

Diskrete Zufallsprozesse

Diskreter Zufallsprozess

- Bisherige Betrachtung basiert auf kontinuierliche Zufallsprozesse $X(\eta, t)$ mit $t \in \mathbb{R}$
- Gleiche Überlegungen können für zeitdiskrete Zufallsprozesse getroffen werden
- Im Folgenden werden wichtigsten Unterschiede dargestellt

Zeitdiskreter Zufallsprozess mit Abtastfrequenz $1/T$

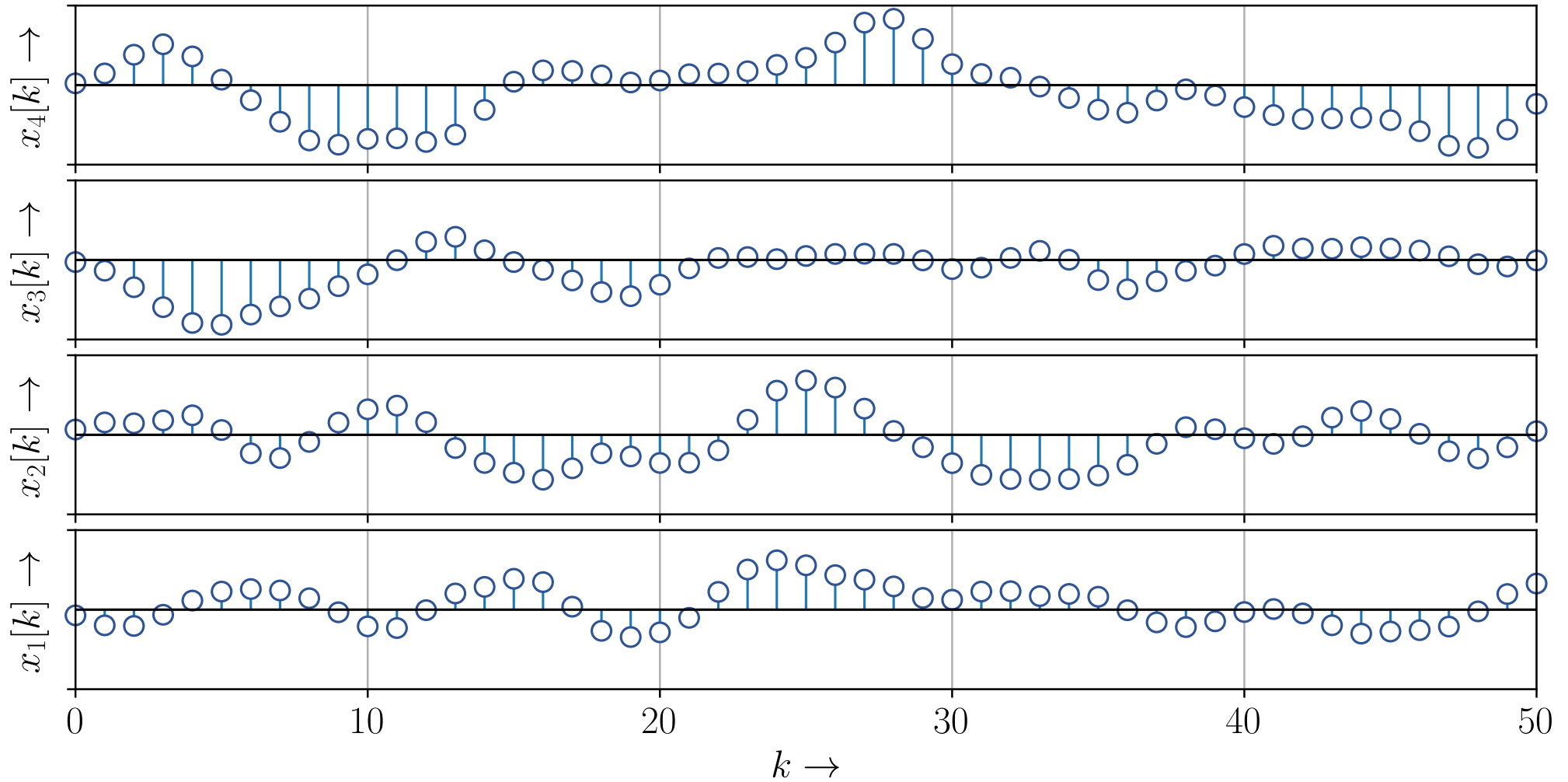
$$X_{\eta}[k] = X(\eta, kT) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Die Begriffe Ensemble und Musterfunktion haben die gleiche Bedeutung wie bei kontinuierlichen Zufallsprozessen

Eine Musterfunktion des Zufallsprozesses ist dann

$$X_{\eta_i}[k] = x_i[k]$$

4 Realisierungen eines diskreten Zufallsprozesses



Wahrscheinlichkeitsverteilung und -dichte von diskreten Zufallsprozessen

Ein zeitdiskreter Zufallsprozess ist *nicht* wertdiskret!

