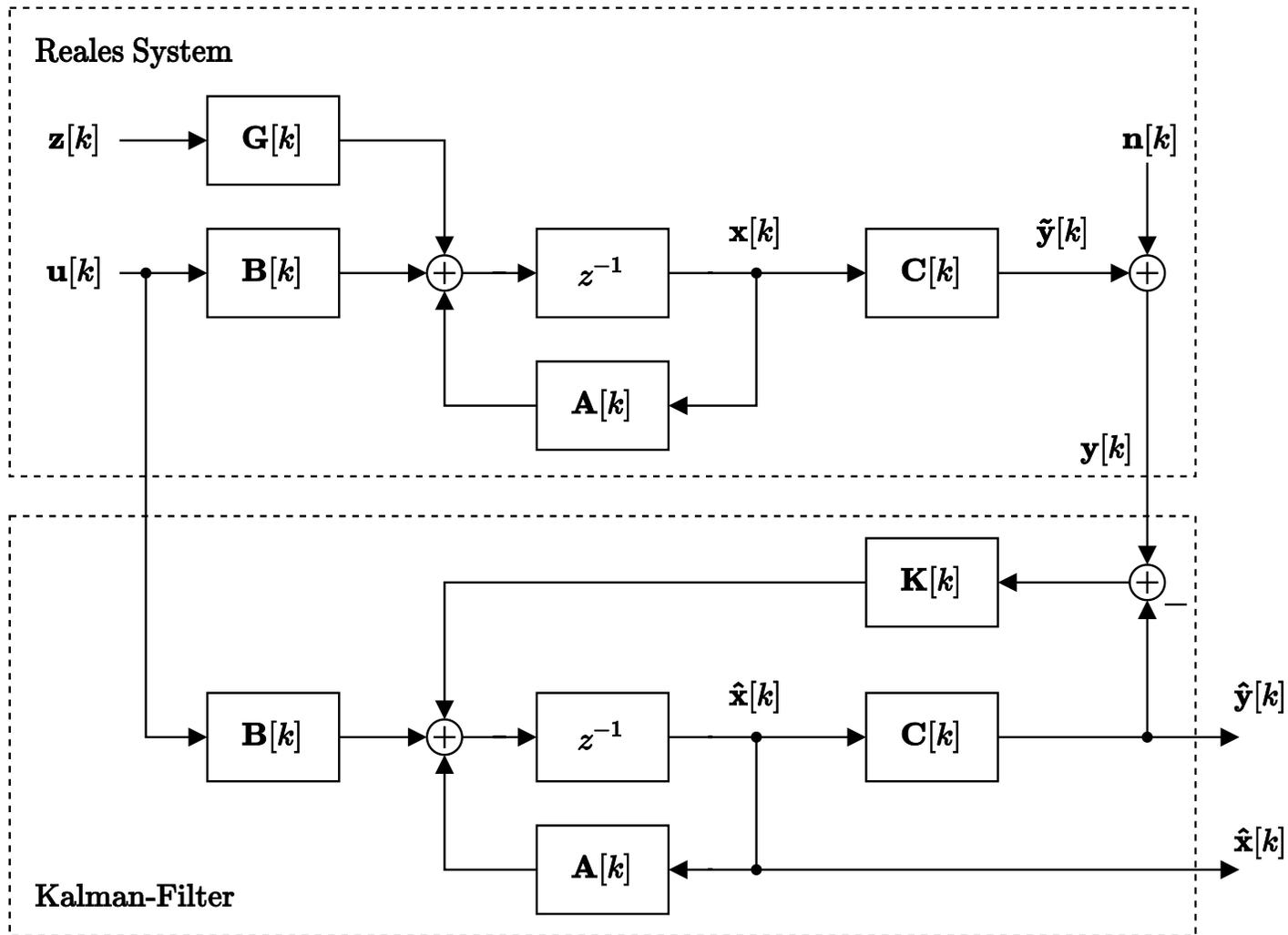
$$\varphi_{zz}[\kappa, k] = \delta[\kappa] * \mathbf{Z}_0[k]$$

$$\varphi_{nn}[\kappa, k] = \delta[\kappa] * \mathbf{N}_0[k]$$

Beide Rauschprozesse sind

- mittelwertfrei
- weiß (zeitlich versetzte Samples sind paarweise unkorreliert)
- im Allgemeinen instationär (Autokorrelationsmatrix ist zeitabhängig)

