Zufallsprozesse

Zufallsprozesse

Zufallsprozess

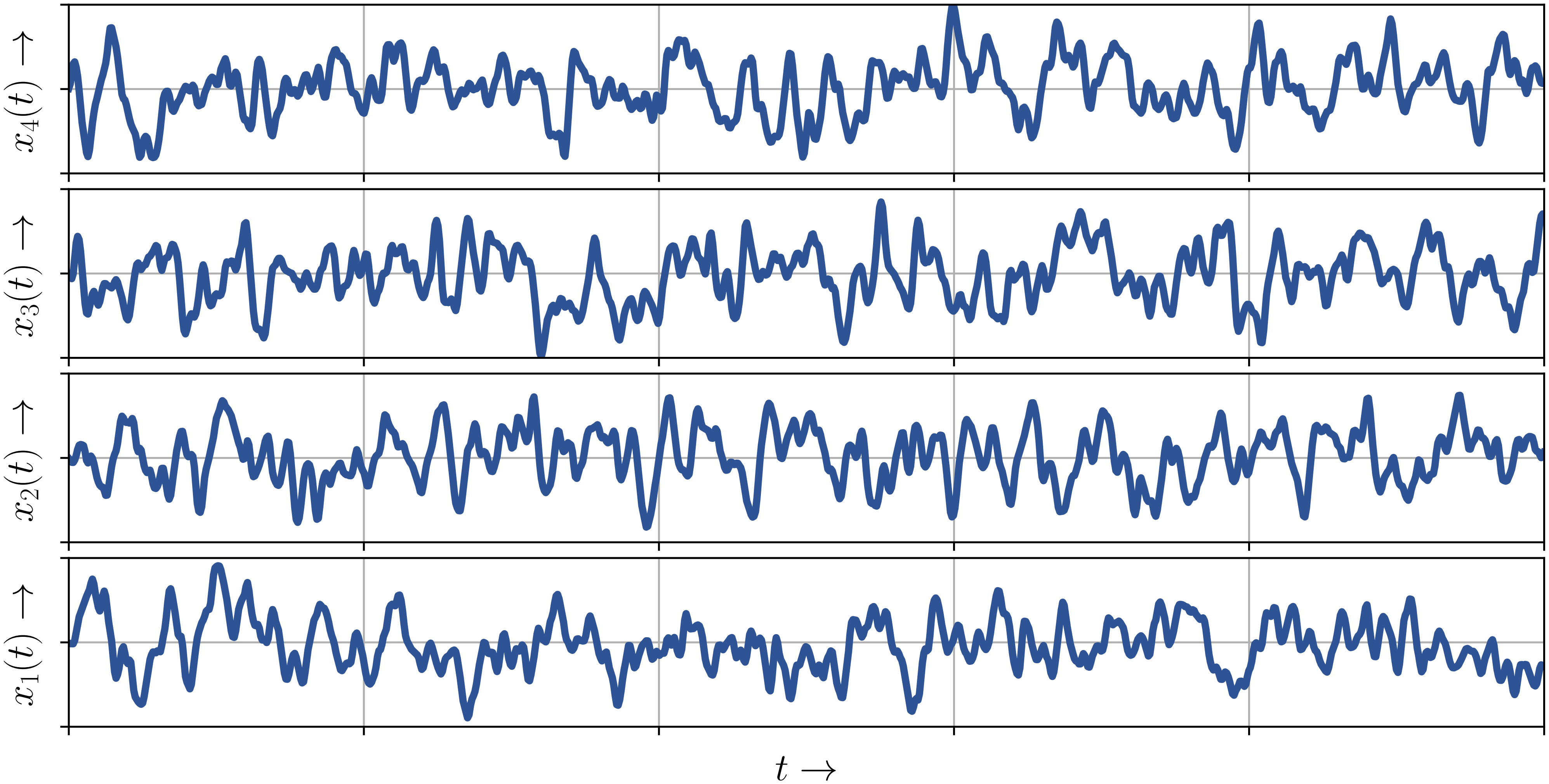
Zufallsvariable: Jedem Ergebnis eines Zufallsexperimentes wird eine Zahl x_i zugeordnet.

Zufallsprozess: Jedem Ergebnis eines Zufallsexperimentes wird eine Zeitfunktion $x_i(t)$ zugeordnet.

Beschreibung des Zufallsprozesses mittels der Funktion $X(\eta, t)$ mit Zufallsvariable η

Für jedes konkrete Ergebnis η_i: Zuweisung einer konkreten Zeitfunktion $X(\eta_i, t) = X_i(t)$.

4 Realisierungen eines Zufallsprozesses



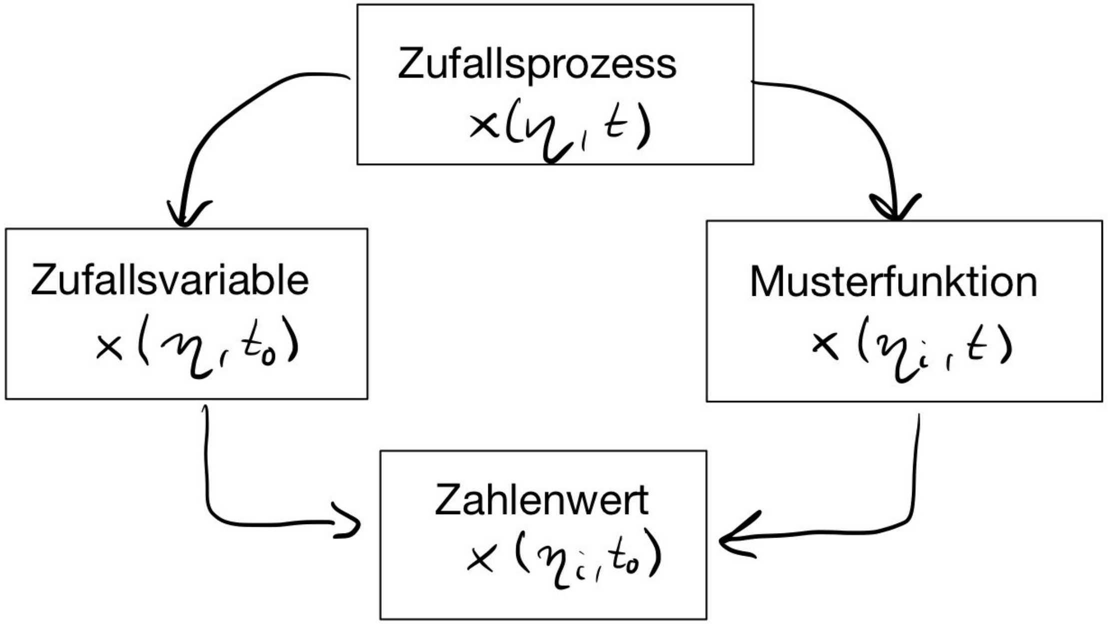
Zufallsprozess, Zufallsvariable, Musterfunktion und Variable

1. η und t variabel: $X(\eta, t)$ beschreibt *Zufallsprozess* bzw. Schar von Musterfunktionen

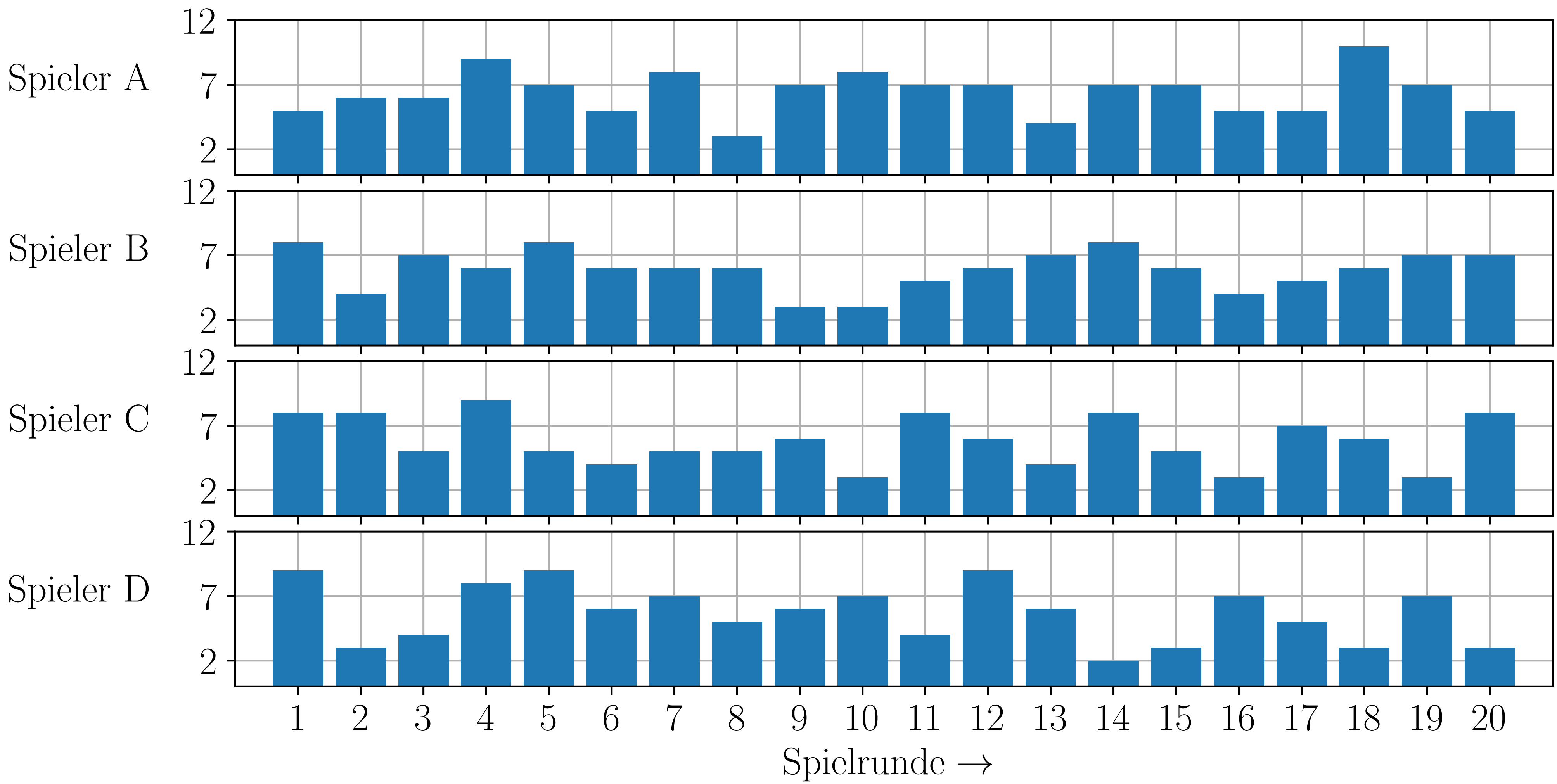
2. η variable, t fest: $X(\eta, t_0)$ ist *Zufallsvariable*

3. η fest, t variabel: $X(\eta_i, t) = x_i(t)$ ist *Musterfunktion* (deterministische Funktion)