Deswegen lassen sich die stochastischen Eigenschaften von $X_\eta[k]$ mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung kontinuierlicher Zufallsvariablen beschreiben:

$$F_X(x, k) = P(\{\eta \mid X_\eta[k] \leq x\})$$

Entsprechend ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu

$$f_X(x, k) = \frac{\partial F_X(x, k)}{\partial x}$$

Die Verbundverteilung zu zwei Zeitpunkten und die Verbundverteilung verschiedener Zufallsprozesse ergibt sich analog zu zeitkontinuierlichen Zufallsprozessen.

Mittelwert, Varianz und Autokorrelation des zeitdiskreten Zufallsprozesses

Mittelwert

$$\mu_X[k] = \mathbb{E}\{X_\eta[k]\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x, k) dx$$

Varianz

$$\sigma_X^2[k] = \mathbb{E}\{(X_\eta[k] - \mu_X[k])^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X[k])^2 f_X(x, k) dx$$

Autokorrelationsfunktion

$$\varphi_{XX}[k_1, k_2] = \mathbb{E}\{X_\eta[k_1] \cdot X_\eta[k_2]\}$$

Autokovarianzfunktion

$$\psi_{XX}[k_1, k_2] = \mathbb{E}\{(X_\eta[k_1] - \mu_X[k_1]) \cdot (X_\eta[k_2] - \mu_X[k_2])\}$$

Eigenschaften der Autokorrelations- und Autokovarianzfunktion

Symmetrie

$$\varphi_{XX}[k_1, k_2] = \varphi_{XX}[k_2, k_1]$$

$$\psi_{XX}[k_1, k_2] = \psi_{XX}[k_2, k_1]$$

Für $k_1 = k_2 = k$ entspricht Autokorrelationsfunktion der Momentanleistung

$$\varphi_{XX}[k_1, k_2] = \varphi_{XX}[k, k] = \mathbb{E}\{(X_\eta[k])^2\} = \sigma_X^2[k] + \mu_X^2[k]$$

Für $k_1 = k_2 = k$ entspricht Autokovarianzfunktion der Varianz

$$\psi_{XX}[k_1, k_2] = \psi_{XX}[k, k] = \mathbb{E}\{(X_\eta[k] - \mu_X[k])^2\} = \sigma_X^2[k]$$

Für $k_1 = k_2 = k$ sind Autokorrelations- und Autokovarianzfunktion stets positiv

$$\varphi_{XX}[k, k] \geq 0 \quad \psi_{XX}[k, k] \geq 0$$

Kreuzkorrelationsfunktion und Kreuzkovarianzfunktion

Kreuzkorrelationsfunktion KKF (*engl. Crosscorrelationfunction CCF*)

$$\varphi_{XY}[k_1, k_2] = \mathbf{E}\{X_\eta[k_1] \cdot Y_\eta[k_2]\}$$

Kreuzkovarianzfunktion (*engl. Crosscovariancefunction CCV*)

$$\psi_{XY}[k_1, k_2] = \mathbf{E}\{(X_\eta[k_1] - \mu_X[k_1]) \cdot (Y_\eta[k_2] - \mu_Y[k_2])\}$$

Symmetrie:

$$\varphi_{XY}[k_1, k_2] = \varphi_{YX}[k_1, k_2] \quad \psi_{XY}[k_1, k_2] = \psi_{YX}[k_1, k_2]$$

Unkorrelierte Prozesse: Zwei Zufallsprozesse $X_\eta[k]$ und $Y_\eta[k]$ sind unkorreliert falls

$$\psi_{XY}[k_1, k_2] = \varphi_{XY}[k_1, k_2] - \mu_X[k_1] \cdot \mu_Y[k_1] = 0 \quad \forall k_1, k_2$$

Orthogonale Prozesse: Zwei Zufallsprozesse $X_\eta[k]$ und $Y_\eta[k]$ sind orthogonal falls

$$\varphi_{XY}[k_1, k_2] = 0 \quad \forall k_1, k_2$$

Stationäre zeitdiskrete Zufallsprozesse

Stationarität zeitdiskreter Zufallsprozesse ist gegeben, wenn die statistischen Eigenschaften des Prozesses unabhängig vom Abtastzeitpunkt k ist.

Damit sind Mittelwert und Varianz zeitinvariant

$$\mu_X[k] = \mu_X \quad \sigma_X^2[k] = \sigma_X^2$$

Die Auto- und Kreuzkorrelation sind nur abhängig von der Differenz der Abtastzeitpunkte $\kappa = k_1 - k_2$

$$\begin{aligned} \varphi_{XX}[k_1, k_2] &= \varphi_{XX}[k_1, k_2] = \varphi_{XX}[\kappa] \\ \varphi_{XY}[k_1, k_2] &= \varphi_{XY}[k_1, k_2] = \varphi_{XY}[\kappa] \end{aligned} \quad \kappa = k_1 - k_2$$

Auto- und Kreuzkorrelationsfunktion sind gerade:

$$\varphi_{XX}[-\kappa] = \varphi_{XX}[\kappa] \quad \varphi_{XY}[-\kappa] = \varphi_{XY}[\kappa]$$

Autokorrelationsfunktion hat ihr Maximum bei $\kappa = 0$.