Verwendung eines Parallelmodells als Beobachter I



Verwendung eines Parallelmodells als Beobachter II

Verwendete Signale im Kalman-Filter

- $\mathbf{u}[k]$: Vektor der beobachtbaren Eingangssignale
- $\mathbf{y}[k]$: gemessenes Ausgangssignal des Systems
- $\hat{\mathbf{x}}[k]$: geschätzte Zustände
- $\hat{\mathbf{y}}[k]$: geschätztes Ausgangssignal des Systems

Schätzfehler der Zustände

$$\mathbf{e}[k] = \hat{\mathbf{x}}[k] - \mathbf{x}[k]$$

Ziel des Filterentwurfes:

Bestimmung der Korrekturmatrix \mathbf{K} (*Kalman-Gain*) damit mittlere quadratische Schätzfehler \mathbf{e} minimiert wird

$$\mathbf{E}\{|\mathbf{e}[k]|^2\} \rightarrow \min$$

Berechnung des Kalman-Gains I

Beschreibung des Fehlers mit Hilfe der Fehlerkorrelationsmatrix

$$\mathbf{F}[k] = \mathbf{E}\{\mathbf{e}[k]\mathbf{e}^T[k]\}$$

- Autokorrelationsterme (mittlere quadratische Fehler) befinden sich auf der Hauptdiagonalen
- Kreuzkorrelationsterme befinden sich auf Nebendiagonalen

Zur Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers muss Summe der Hauptdiagonalelemente von $\mathbf{F}[k]$ minimiert werden

$$\text{trace}\{\mathbf{F}[k]\} \rightarrow \min$$

Da sich Korrekturmatrix $\mathbf{K}[k]$ erst im Abtastpunkt $k + 1$ auf Schätzfehler auswirkt muss folgende Bedingung gelten

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}[k]} \text{trace}\{\mathbf{F}[k + 1]\} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

Berechnung des Kalman-Gains II

Aus Gründen der Einfachheit wird hier die mögliche Zeitvarianz des Systems (Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{G}) nicht weiter berücksichtigt, was zu keinerlei Einschränkungen der Ergebnisse führt.

Der Vektor des Schätzfehlers der Zustände ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \mathbf{e}[k+1] &= \hat{\mathbf{x}}[k+1] - \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] + \mathbf{K}[k](\mathbf{y}[k] - \hat{\mathbf{y}}[k]) - \mathbf{A}\mathbf{x}[k] - \mathbf{B}\mathbf{u}[k] - \mathbf{G}\mathbf{z}[k] = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{e}[k] + \mathbf{K}[k](\mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{n}[k] - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}[k]) - \mathbf{G}\mathbf{z}[k] = \mathbf{A}\mathbf{e}[k] - \mathbf{K}[k]\mathbf{C}\mathbf{e}[k] + \mathbf{K}[k]\mathbf{n}[k] - \mathbf{G}\mathbf{z}[k] = \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}[k]\mathbf{C})\mathbf{e}[k] + \mathbf{K}[k]\mathbf{n}[k] - \mathbf{G}\mathbf{z}[k] \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Fehlerkorrelationsmatrix ($\mathbf{e}[k]$, $\mathbf{n}[k]$ und $\mathbf{z}[k]$ paarweise orthogonal)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[k+1] &= \mathbf{E}\{\mathbf{e}[k+1] \cdot \mathbf{e}^T[k+1]\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{\left((\mathbf{A} - \mathbf{K}[k]\mathbf{C})\mathbf{e}[k] + \mathbf{K}[k]\mathbf{n}[k] - \mathbf{G}\mathbf{z}[k]\right) \cdot \left(\mathbf{e}^T[k](\mathbf{A} - \mathbf{K}[k]\mathbf{C})^T + \mathbf{n}^T[k]\mathbf{K}^T[k] - \mathbf{z}^T[k]\mathbf{G}^T\right)\right\} = \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}[k]\mathbf{C})\mathbf{F}[k](\mathbf{A} - \mathbf{K}[k]\mathbf{C})^T + \mathbf{K}[k]\mathbf{N}_0\mathbf{K}^T[k] + \mathbf{G}\mathbf{Z}_0\mathbf{G}^T = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{F}[k]\mathbf{A}^T - \mathbf{K}[k]\mathbf{C}\mathbf{F}[k]\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T\mathbf{K}^T[k] + \mathbf{K}[k]\mathbf{C}\mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T\mathbf{K}^T[k] + \mathbf{K}[k]\mathbf{N}_0\mathbf{K}^T[k] + \mathbf{G}\mathbf{Z}_0\mathbf{G}^T \end{aligned}$$