4. η und t fest: $X(\eta_i, t_0) = x_i(t_0)$ ist gewöhnlicher Zahlenwert



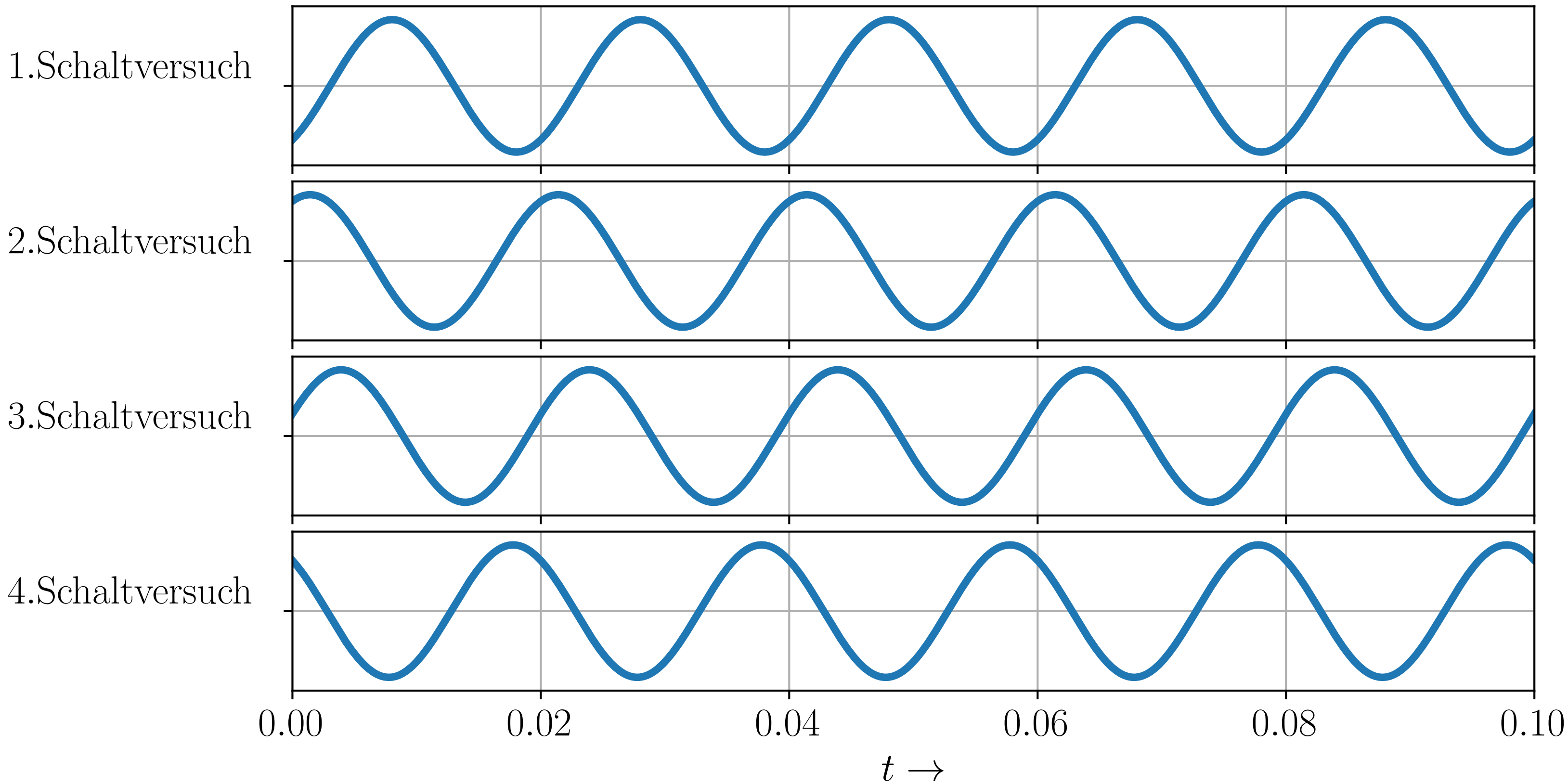
Beispiel: Die Siedler von Catan



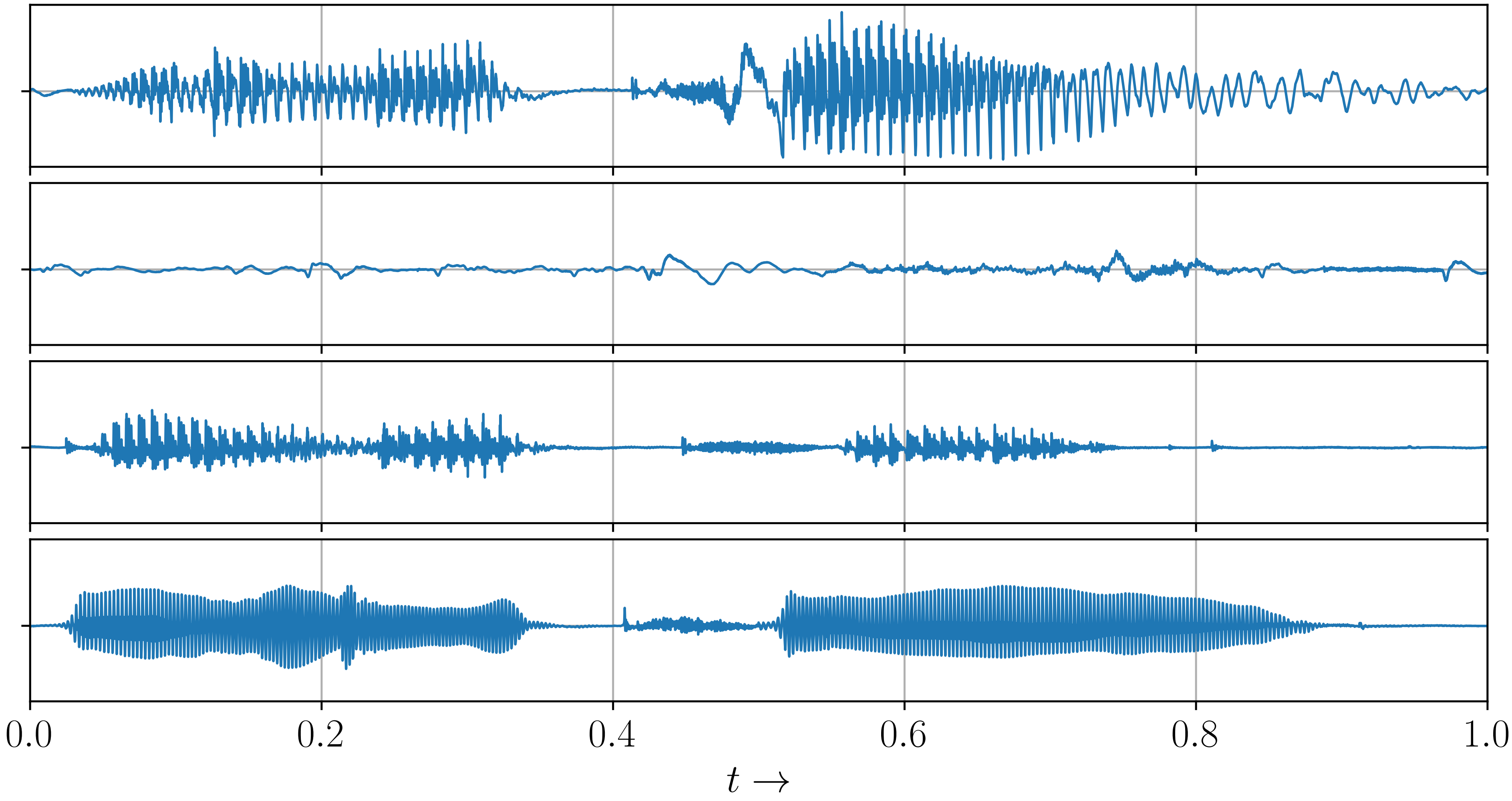
Beispiel: Wechselspannung

Zufallsprozess: $X(\eta, t) = U_0 \cdot \sin(\omega t + \phi(\eta))$ mit Zufallsvariable $\phi(\eta) \in [0; 2\pi[$

Zufallsexperiment: Einschalten einer Wechselspannungsquelle



Beispiel: Befehl zur Aktivierung eines Sprachassistenten



Unterscheidung von Zufallsprozessen

- Zeitkontinuierlicher Zufallsprozess: $t \in \mathbb{R}$
- Zeitdiskreter Zufallsprozess: $t = k \cdot T$ mit $k \in \mathbb{Z}$
- Reelwertiger Zufallsprozess:

$$X(\eta_i, t) \in \mathbb{R} \quad \forall t$$

- Komplexwertiger Zufallsprozess (Anwendung in der Nachrichtentechnik):

$$X(\eta, t) = X_{\mathrm{R}}(\eta, t) + \mathrm{j} \cdot X_{\mathrm{I}}(\eta, t)$$

- Kontinuierlicher Zufallsprozess: $X(\eta, t)$ stammt von kontinuierlicher Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
- Diskreter Zufallsprozess: $X(\eta, t)$ stammt von diskreter Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Zufallsprozesses

Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Zufallsprozesses ist zeitabhängig

$$F_X(x,t) = P(\{\eta \mid X(\eta,t) \leq x\})$$

Entsprechend der Definition der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ergibt sich

$$f_X(x,t) = \frac{\partial F_X(x,t)}{\partial x}$$

Betrachtung der Verbundverteilung eines Zufallsprozesses zu zwei Zeitpunkten t_1 und t_2

$$F_{XX}(x_1,x_2,t_1,t_2) = P(\{\eta \mid X(\eta,t_1) \leq x_1\} \cap \{\eta \mid X(\eta,t_2) \leq x_2\})$$

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{XX}(x_1,x_2,t_1,t_2) = \frac{\partial^2 F_{XX}(x_1,x_2,t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier Zufallsprozesse

Betrachtung zweier Zufallsprozesse $X(\eta, t)$ und $Y(\eta, t)$ (über der selben Ergebnismenge)

$$F_{XY}(x, y, t_1, t_2) = P(\{\eta \,|\, X(\eta, t_1) \leq x\} \cap \{\eta \,|\, Y(\eta, t_2) \leq y\})$$

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{XY}(x, y, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y, t_1, t_2)}{\partial x \partial y}$$

Zwei Zufallsprozesse gelten als statistisch unabhängig, wenn für beliebige Zeitpunkte t_1 und t_2 gilt:

$$f_{XY}(x, y, t_1, t_2) = f_X(x, t_1) \cdot f_Y(y, t_2)$$

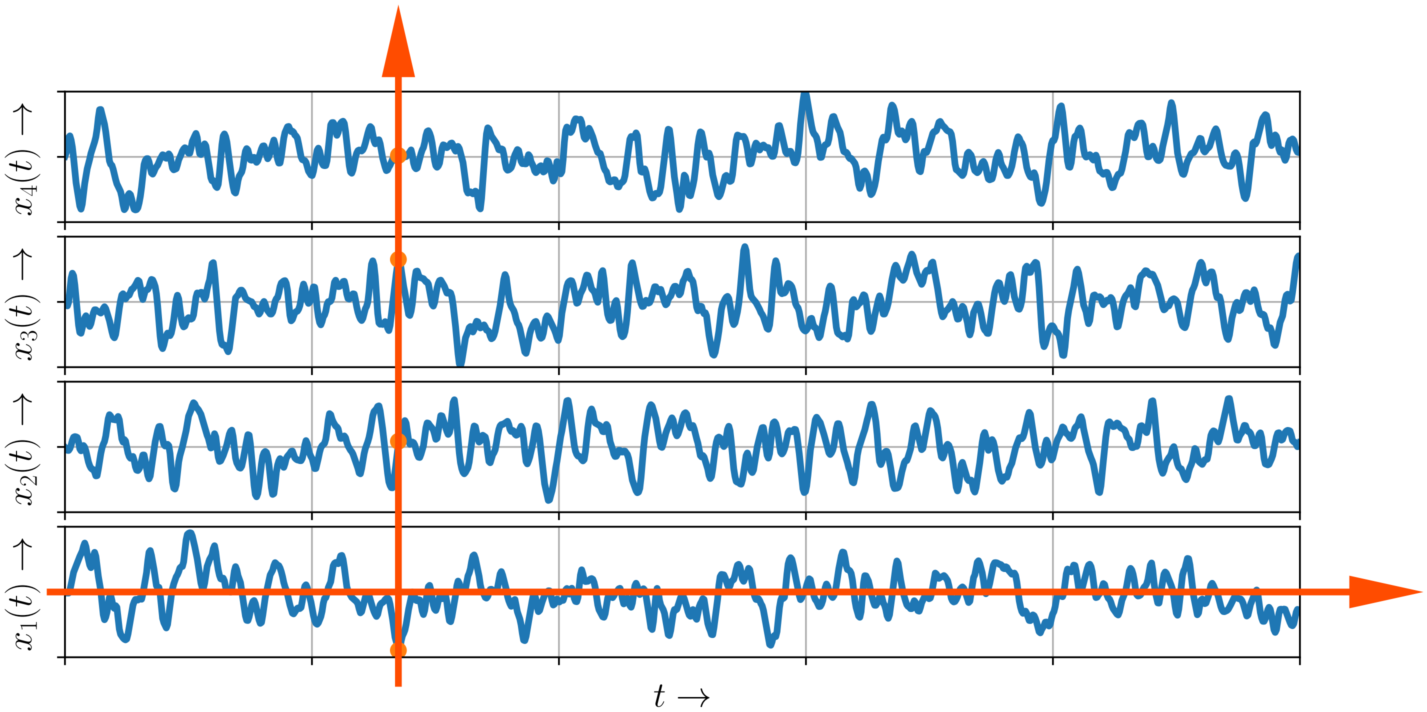
$$F_{XY}(x, y, t_1, t_2) = F_X(x, t_1) \cdot F_Y(y, t_2)$$