Stationäre zeitdiskrete Rauschprozesse

Bei einem stationären zeitdiskreten Rauschprozess $X_\eta[k]$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für alle Samples gleich, d.h.

$$f_X(x, k) = f_X(x)$$

Wenn die einzelnen Werte einer Sequenz dieses Rauschprozesses voneinander unabhängig sind, spricht man von *unabhängig identisch verteiltem* Rauschprozess (engl. *independent identically distributed*). Damit handelt es sich auch um einen weißen Rauschprozess.

Schwach stationäres weißes Rauschen liegt bereits vor, wenn für die Autokorrelationsfunktion

$$\varphi_{XX}[\kappa] = \sigma_X^2 \cdot \delta[\kappa]$$

Ergodizität

Ergodizität liegt vor, wenn der Zeit-Mittelwert jeder Musterfunktion gleich dem Ensemble-Mittelwert ist

$$\mu_X = \mathbf{E}\{X_\eta[k]\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x_i[k]$$

Für die Varianz gilt dann

$$\sigma_X^2 = \mathbf{E}\{(X_\eta[k] - \mu_X)^2\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N (x_i[k] - \mu_X)^2$$

Die Autokorrelationsfunktion ergibt sich durch

$$\varphi_{XX}[\kappa] = \mathbf{E}\{X_\eta[k+\kappa] \cdot X_\eta[k]\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x_i[k+\kappa] \cdot x_i[k]$$

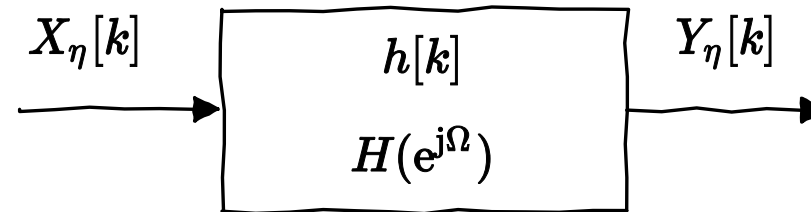
Schwach stationäre zeitdiskrete Prozesse im Frequenzbereich

Leistungsdichtespektrum ergibt sich aus der *discrete-time Fourier transform (DTFT)*:

$$\Phi_{XX}(\Omega) = \text{DTFT}\{\varphi_{XX}[\kappa]\} = \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \varphi_{XX}[\kappa] e^{-j\kappa\Omega}$$

Der Begriff Leistungsdichtespektrum ist für diskrete Zufallsprozesse im Hinblick auf die Dimension meist nicht korrekt. Die Dimension von $\Phi_{XX}(\Omega)$ entspricht der Dimension des Zufallsprozesses zum Quadrat ($[X_\eta[t]^2]$), was in der Regel keiner Leistung entspricht.

Überblick zur Verarbeitung stochastischer zeitdiskreter Prozesse über LTI-Systeme



Zeitbereich	Frequenzbereich
$\varphi_{XX}[\kappa] = \mathbb{E}\{X_\eta[k] \cdot X_\eta[k + \kappa]\}$	$\Phi_{XX}(\Omega)$
$\varphi_{YX}[\kappa] = \varphi_{XX}[\kappa] * h[\kappa]$	$\Phi_{YX}(\Omega) = \Phi_{XX}(\Omega) \cdot H(e^{j\Omega})$
$\varphi_{XY}[\kappa] = \varphi_{XX}[\kappa] * h[-\kappa]$	$\Phi_{XY}(\Omega) = \Phi_{XX}(\Omega) \cdot H^*(e^{j\Omega})$
$\varphi_{YY}[\kappa] = \varphi_{XX}[\kappa] * h[\kappa] * h[-\kappa]$	$\Phi_{YY}(\Omega) = \Phi_{XX}(\Omega) \cdot H(e^{j\Omega}) \cdot H^*(e^{j\Omega})$
$\varphi_{hh}[\kappa] = h[\kappa] * h[-\kappa]$	$ H(e^{j\Omega}) ^2$
$\varphi_{YY}[\kappa] = \varphi_{XX}[\kappa] * \varphi_{hh}[\kappa]$	$\Phi_{YY}(\Omega) = \Phi_{XX}(\Omega) \cdot H(e^{j\Omega}) ^2$

Referenzen

- [1] A. Stenger R. Rabenstein B. Girod, *Signals and Systems*, John Wiley & Sons, Ltd.
- [2] B. Wagner, *Skript zur Vorlesung Nichtlineare und Stochastische Systeme*, TH Nürnberg.
- [3] E. Hänsler, *Statistische Signale*, Springer Verlag.
- [4] H. D. Lücke J-R. Ohm, *Signalübertragung*, Springer Verlag.