Berechnung des Kalman-Gains III

Für allgemeine Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{X} gilt

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{trace}\{\mathbf{X}\mathbf{A}\} = \mathbf{A}^T \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{trace}\{\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T\} = \mathbf{X}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$$

Damit lässt sich die Optimierungsbedingung auswerten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}[k]} \text{trace}\{\mathbf{F}[k+1]\} &= \\ &= \mathbf{0} - \mathbf{A}\mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T - \mathbf{A}\mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T + \mathbf{K}[k](\mathbf{C}\mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T + \mathbf{C}\mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T) + \mathbf{K}[k](\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}_0^T) + \mathbf{0} = \\ &= -2\mathbf{A}\mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T + 2\mathbf{K}[k]\mathbf{C}\mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T + 2\mathbf{K}[k]\mathbf{N}_0 \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \end{aligned}$$

Aufgelöst nach dem optimalen Korrektur-Faktor ergibt sich

$$\mathbf{K}[k] = \mathbf{A}\mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{R}^{-1}[k] \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}[k] = \mathbf{N}_0 + \mathbf{C}\mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T$$

Die Fehlerkorrelationsmatrix des nächsten Abtastschrittes ergibt sich nun zu

$$\mathbf{F}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{F}[k]\mathbf{A}^T - \mathbf{K}[k]\mathbf{R}\mathbf{K}^T[k] + \mathbf{G}\mathbf{Z}_0\mathbf{G}^T$$

Implementierung des Kalman-Filters (ohne Innovationsterm)

1. Messung des Ausgangssignals $\mathbf{y}[k]$ und Berechnung des geschätzten Ausgangssignals $\hat{\mathbf{y}}[k] = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}[k]$
2. Berechnung der Korrelationsmatrix und des Kalman-Gains

$$\mathbf{R}[k] = \mathbf{N}_0[k] + \mathbf{C}\mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{K}[k] = \mathbf{A}\mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}[k]$$

3. Update des Schätzwertes der Zustände für den nächsten Zeitschritt

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1] = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] + \mathbf{K}[k](\mathbf{y}[k] - \hat{\mathbf{y}}[k])$$