Beispiel: Entkopplung von Signal und additiver Störung (Rauschen)

Mittelwert und Varianz

Bildung von Erwartungswerten

1. *Ensemblemittelwert:* Mittellung über dem Parameter η bei festem Parameter t ("Längs zum Prozess")
2. *Zeitmittelwert:* Mittellung über die Zeit (Parameter t) bei ausgewählter Musterfunktion ("Quer zum Prozess")



Mittelwert des Zufallsprozesses

Mittelwerte von Zufallsprozessen sind stets *Ensemblemittelwerte*

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}\{X(\eta, t)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x, t) \mathrm{d}x$$

$$\sigma_X^2(t) = \mathrm{E}\left\{(X(\eta, t) - \mu_X(t))^2\right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X(t))^2 f_X(x, t) \mathrm{d}x$$

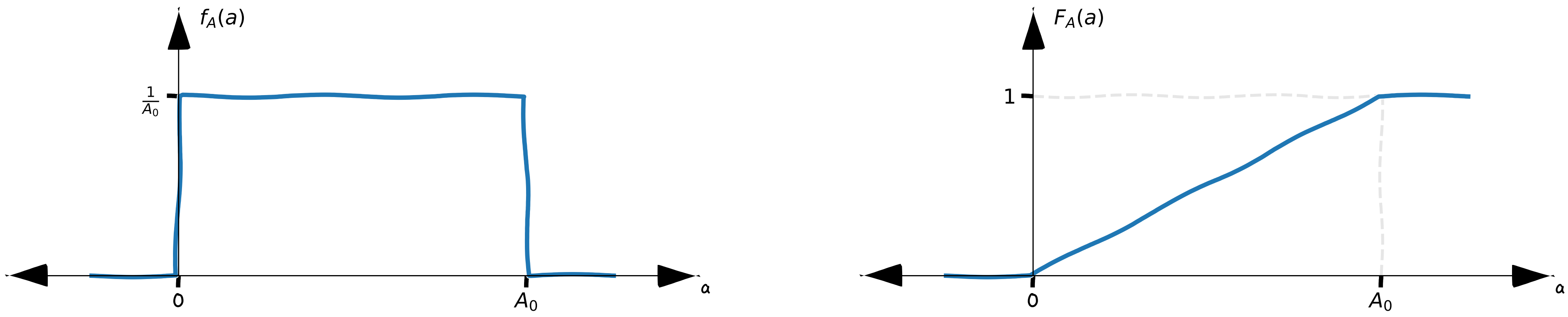
Somit sind Mittelwert und Varianz eines Zufallsprozesses im Allgemeinen zeitabhängig.

Beispiel: Cosinus-Schwingung mit zufälliger Amptlitude I

Gegeben: Cosinus-Schwingung mit zufälliger Amplitude und konstanter Phase

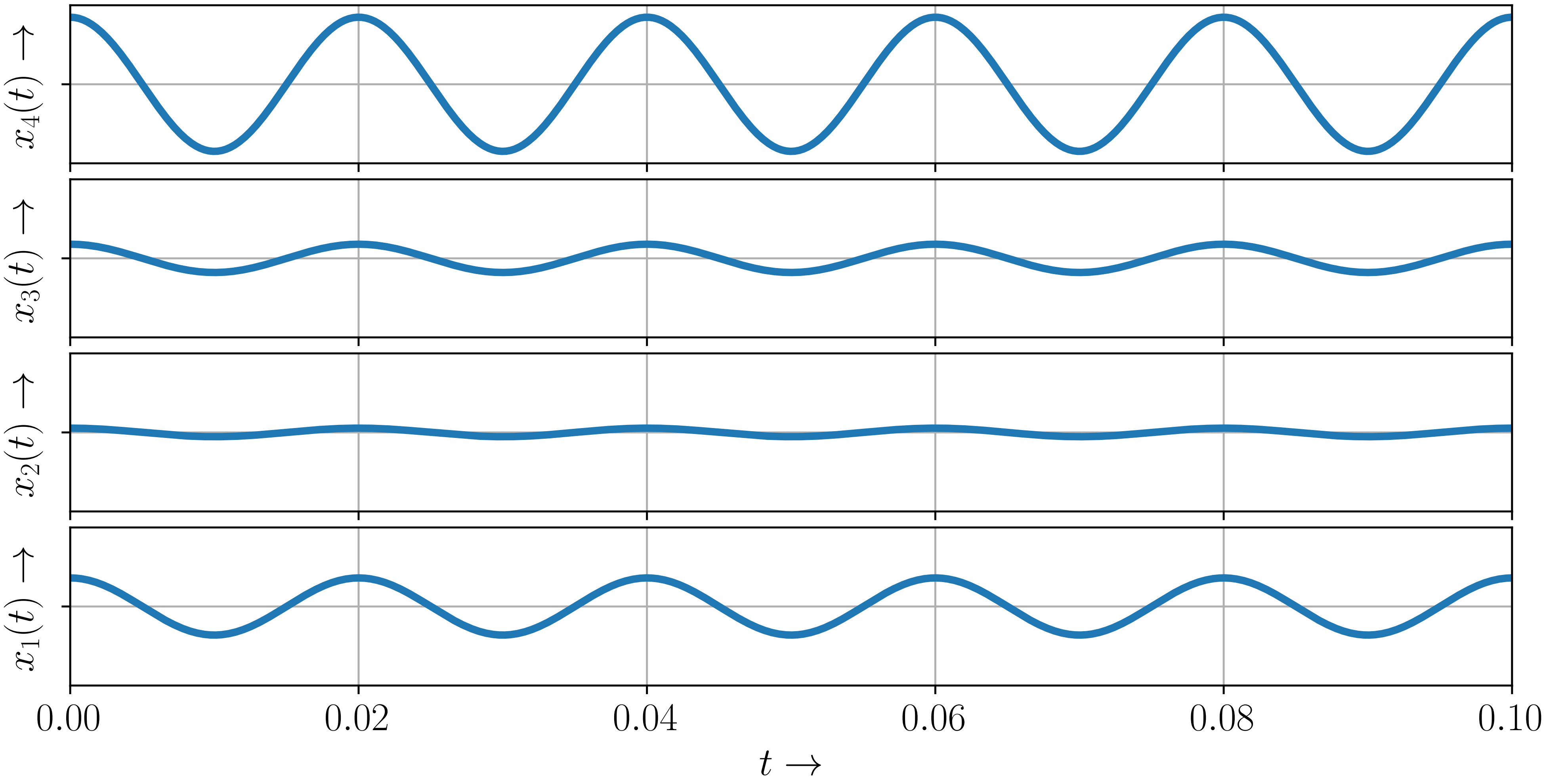
$$X(\eta, t) = A(\eta) \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

Amplitude $A(\eta)$ ist gleichverteilt zwischen 0 und A_0



Gesucht: Mittelwert $\mu_X(t)$ und Varianz $\sigma_X^2(t)$

Beispiel: Cosinus-Schwingung mit zufälliger Amptlitude II



Beispiel: Cosinus-Schwingung mit zufälliger Amptlitude III

Berechnung des Mittelwertes (*hier:* zeitabhängig)

$$\mu_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a\cos(\omega t+\phi) f_A(a)\mathrm{d}a = \cos(\omega t+\phi)\int\limits_{0}^{A_0} \frac{a}{A_0}\mathrm{d}a =$$

$$= \cos(\omega t+\phi)\left[\frac{a^2}{2A_0}\right]_0^{A_0} = \frac{A_0}{2}\cos(\omega t+\phi)$$

Beispiel: Cosinus-Schwingung mit zufälliger Amptlitude IV

Berechnung der Varianz (*hier:* zeitabhängig)

$$\sigma_X^2(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2x\mu_X + \mu_X^2) f_A(a)\mathrm{d}a$$

$$= \int\limits_{0}^{A_0} (a^2 \cos^2(\omega t + \phi) - 2a\cos(\omega t + \phi) \cdot \mu_X + \mu_X^2) \frac{1}{A_0}\mathrm{d}a =$$

$$= \left[\frac{a^3}{3A_0}\cos^2(\omega t + \phi) - \frac{2a^2}{2A_0}\cos(\omega t + \phi) \cdot \mu_X + \frac{a}{A_0}\mu_X^2\right]_0^{A_0} =$$

$$= \frac{A_0^2}{3}\cos^2(\omega t + \phi) - A_0\cos(\omega t + \phi) \cdot \mu_X + \mu_X^2 =$$

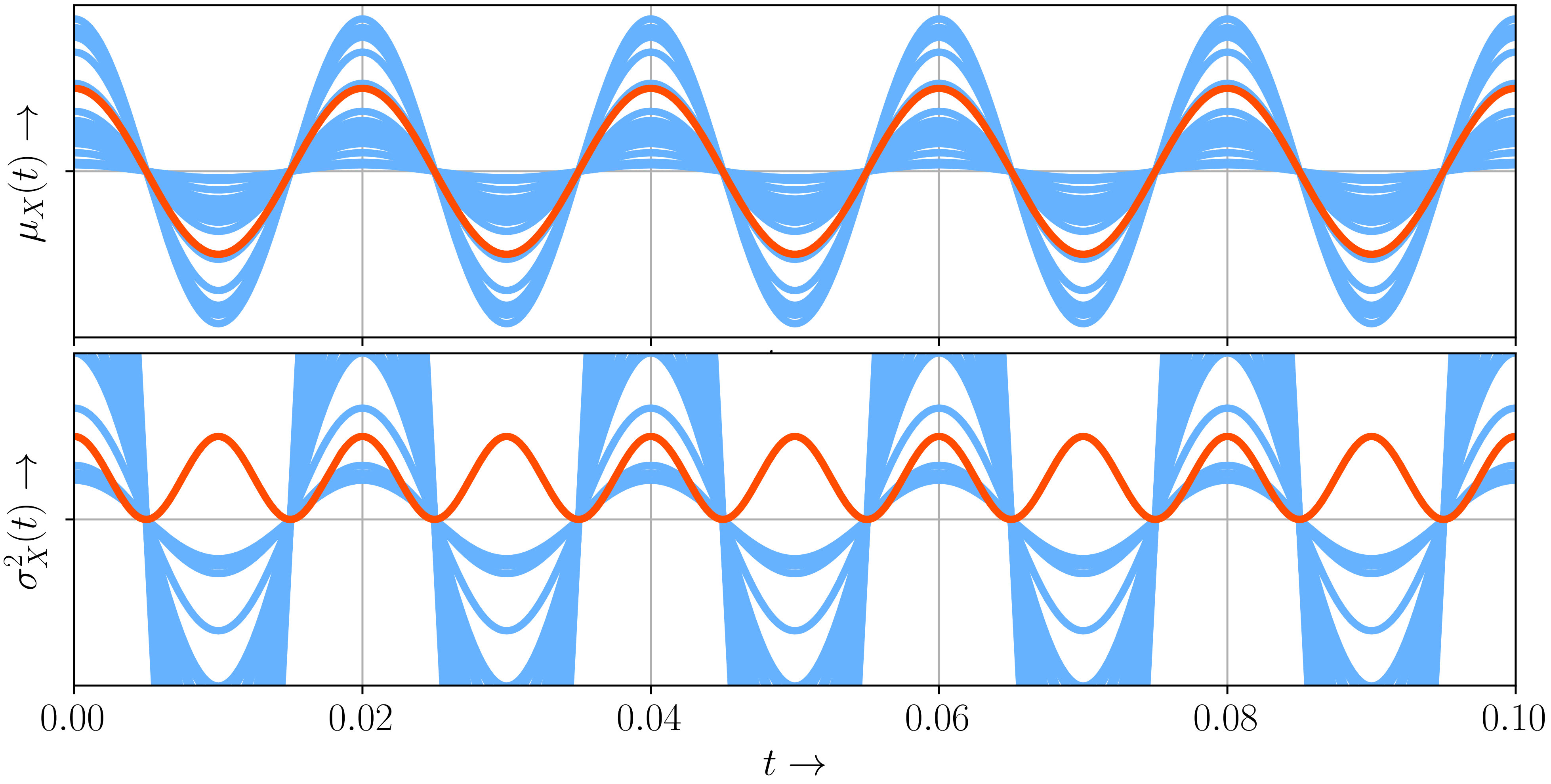
$$= \frac{A_0^2}{3}\cos^2(\omega t + \phi) - A_0\cos(\omega t + \phi) \cdot \frac{A_0}{2}\cos(\omega t + \phi) + \frac{A_0^2}{4}\cos^2(\omega t + \phi) =$$

Beispiel: Cosinus-Schwingung mit zufälliger Amptlitude V

Berechnung der Varianz (Fortsetzung)

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \frac{A_0^2}{3}\cos^2(\omega t+\phi) - \frac{A_0^2}{2}\cos^2(\omega t+\phi) + \frac{A_0^2}{4}\cos^2(\omega t+\phi) = \\
&= \frac{A_0^2}{3}\cos^2(\omega t+\phi) - \frac{A_0^2}{2}\cos^2(\omega t+\phi) + \frac{A_0^2}{4}\cos^2(\omega t+\phi) = \\
&= \frac{A_0^2}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+\cos(2\omega t+2\phi)) = \\
&= \frac{A_0^2}{24}\,(1+\cos(2(\omega t+\phi)))
\end{aligned}
$$

Beispiel: Cosinus-Schwingung mit zufälliger Amptlitude VI

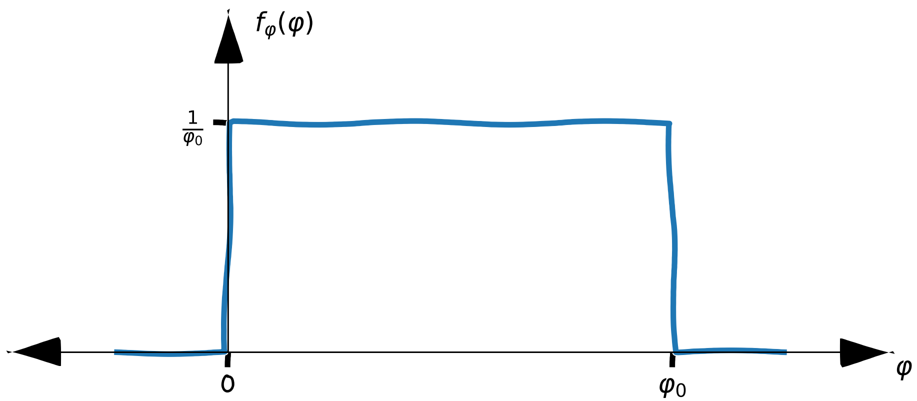


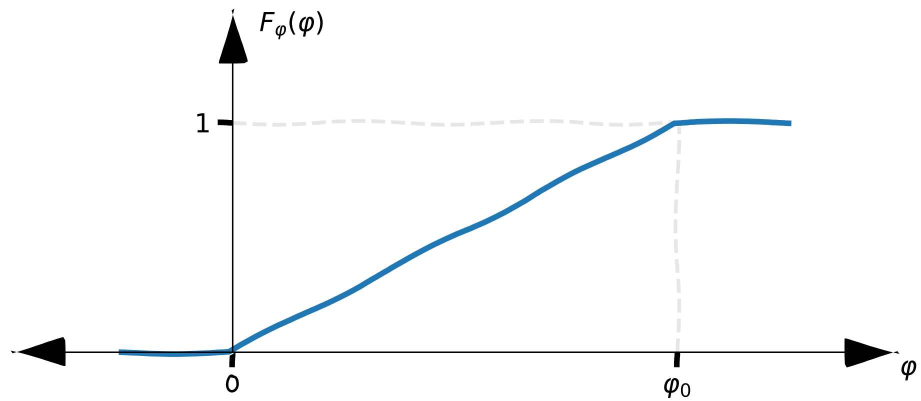
Beispiel: Cosinus-Schwingung mit konstanter Amplitude und zufälliger Phase I

Gegeben: Cosinus-Schwingung mit konstanter Amplitude und zufälliger Phase

$$X(\eta, t) = A_0 \cdot \cos(\omega t + \phi(\eta))$$

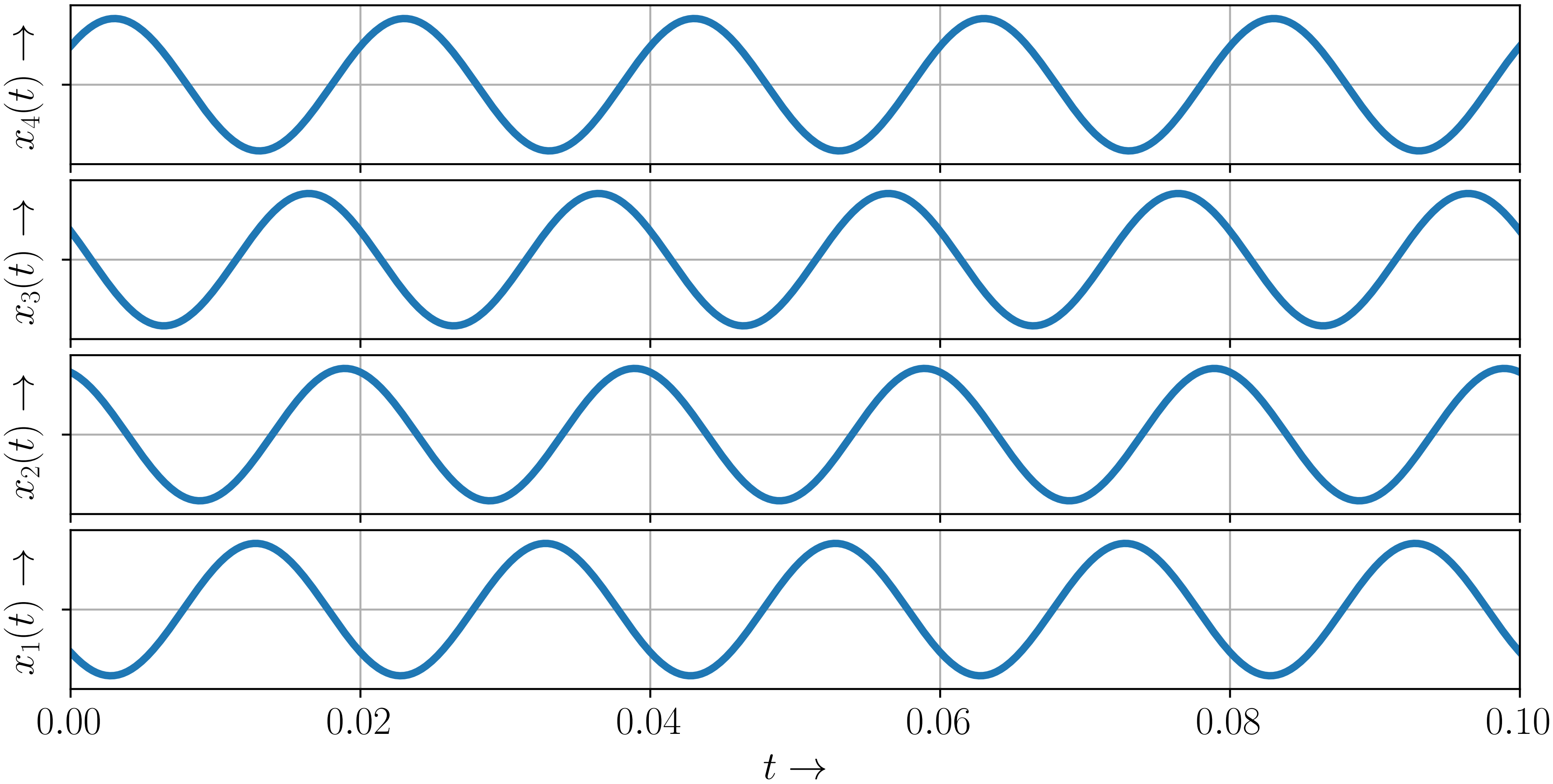
Phase $\phi(\eta)$ ist gleichverteilt zwischen 0 und 2π





Gesucht: Mittelwert $\mu_X(t)$ und Varianz $\sigma_X^2(t)$

Beispiel: Cosinus-Schwingung mit konstanter Amplitude und zufälliger Phase II



Beispiel: Cosinus-Schwingung mit konstanter Amplitude und zufälliger Phase III

Berechnung des Mittelwertes

$$\mu_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_0 \cos(\omega t + \phi) \cdot f_\phi(\phi)\mathrm{d}\phi = \int\limits_{0}^{2\pi} A_0 \cos(\omega t + \phi)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\phi =$$

$$= \frac{A_0}{2\pi}\left[\sin(\omega t + \phi)\right]_0^{2\pi} = 0$$

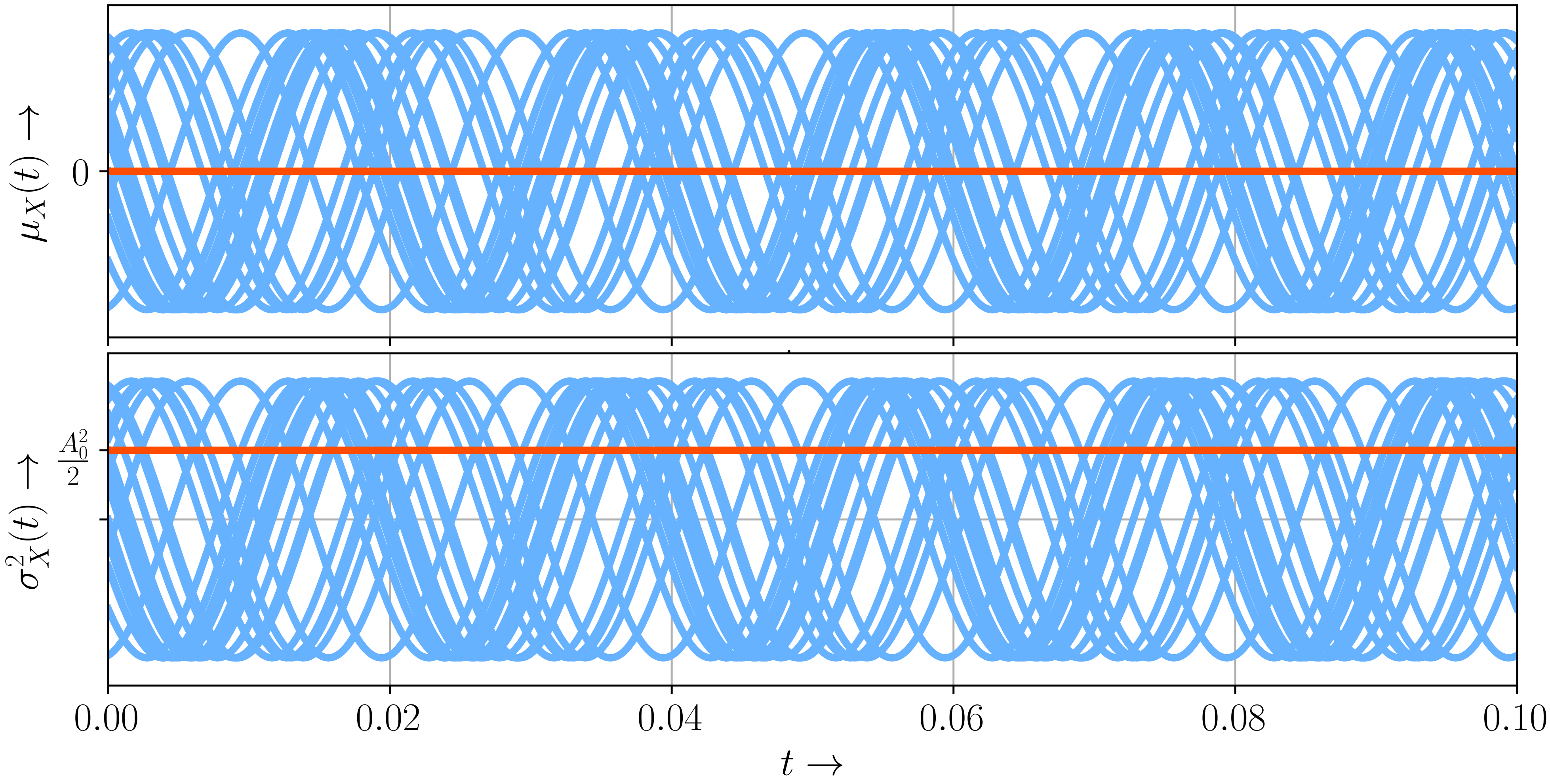
Berechnung der Varianz

$$\sigma_X^2(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2\pi} x^2 f_\phi(\phi)\mathrm{d}\phi = \int\limits_{0}^{2\pi} A_0^2 \cos^2(\omega t + \phi)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\phi =$$

$$= \frac{A_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2(\omega t + \phi))\mathrm{d}\phi = \frac{A_0^2}{4\pi}\left[\phi + \frac{1}{2}\sin(2(\omega t + \phi)\right]_0^{2\pi} =$$