4. Update der Fehlerkorrelationsmatrix im nächsten Zeitschritt

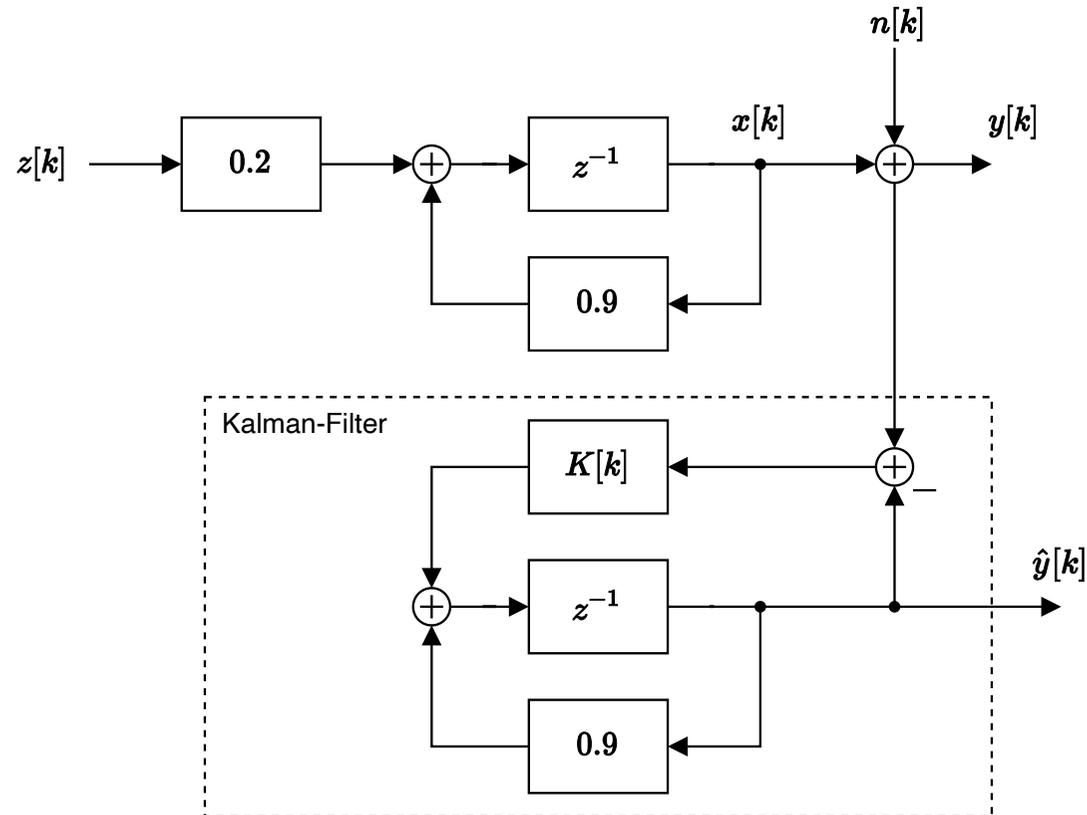
$$\mathbf{F}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{F}[k]\mathbf{A}^T - \mathbf{K}[k]\mathbf{R}\mathbf{K}^T[k] + \mathbf{G}\mathbf{Z}_0\mathbf{G}^T$$

Anfangszustand wird üblicherweise zu Null gesetzt, d.h. $\mathbf{F}[0] = \mathbf{0}$ (Einschwingvorgang)

Beispiel: Zeitdiskretes Kalman-Filter 1. Ordnung (ohne Innovationsterm) I

Gegeben ist folgendes System mit $\varphi_{zz}[\kappa] = 2\delta[\kappa]$ und $\varphi_{nn} = \delta[\kappa]$.

Erweiterung um Kalman-Filter (ohne Innovationsterm)



Beispiel: Zeitdiskretes Kalman-Filter 1. Ordnung (ohne Innovationsterm) II

Wie berechnet sich der Kalman-Gain in einem Abtastschritt

$$r[k] = N_0 + 1 \cdot f[k] \cdot 1 = 1 + f[k]$$

$$K[k] = 0.9 \cdot f[k] \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + f[k]} = \frac{0.9 \cdot f[k]}{1 + f[k]}$$

$$f[k + 1] = 0.9 \cdot f[k] \cdot 0.9 - K[k] \cdot r[k] \cdot K[k] + 0.2 \cdot 2 \cdot 0.2 = \frac{0.81 \cdot f[k]}{1 + f[k]} + 0.08$$

Berechnung des Kalman-Gains bis $k = 3$ (Anfangszustand $K[k] = 0$)

k	0	1	2	3	...	∞
$r[k]$	1	1.08	1.14	1.179	...	1.233
$K[k]$	0	0.0667	0.11	0.137	...	0.17
$f[k]$	0	0.08	0.14	0.179	...	0.233

Eigenschaften des Kalman-Filters

- Einschwingvorgang des Kalman-Gains über die ersten Abtastschritte
- Für LTI-Systeme mit stationärem Mess- und Systemrauschen ergibt sich stationärer Endwert
- In diesem Fall entspricht Kalman-Filter dem Wiener-Filter

Im Beispiel lässt sich der stationäre Endwert ($\lim_{k \rightarrow \infty} f[k] = f_\infty$) der Fehlerleistung berechnen

$$f_\infty = \frac{0.81 \cdot f_\infty}{1 + f_\infty} + 0.08$$

Damit ergibt sich folgende quadratische Gleichung (negative Lösung ist irrelevant)

$$f_\infty^2 + 0.11f_\infty - 0.08 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_\infty = \frac{-0.11 + \sqrt{0.11^2 + 4 \cdot 0.08}}{2} = 0.233$$