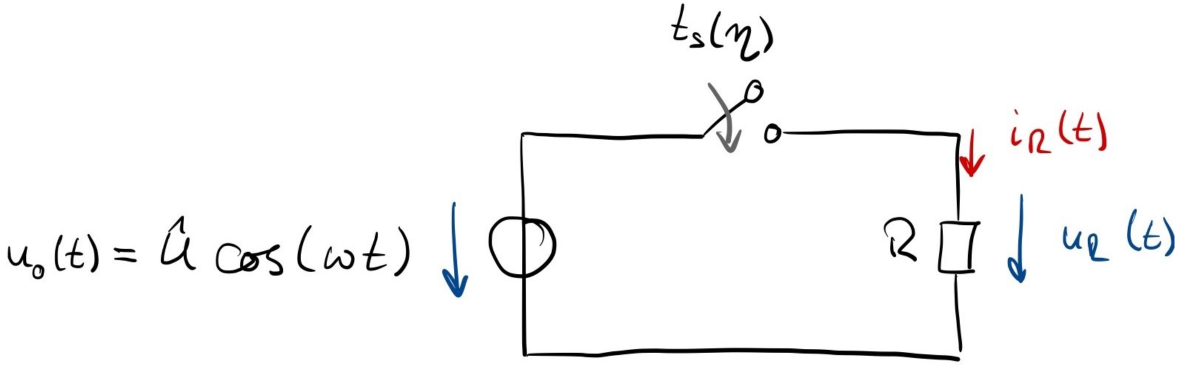
$$= \frac{A_0^2}{4\pi}\left(2\pi + \frac{1}{2}\sin(2\omega t) - 0 - \frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right) = \frac{A_0^2}{4\pi} \cdot 2\pi = \frac{A_0^2}{2}$$

Beispiel: Cosinus-Schwingung mit konstanter Amplitude und zufälliger Phase IV



Interpretation der Ergebnisse

Beispiel: Zuschalten eines Generators



Zufallsvariable: Schaltzeitpunkt $t_\mathrm{s}(\eta)$

Spannung über dem Widerstand R: $u_R(t) = U(\eta, t) = \hat{U}\cos(\omega t + \phi(\eta))$

Strom durch den Widerstand R: $i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{U(\eta,t)}{R}$

Mittlere aufgenommene Leistung des Widerstandes R:

$$\overline{P} = \mathrm{E}\{p(t)\} = \mathrm{E}\{u_R(t) \cdot i_R(t)\} = \frac{1}{R} \cdot \mathrm{E}\big\{(U(\eta,t))^2\big\} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\hat{U}^2}{2} = \frac{\sigma_U^2}{R}$$

Mittlere Momentanleistung eines Zufallsprozesses

Das 2. Moment eines Zufallsprozesses $X(\eta, t)$ gibt die *mittlere Momentanleistung* an.

Die mittlere Momentanleistung ergibt sich durch

$$\overline{p}(t) = \mathrm{E}\left\{(X(\eta, t))^2\right\} = \sigma_X^2(t) + \mu_X^2(t)$$

Damit setzt sich die mittlere Momentanleistung zusammen aus

1. Quadratischem Gleichanteil
2. Varianz

Anmerkung: Häufig werden mittelwertfreie Zufallsprozesse (d.h. $\mu_X = 0$) betrachtet. In diesem Fall entspricht die Leistung der Varianz. Allgemein darf der Einfluss des Gleichanteils nicht vernachlässigt werden.

Korrelations- und Kovarianzfunktionen

Autokorrelationsfunktion und Autokovarianzfunktion

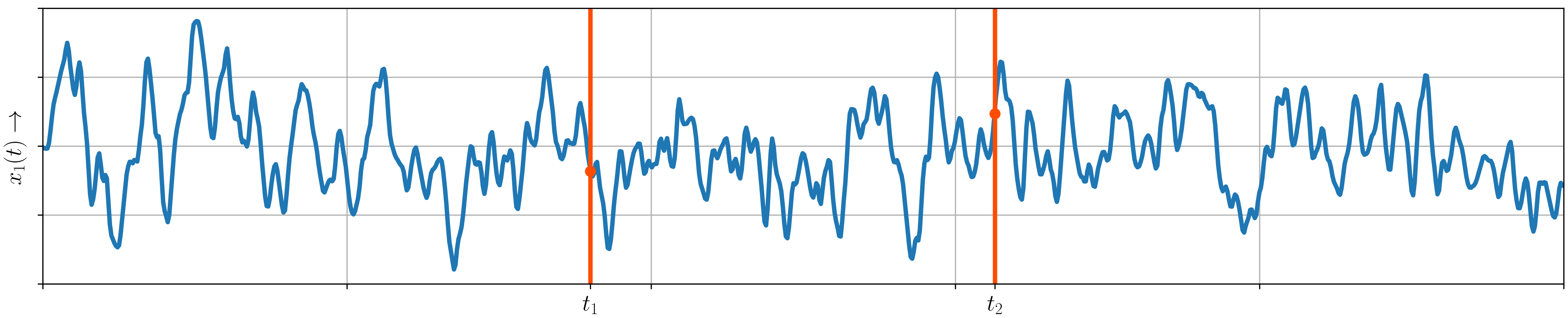
Vergleich eines Zufallsprozesses $X(\eta, t)$ an zwei Zeitpunkten t_1 und t_2

Autokorrelationsfunktion AKF (*engl. Autocorrelationfunction ACF*)

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\{X(\eta, t_1) \cdot X(\eta, t_2)\}$$

Autokovarianzfunktion (*engl. Autocovariancefunction ACV*)

$$\psi_{XX}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\{(X(\eta, t_1) - \mu_X(t_1)) \cdot (X(\eta, t_2) - \mu_X(t_2))\}$$



Eigenschaften der Autokorrelations- und Autokovarianzfunktion

Symmetrie

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(t_2, t_1)$$

$$\psi_{XX}(t_1, t_2) = \psi_{XX}(t_2, t_1)$$

Für $t_1 = t_2 = t$ entspricht Autokorrelationsfunktion der Momentanleistung

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(t, t) = \mathrm{E}\big\{(X(\eta, t))^2\big\} = \sigma_X^2(t) + \mu_X^2(t)$$

Für $t_1 = t_2 = t$ entspricht Autokovarianzfunktion der Varianz

$$\psi_{XX}(t_1, t_2) = \psi_{XX}(t, t) = \mathrm{E}\big\{(X(\eta, t) - \mu_X(t))^2\big\} = \sigma_X^2(t)$$

Für $t_1 = t_2 = t$ sind Autokorrelations- und Autokovarianzfunktion stets positiv

$$\varphi_{XX}(t, t) \geq 0 \qquad \psi_{XX}(t, t) \geq 0$$

Beispiel: Autokorrelationsfunktion bei Cosinus-Schwingung mit zufälliger Amplitude I

Zufallsprozess:

$$X(\eta, t) = A(\eta)\cos(\omega t + \phi)$$

Autokorrelationsfunktion (AKF):

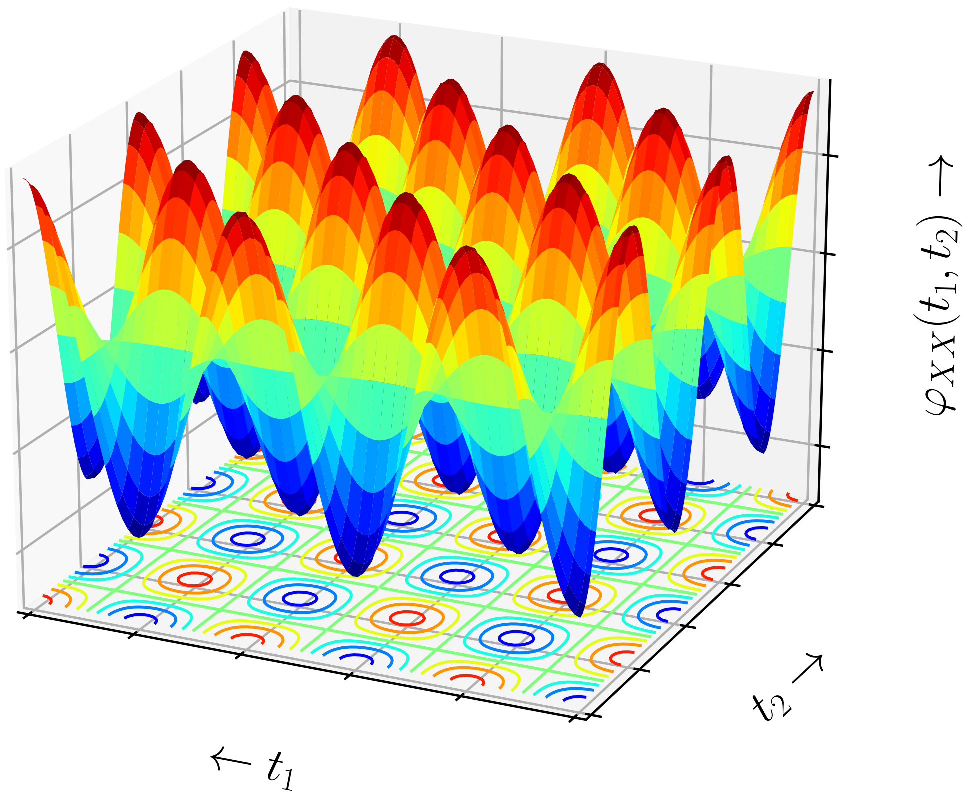
$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\{X(\eta, t_1) \cdot X(\eta, t_2)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a\cos(\omega t_1 + \phi) \cdot a\cos(\omega t_2 + \phi) f_X(x) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{0}^{A_0} a^2 \cos(\omega t_1 + \phi) \cdot \cos(\omega t_2 + \phi) f_A(a) \mathrm{d}a = \cos(\omega t_1 + \phi) \cdot \cos(\omega t_2 + \phi) \int\limits_{0}^{A_0} \frac{a^2}{A_0} \mathrm{d}a =$$

$$= \frac{1}{2}\big(\cos(\omega t_1 + \phi - \omega t_2 - \phi) + \cos(\omega t_1 + \phi + \omega t_2 + \phi)\big) \left[\frac{a^3}{3A_0}\right]_0^{A_0} =$$

$$= \frac{A_0^2}{6}\big(\cos(\omega(t_1 - t_2)) + \cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\phi)\big)$$

Beispiel: Autokorrelationsfunktion bei Cosinus-Schwingung mit zufälliger Amplitude II

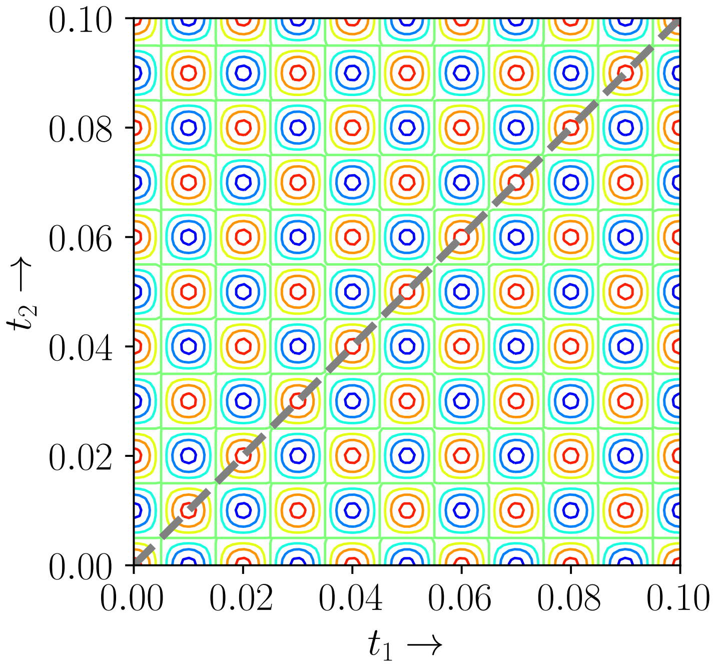


Beispiel: AKF bei Cosinus-Schwingung mit zufälliger Amplitude III

Für $t_1 = t_2 = t$, d.h. Diagonale der x-y-Ebene:

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(t, t) = \frac{A_0^2}{6}\big(\cos(\omega(t-t)) + \cos(\omega(t+t) + 2\phi)\big) = \frac{A_0^2}{6}\big(1 + \cos(2(\omega t + \phi))\big)$$

$$= \sigma_X^2(t) + \mu_X^2(t)$$



Beispiel: Autokorrelationsfunktion bei Cosinus-Schwingung mit zufälliger Phase I

Zufallsprozess:

$$X(\eta, t) = A_0 \cos(\omega t + \phi(\eta))$$

Autokorrelationsfunktion:

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\{X(\eta, t_1) \cdot X(\eta, t_2)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_0 \cos(\omega t_1 + \phi) \cdot A_0 \cos(\omega t_2 + \phi) f_X(x) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} A_0 \cos(\omega t_1 + \phi) \cdot A_0 \cos(\omega t_2 + \phi) \cdot f_\varphi(\varphi) \mathrm{d}\phi =$$

$$= A_0^2 \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} \big(\cos(\omega(t_1 - t_2)) + \cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\phi) \big) \frac{1}{2\pi} \mathrm{d}\phi =$$

Beispiel: Autokorrelationsfunktion bei Cosinus-Schwingung mit zufälliger Phase II

Fortsetzung zur Berechnung der Autokorrelationsfunktion:

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \frac{A_0^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega(t_1 - t_2)) + \cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\phi) \mathrm{d}\phi =$$

$$= \frac{A_0^2}{4\pi} \left[\phi \cos(\omega(t_1 - t_2)) + \frac{1}{2} \sin(\omega(t_1 + t_2) + 2\phi) \right]_0^{2\pi} =$$

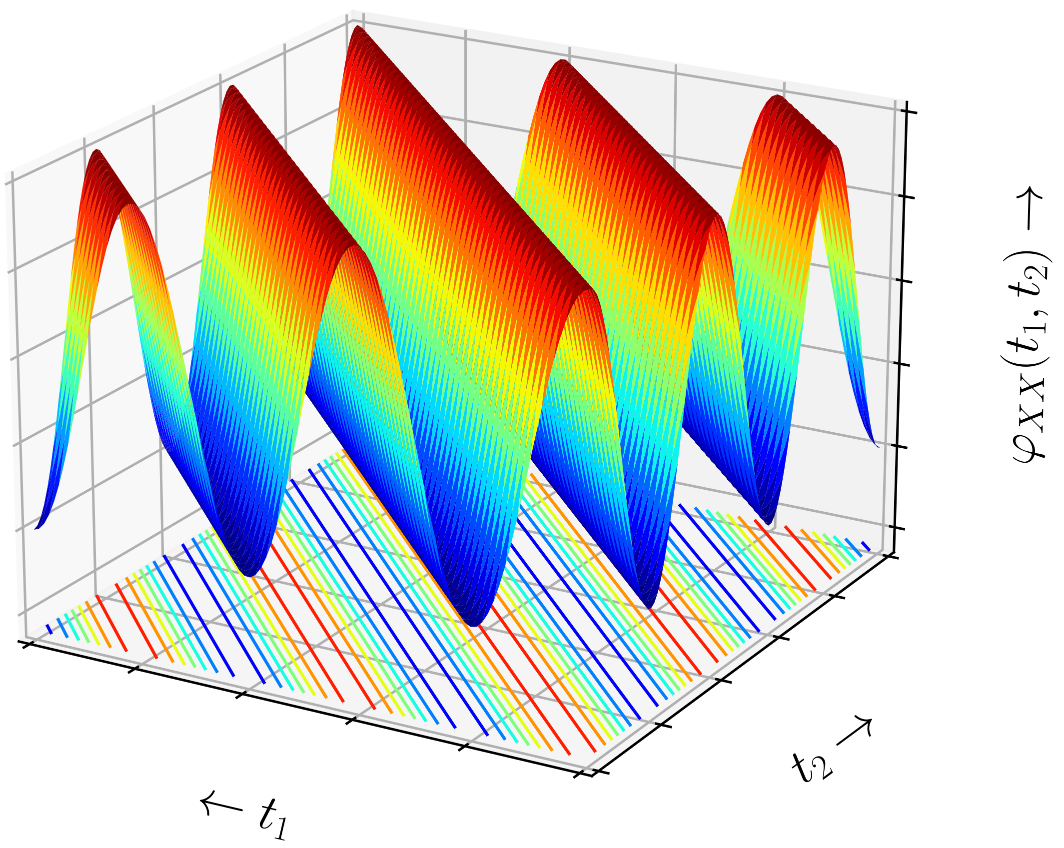
$$= \frac{A_0^2}{4\pi} \left(2\pi \cos(\omega(t_1 - t_2)) + \frac{1}{2} \sin(\omega(t_1 + t_2)) - \frac{1}{2} \sin(\omega(t_1 + t_2) \right) =$$

$$= \frac{A_0^2}{2} \cos(\omega(t_1 - t_2))$$

Hier ist die Autokorrelationsfunktion nur von der Zeitdifferenz $\tau = t_1 - t_2$ abhängig

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(\tau) = \frac{A_0^2}{2} \cos(\omega\tau)$$

Beispiel: Autokorrelationsfunktion bei Cosinus-Schwingung mit zufälliger Phase III

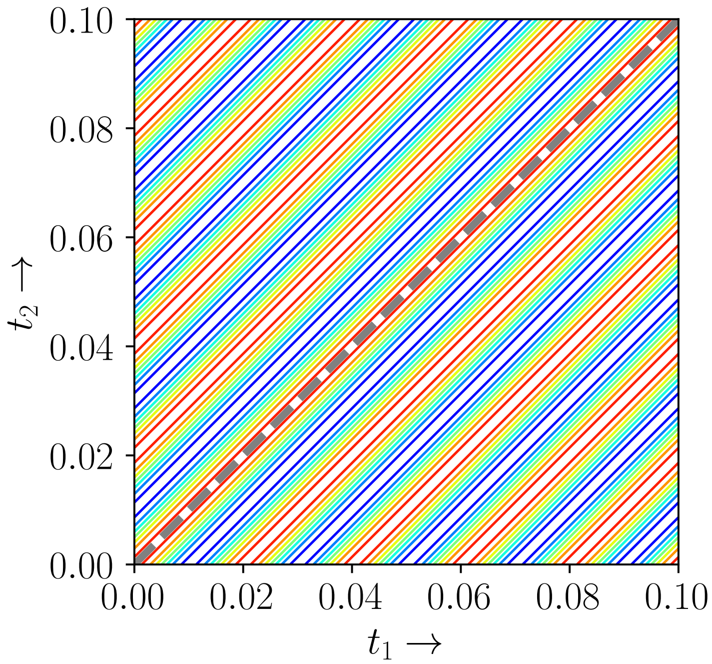


Beispiel: Autokorrelationsfunktion bei Cosinus-Schwingung mit zufälliger Phase IV

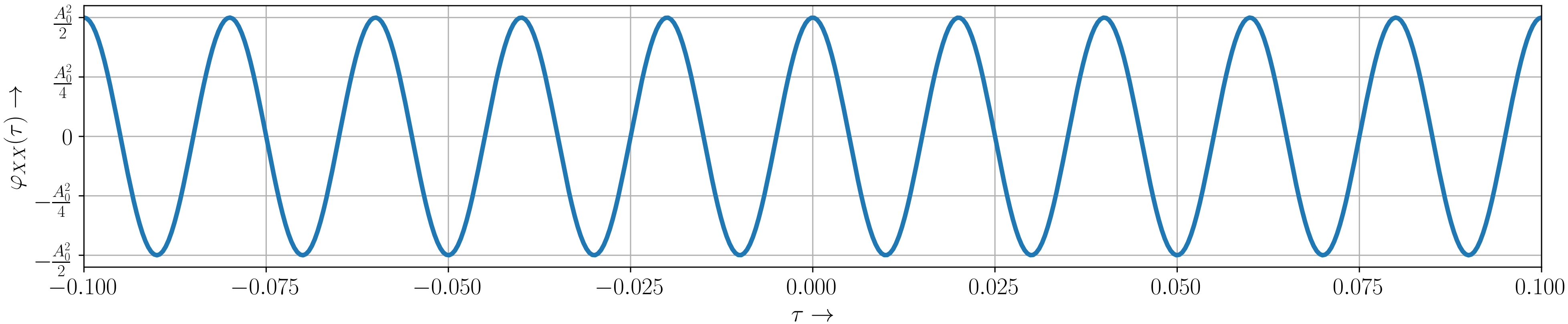
Für $t_1 = t_2$, d.h. Diagonale der x-y-Ebene folgt $\tau = 0$

$$\varphi_{XX}(\tau) = \frac{A_0^2}{2}\cos(\omega\tau) = \frac{A_0^2}{2} = \sigma_X^2$$

Zufallsprozesse, deren AKF nur von der Zeitdifferenz abhängen haben konstante Momentanleistung



Beispiel: Autokorrelationsfunktion bei Cosinus-Schwingung mit zufälliger Phase V



Kreuzkorrelationsfunktion und Kreuzkovarianzfunktion

Analog zur Definition von Autokorrelations- und Autokovarianzfunktion:

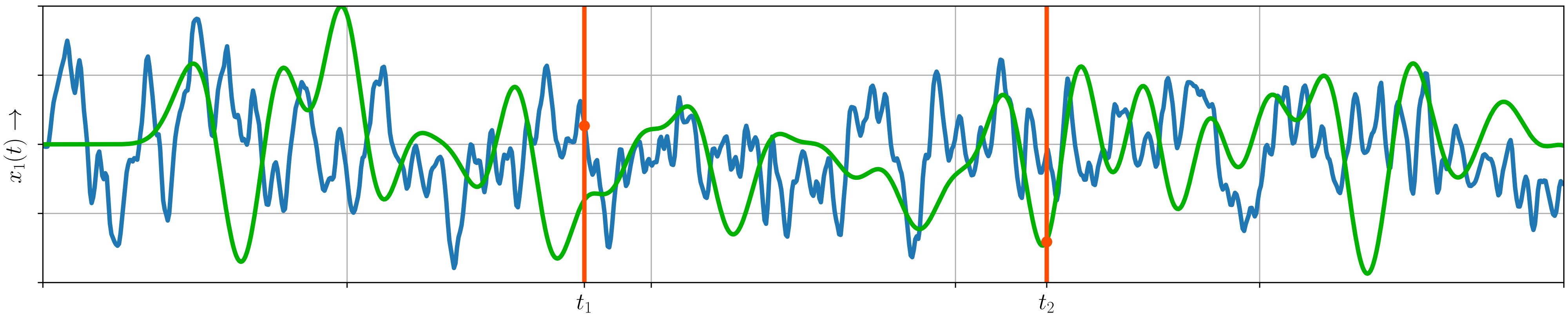
Vergleich zweier Zufallsprozesse $X(\eta, t)$ und $Y(\eta, t)$ an zwei Zeitpunkten t_1 und t_2

Kreuzkorrelationsfunktion KKF (*engl. Crosscorrelationfunction CCF*)

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\{X(\eta, t_1) \cdot Y(\eta, t_2)\}$$

Kreuzkovarianzfunktion (*engl. Crosscovariancefunction CCV*)

$$\psi_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\{(X(\eta, t_1) - \mu_X(t_1)) \cdot (Y(\eta, t_2) - \mu_Y(t_2))\}$$



Eigenschaften der Kreuzkorrelations- und Kreuzkovarianzfunktion

Symmetrie:

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \varphi_{YX}(t_2, t_1)$$

$$\psi_{XY}(t_1, t_2) = \psi_{YX}(t_2, t_1)$$

Unkorrelierte Prozesse: Zwei Zufallsprozesse $X(\eta, t)$ und $Y(\eta, t)$ sind unkorreliert falls

$$\psi_{XY}(t_1, t_2) = \varphi_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \cdot \mu_Y(t_2) = 0 \qquad \forall t_1, t_2$$

Orthogonale Prozesse: Zwei Zufallsprozesse $X(\eta, t)$ und $Y(\eta, t)$ sind orthogonal falls

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = 0 \qquad \forall t_1, t_2$$

Beispiel: Zwei Cosinus-Schwingungen mit unabhängigen zufälligen Phasen

$$X(\eta, t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1(\eta))$$

$$Y(\eta, t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2(\eta))$$

Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion:

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\{X(\eta, t_1) \cdot Y(\eta, t_2)\} = \mathrm{E}\{A_1 \cos(\omega_1 t_1 + \phi_1(\eta)) \cdot A_2 \cos(\omega_2 t_2 + \phi_2(\eta))\} =$$

$$= A_1 A_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_1 t_1 + \phi_1(\eta)) \cos(\omega_2 t_2 + \phi_2(\eta)) f_{\phi_1 \phi_2}(\phi_1, \phi_2) \mathrm{d}\phi_1 \mathrm{d}\phi_2$$

da beide Phasen stochastisch unabhängig folgt ($f_{\phi_1\phi_2}(\phi_1, \phi_2) = f_{\phi_1}(\phi_1) \cdot f_{\phi_2}(\phi_2)$)

$$= A_1 A_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_1 t_1 + \phi_1(\eta)) f_{\phi_1}(\phi_1) \mathrm{d}\phi_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_2 t_2 + \phi_2(\eta)) f_{\phi_2}(\phi_2) \mathrm{d}\phi_2 =$$

$$= 0$$

Stationäre Zufallsprozesse

Weißes Rauschen

Ein Zufallsprozess $X(\eta, t)$ wird als *weißer Rauschprozess* bezeichnet wenn

$$\psi_{XX}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \cdot \mu_X(t_2) = 0 \qquad \forall t_1 \neq t_2$$

D.h. die Werte des Zufallsprozesses zu unterschiedlichen Zeitpunkten t_1, t_2 sind unkorreliert.

Oft sind Rauschprozesse mittelwertfrei, d.h. $\mu_X(t) = 0$

$$\psi_{XX}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(t_1, t_2) = 0 \qquad \forall t_1 \neq t_2$$

Für mittelwertfreies weißes Rauschen gilt somit allgemein

$$\psi_{XX}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(t_1, t_2) = \sigma_X^2(t_1) \cdot \delta(t_1 - t_2)$$

Durch diese Bedingung sind beliebige Wertänderungen in beliebig kurzen Zeitpunkten möglich (z.B. $t_2 = t_1 + \Delta t$ mit $\Delta t \to 0$). Eine solche Wertänderung in infinitesimal kurzer Zeit bedeutet aber eine unendliche Bandbreite, weswegen der Zufallsprozess als weiß bezeichnet wird. Ein solcher Zufallsprozess ist selbstverständlich nicht realistisch. Allerdings spricht man von weißem Rauschen, falls das Spektrum des Zufallsprozesses innerhalb der betrachteten Bandbreite konstant ist.

Streng stationäre Zufallsprozesse I

Definition strenger Stationarität von Zufallsprozessen:

Ein Zufallsprozeß heiBt streng stationär, wenn seine statistischen Eigenschaften invariant gegenüber Verschiebungen der Zeit sind. Zwei Zufallsprozesse heiBen verbunden stationär, wenn beide stationär und ihre gemeinsamen statistischen Eigenschaften invariant gegenüber Verschiebungen der Zeit sind.

Damit gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die -verteilungsfunktion

$$F_X(x,t) = F_X(x, t+t_0) = F_X(x) \qquad f_x(x,t) = f_X(x, t+t_0) = f_X(x)$$

Folglich gilt für die Verbundwahrscheinlichkeit, die zwei Zeitpunkte miteinander verknüpft

$$f_{XX}(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_{XX}(x_1, x_2, t_1 - t_2) = f_{XX}(x_1, x_2, \tau) \qquad \tau = t_1 - t_2$$

Entsprechend gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zweier stationärer Prozesse

$$f_{XY}(x, y, t_1, t_2) = f_{XY}(x, y, t_1 - t_2) = f_{XY}(x, y, \tau) \qquad \tau = t_1 - t_2$$

Streng stationäre Zufallsprozesse II

Aufgrund der Bedingung für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für (streng) stationäre Zufallsprozesse sind Mittelwert und Varianz ebenfalls zeitinvariant

$$\mu_X(t) = \mu_X \qquad \sigma_X^2(t) = \sigma_X^2$$

Für die Autokorrelations- und Autokovarianzfunktion gilt somit

$$\begin{aligned} \varphi_{XX}(t_1, t_2) &= \varphi_{XX}(t+\tau, t) = \varphi_{XX}(\tau) \\ \psi_{XX}(t_1, t_2) &= \psi_{XX}(t+\tau, t) = \psi_{XX}(\tau) \end{aligned} \qquad \tau = t_1 - t_2$$

Entsprechend gilt für die Kreuzkorrelations- und Kreuzkovarianzfunktion

$$\begin{aligned} \varphi_{XY}(t_1, t_2) &= \varphi_{XY}(t+\tau, t) = \varphi_{XY}(\tau) \\ \psi_{XY}(t_1, t_2) &= \psi_{XY}(t+\tau, t) = \psi_{XY}(\tau) \end{aligned} \qquad \tau = t_1 - t_2$$

Schwach stationäre Zufallsprozesse I

Häufig sind in praktischen Anwendungen nur Mittelwert und Varianz sowie Auto- und Kreuzkorrelation von Interesse. Somit kann die Definition von stationären Zufallsprozessen abgeschwächt werden.

Ein Zufallsprozess wird als schwach stationär bezeichnet, wenn seine stochastischen Eigenschaften erster und zweiter Ordnung, d.h.

$$\mu_X \qquad \sigma_X^2 \qquad \varphi_{XX}(\tau) \qquad \psi_{XX}(\tau)$$

verschiebungsinvariant sind. Zwei Zufallsprozesse sind gemeinsam schwach stationär, wenn beide mindestens schwach stationär und die Verbundmomente

$$\varphi_{XY}(\tau) \qquad \psi_{XY}(\tau)$$

verschiebungsinvariant sind.

Schwach stationäre Zufallsprozesse II

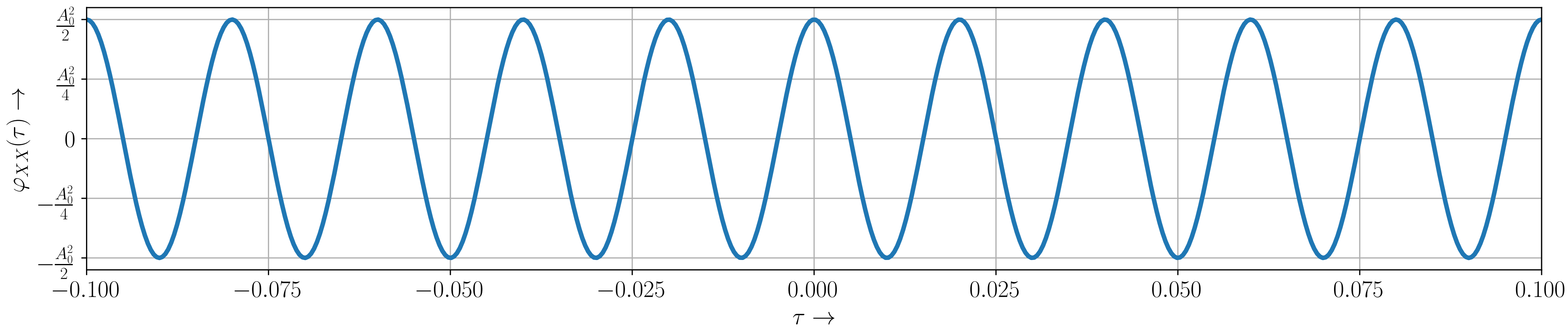
Um schwache Stationarität eines Zufallsprozesses zu beweisen genügt es zu zeigen dass

$$\mu_X(t) = \mu_X$$

und

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(\tau) \qquad \tau = t_1 - t_2$$

Vergleiche Beispiel *Cosinus-Schwingung mit zufälliger Phase*



Stationäre Rauschprozesse

Bei einem streng stationären Rauschprozess $X(\eta, t)$ sind die statistischen Eigenschaften zeitinvariant, d.h.

$$f_X(x,t) = f_X(x)$$

Wenn die die einzelnen Werte einer Sequenz dieses Rauschprozesses voneinander unabhängig sind, spricht man von *unabhängig identisch verteiltem* Rauschprozess(engl. *independent identically distributed*). Damit handelt es sich auch um einen weißen Rauschprozess.

Für schwach stationäres weißes Rauschen gilt für die Autokorrelationsfunktion

$$\varphi_{XX}(\tau) = \sigma_X^2 \cdot \delta(\tau)$$

Stationäres weißes Gauß'sches Rauschen

Gauß-verteilter Zufallsprozess wird ausschließlich durch Mittelwert μ_X und Varianz σ_X^2 beschrieben. Es genügt zu zeigen, dass der Zufallsprozess schwach stationär ist, da er damit automatisch auch streng stationär ist.

Eigenschaften der Korrelations- und Kovarianzfunktion bei schwacher Stationarität

Achsensymmetrie von Autokorrelations- und Autokovarianz- bzw. Kreuzkorrelations- und Kreuzkovarianzfunktion

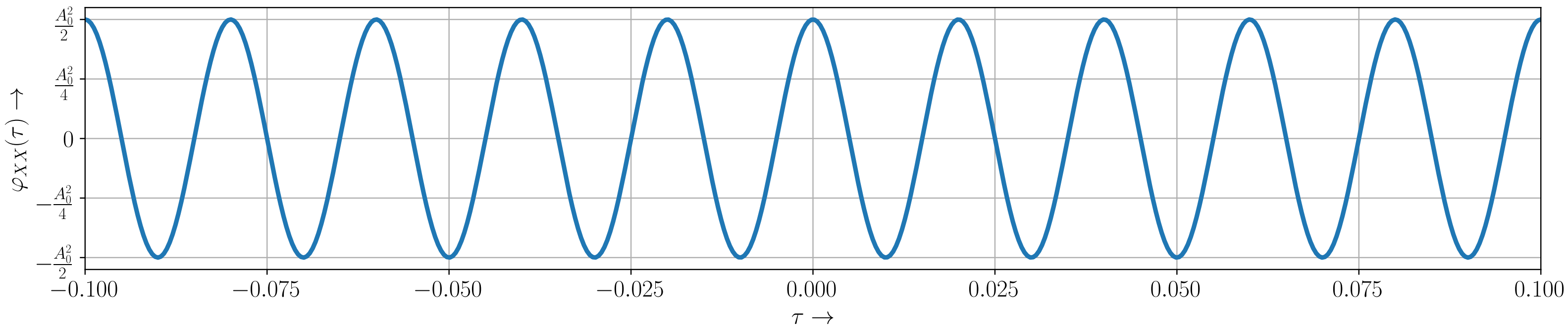
$$\varphi_{XX}(-\tau) = \varphi_{XX}(\tau) \qquad \varphi_{XY}(-\tau) = \varphi_{YX}(\tau)$$

$$\psi_{XX}(-\tau) = \psi_{XX}(\tau) \qquad \psi_{XY}(-\tau) = \psi_{YX}(\tau)$$

Autokorrelations- und Autokovarianzfunktion eines periodischen Zufallsprozesses sind ebenfalls periodisch.

Autokorrelations- und Autokovarianzfunktion haben ihr Maximum bei $\tau = 0$.

Vergleiche Beispiel *Cosinus-Schwingung mit zufälliger Phase*:



Zyklostationäre Zufallsprozesse

Ein Prozess ist *streng zyklostationär* falls alle Verteilungen invariant bezüglich Verschiebungen ganzzahliger Vielfachen einer Periode T sind.

$$F_X(x,t) = F_X(x,t+kT) \qquad f_X(x,t) = f_X(x,t+kT) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ein Prozess ist *schwach zyklostationär* falls alle Momente erster und zweiter Ordnung invariant bezüglich Verschiebungen ganzzahliger Vielfachen einer Periode T sind.

$$\mu_X(t) = \mu_X(t+kT) \qquad \phi_{XX}(\tau) = \phi_{XX}(\tau+kT) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Beispiele für zyklostationäre Zufallsprozesse

- Wetter
- Informationsübertragung in einem getakteten System

Ein zyklostationärer Zufallsprozess ist nicht notwendigerweise stationär.