Daraus ergibt sich für den stationären Endwert des Kalman-Gains

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K[k] = K_\infty = \frac{0.9 \cdot f_\infty}{1 + f_\infty} = 0.17$$

Verbesserung der Filter-Strategie um Innovationsterm

Bisher: Schätzwert der Zustände wurde aus vergangenen (verrauschten) Messwerten berechnet

Akuteller Messwert wurde nicht einbezogen

Verbesserung der Schätzung zu einem *a-posteriori* Schätzwert durch sogenannten *Innovationsterm*

$$\hat{\mathbf{x}}^+[k] = \hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{M}[k] \cdot (\mathbf{y}[k] - \hat{\mathbf{y}}[k])$$

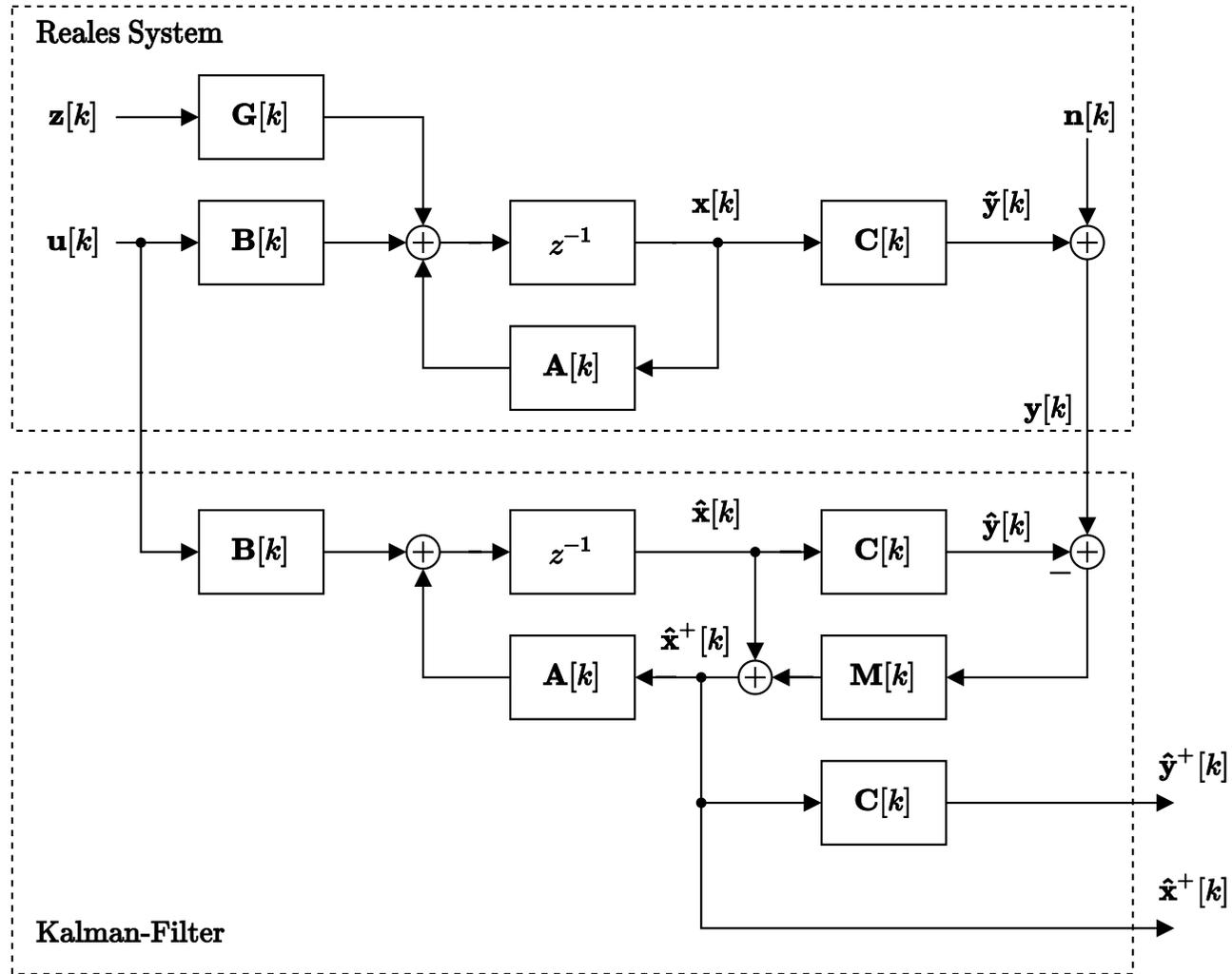
Analog zur vorherigen Herleitung berechnet sich die optimale Gewichtungsmatrix

$$\mathbf{M}[k] = \mathbf{F}[k] \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1}[k]$$

Als Zusammenhang zwischen den Gewichtungen $\mathbf{K}[k]$ und $\mathbf{M}[k]$ gilt

$$\mathbf{K}[k] = \mathbf{A} \mathbf{M}[k]$$

Kalman-Filter mit Innovationsterm



Implementierung des Kalman-Filters (mit Innovationsterm)

1. Messung des Ausgangssignals $\mathbf{y}[k]$ und Berechnung des geschätzten Ausgangssignals $\hat{\mathbf{y}}[k] = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}[k]$
2. Berechnung der Korrelationsmatrix und der Gewichtungsmatrix

$$\mathbf{R}[k] = \mathbf{N}_0[k] + \mathbf{C}\mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{M}[k] = \mathbf{F}[k]\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}[k]$$

3. Update des a-posteriori Schätzwertes der Zustände

$$\hat{\mathbf{x}}^+[k] = \hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{M}[k](\mathbf{y}[k] - \hat{\mathbf{y}}[k])$$

4. Update der Fehlerkorrelationsmatrix im nächsten Zeitschritt

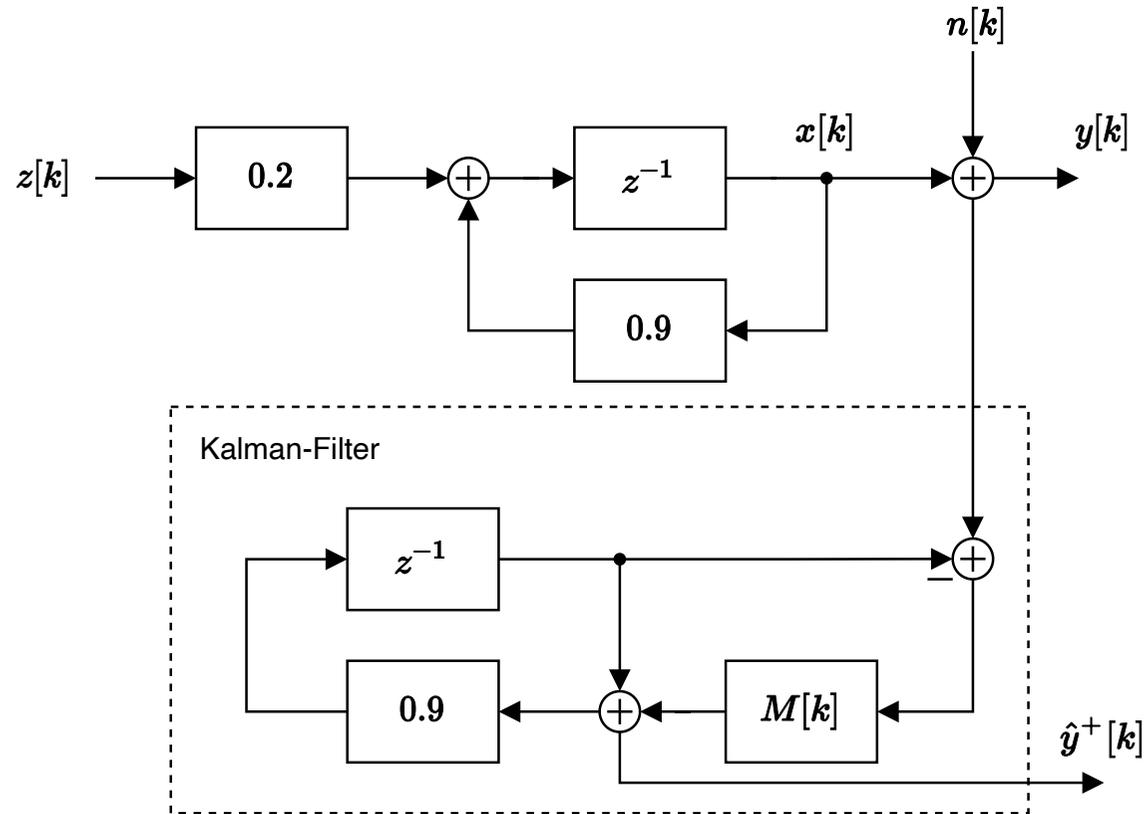
$$\mathbf{F}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{F}[k]\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{M}[k]\mathbf{R}\mathbf{M}^T[k]\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\mathbf{Z}_0\mathbf{G}^T$$

Anfangszustand wird üblicherweise zu Null gesetzt, d.h. $\mathbf{F}[0] = \mathbf{0}$ (Einschwingvorgang)

Beispiel: Zeitdiskretes Kalman-Filter 1. Ordnung (mit Innovationsterm) I

Gegeben ist folgendes System mit $\varphi_{zz}[\kappa] = 2\delta[\kappa]$ und $\varphi_{nn} = \delta[\kappa]$.

Erweiterung um Kalman-Filter mit Innovationsterm



Beispiel: Zeitdiskretes Kalman-Filter 1. Ordnung (mit Innovationsterm) II

Allgemeine Berechnung des Gewichtungsfaktors $M[k]$

$$r[k] = N_0 + 1 \cdot f[k] \cdot 1 = 1 + f[k]$$

$$M[k] = f[k] \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + f[k]} = \frac{f[k]}{1 + f[k]}$$

$$f[k + 1] = 0.9 \cdot f[k] \cdot 0.9 - 0.9 \cdot \frac{f[k]}{1 + f[k]} \cdot r[k] \cdot \frac{f[k]}{1 + f[k]} \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 2 \cdot 0.2 = \frac{0.81 \cdot f[k]}{1 + f[k]} + 0.08$$

Berechnung des Gewichtungsfaktors $M[k]$ bis $k = 3$ (Anfangszustand $M[k] = 0$)

k	0	1	2	3	...	∞
$r[k]$	1	1.08	1.14	1.179	...	1.233
$M[k]$	0	0.074	0.123	0.152	...	0.189
$f[k]$	0	0.08	0.14	0.179	...	0.233

Beispiel: Zeitdiskretes Kalman-Filter 1. Ordnung (mit Innovationsterm) III

Bestimmung der Übertragungsfunktion des stationären Kalman-Filters

$$\hat{x}[k+1] = 0.9 \cdot (\hat{x}[k] + M_\infty(y[k] - \hat{x}[k])) = \underbrace{0.9 \cdot (1 - M_\infty)}_{A_K} \cdot \hat{x}[k] + \underbrace{0.9 \cdot M_\infty}_{B_K} y[k]$$
$$\hat{y}^+[k] = \hat{x}[k] + M_\infty \cdot (y[k] - \hat{x}[k]) = \underbrace{(1 - M_\infty)}_{C_K} \cdot \hat{x}[k] + \underbrace{M_\infty}_{D_K} \cdot y[k]$$

Koeffizienten der Übertragungsfunktion

$$A_K = 0.9 \cdot (1 - M_\infty) = 0.73$$

$$B_K = 0.9 \cdot M_\infty = 0.17$$

$$C_K = 1 - M_\infty = 0.811$$

$$D_K = M_\infty = 0.189$$

Referenzen

[1] , , .

[2] A. Stenger R. Rabenstein B. Girod, *Signals and Systems*, John Wiley & Sons, Ltd.

[3] B. Wagner, *Skript zur Vorlesung Nichtlineare und Stochastische Systeme*, TH Nürnberg.

[4] E. Hänsler, *Statistische Signale*, Springer Verlag.

[5] H. D. Lücke J-R. Ohm, *Signalübertragung*, Springer Verlag.