Ergodizität I

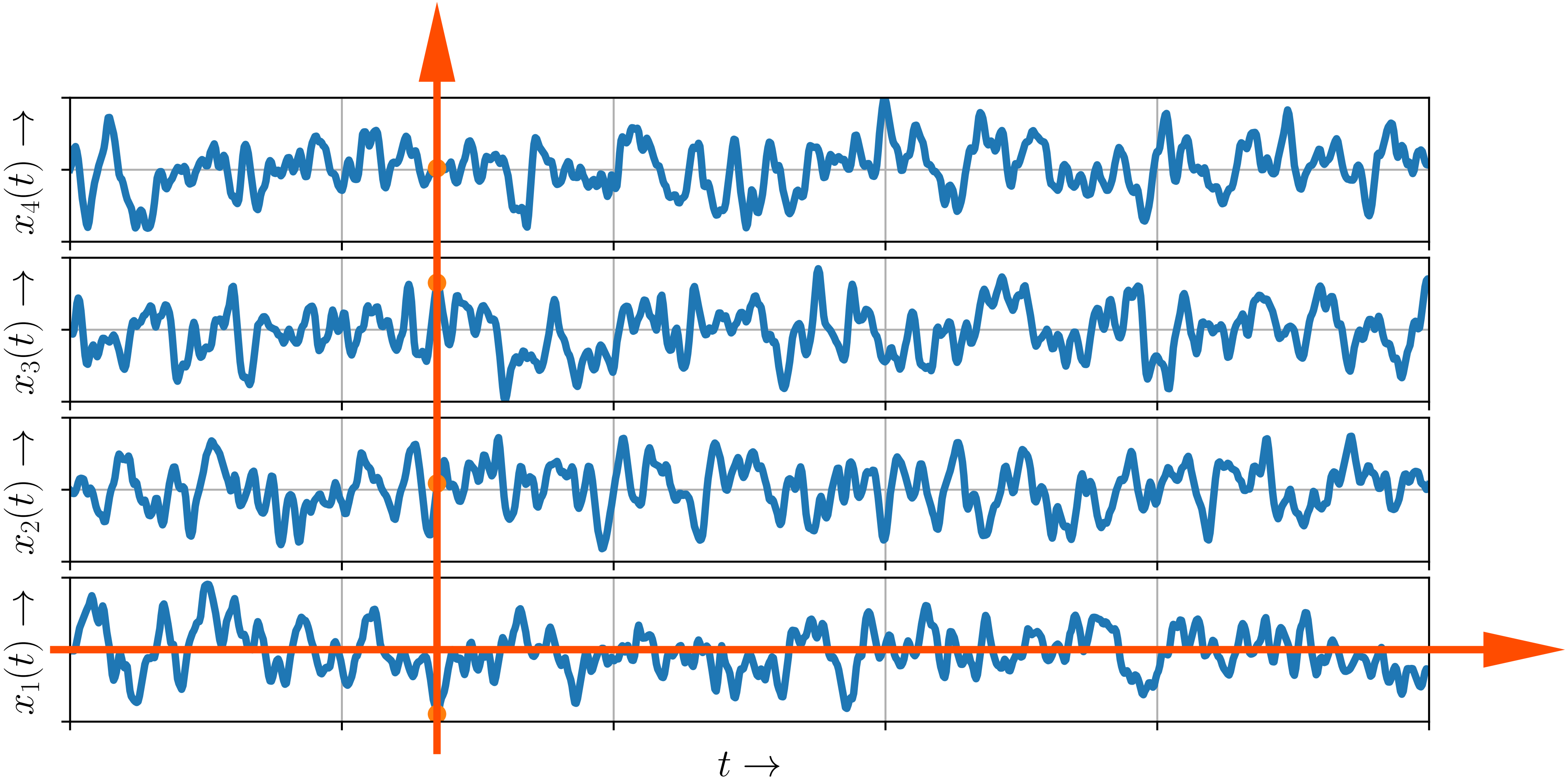
Für die Bestimmung von Mittelwert und Varianz bzw. der Korrelationsfunktionen eines Zufallsprozesses müssen alle Musterfunktionen bekannt sein.

Einschränkungen in praktischen Anwendungen

- Nur Untermenge an Musterfunktione steht zur Verfügung
- Musterfunktionen sind nur für endliche Zeiten t bekannt

Ein statinonärer Zufallsprozess $X(\eta, t)$ ist *ergodisch* wenn der zeitliche Mittelwert einer beliebigen Musterfunktion dem Ensemble-Mittelwert entspricht.

Ergodizität II



Ergodizität III

Zeitliche Mittelwert einer Musterfunktion

$$\overline{\mu}_X(\eta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} X(\eta, t)\mathrm{d}t$$

Mittlerer Erwartungswert über alle Musterfunktionen

$$\mathrm{E}\{\overline{\mu}_X(\eta)\} = \mathrm{E}\left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} X(\eta, t)\mathrm{d}t \right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} \mathrm{E}\{X(\eta, t)\}\,\mathrm{d}t = \mu_X$$

Damit ist zeitlicher Mittelwert ein erwartungstreuer Schätzwert für μ_X

Ergodizität IV

Ergodizität gilt aber nur, wenn zeitlicher Mittelwert für alle Musterfunktionen dem Ensemble-Mittelwert entspricht

$$\overline{\mu}_X(\eta) = \mu_X \qquad \forall \eta$$

Um dies zu zeigen muss zusätzlich die Varianz von $\overline{\mu}_X(\eta)$ gleich Null sein:

$$\sigma^2_{\overline{\mu}_X(\eta)} = 0$$

In praktischen Anwendungen ist das Beweisen von Ergodizität meist nicht möglich, da kein perfektes analytisches Modell des Zufallsprozesses existiert. Deswegen gilt Ergodizität häufig als Annahme über einen Zufallsprozess, um Mittelwert, Varianz und Korrelationsfunktionen überhaupt erst bestimmen zu können.

Ergodizität V

Berechnung von Mittelwert und Varianz ergodischer Zufallsprozesse

$$\mu_X = \mathrm{E}\{X(\eta,t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} X(\eta,t)\mathrm{d}t$$

$$\sigma_X^2 = \mathrm{E}\big\{(X(\eta,t)-\mu_X)^2\big\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} (X(\eta,t)-\mu_X)^2\mathrm{d}t$$

Autokorrelationsfunktion ergodischer Zufallsprozesse

$$\varphi_{XX}(\tau) = \mathrm{E}\{X(\eta,t+\tau)\cdot X(\eta,t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} X(\eta,t+\tau)\cdot X(\eta,t)\mathrm{d}t$$

Ergodizität - Leistungs- vs. Energiesignale

Leistungssignale $x(t)$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} x^2(t)\mathrm{d}t = P < \infty$$

Energiesignale $x(t)$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\mathrm{d}t = E < \infty$$

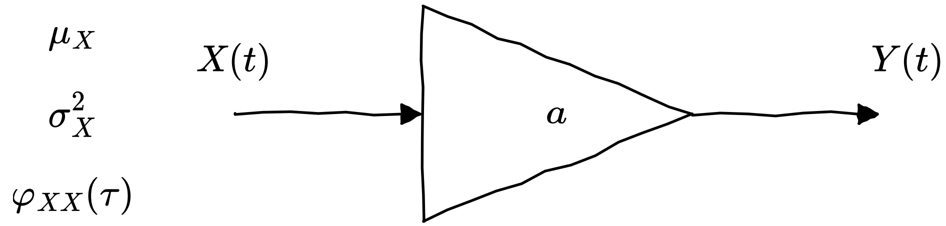
Für *ergodische Zufallsprozesse* $X(\eta, t)$ mit quadratischem Mittelwert ungleich Null:

$$\mathrm{E}\left\{X(\eta, t)^2\right\} \neq 0$$

müssen alle Musterfunktionen *Leistungssignale* sein.

Verarbeitung von stationären Zufallsprozessen

Skalierung mit einer Konstanten I



Erwartungswert des Ausgangsprozesses

$$\mu_Y = \mathrm{E}\{Y(t)\} = \mathrm{E}\{a \cdot X(t)\} = a \cdot \mathrm{E}\{X(t)\} = a \cdot \mu_X$$

Varianz des Ausgangsprozesses

$$\sigma_Y^2 = \mathrm{E}\big\{(Y(t) - \mu_Y)^2\big\} = \mathrm{E}\big\{(a \cdot X(t) - a \cdot \mu_X)^2\big\} = \mathrm{E}\big\{a^2 \cdot (X(t) - \mu_X)^2\big\} = a^2 \cdot \mathrm{E}\big\{(X(t) - \mu_X)^2\big\} =$$

$$= a^2 \cdot \sigma_X^2$$

Autokorrelationsfunktion des Ausgangsprozesses

$$\varphi_{YY}(\tau) = \mathrm{E}\{Y(t+\tau) \cdot Y(t)\} = \mathrm{E}\{a \cdot X(t+\tau) \cdot a \cdot X(t)\} = a^2 \cdot \mathrm{E}\{X(t+\tau) \cdot X(t)\} =$$

$$= a^2 \varphi_{XX}(\tau)$$

Skalierung mit einer Konstanten II

Kreuzkorrelationsfunktionen zwischen Eingangs- und Ausgangsprozess

$$\varphi_{YX}(\tau) = \mathrm{E}\{Y(t+\tau) \cdot X(t)\} = \mathrm{E}\{a \cdot X(t+\tau) \cdot X(t)\} = a \cdot \mathrm{E}\{X(t+\tau) \cdot X(t)\} =$$

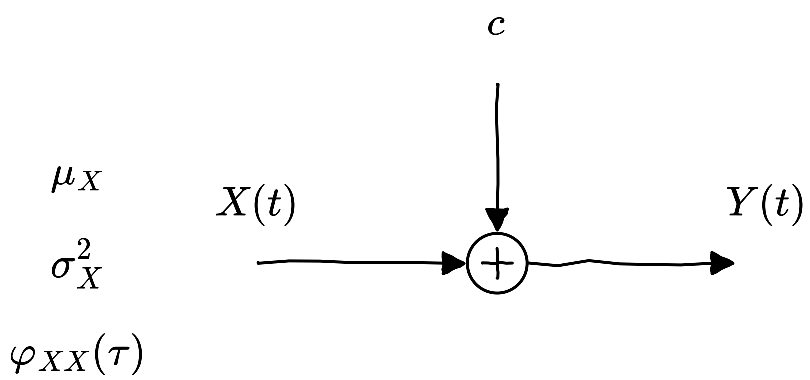
$$= a \cdot \varphi_{XX}(\tau)$$

Ausnutzung der Symmetrie der Korrelationsfunktionen

$$\varphi_{XY}(\tau) = \varphi_{YX}(-\tau) = a \cdot \varphi_{XX}(-\tau) = a \cdot \varphi_{XX}(\tau)$$

Addition einer Konstanten I

Addition einer zeitunabhängigen Konstanten c



Erwartungswert des Ausgangsprozesses

$$\mu_Y = \mathrm{E}\{Y(t)\} = \mathrm{E}\{X(t) + c\} = \mathrm{E}\{X(t)\} + \mathrm{E}\{c\} = \mu_X + c$$

Varianz des Ausgangsprozesses

$$\sigma_Y^2 = \mathrm{E}\big\{(Y(t) - \mu_Y)^2\big\} = \mathrm{E}\big\{(X(t) + c - \mu_X - c)^2\big\} = \mathrm{E}\big\{(X(t) - \mu_X)^2\big\} =$$

$$= \sigma_X^2$$

Addition einer Konstanten II

Autokorrelationsfunktion des Ausgangsprozesses

$$\varphi_{YY}(\tau) = \mathrm{E}\{Y(t+\tau) \cdot Y(t)\} = \mathrm{E}\{(X(t+\tau)+c) \cdot (X(t)+c)\} =$$

$$= \mathrm{E}\big\{X(t+\tau) \cdot X(t) + X(t+\tau) \cdot c + c \cdot X(t+\tau) + c^2\big\} =$$

$$= \varphi_{XX}(\tau) + 2 \cdot c \cdot \mu_X + c^2$$

Kreuzkorrelationsfunktionen zwischen Eingangs- und Ausgangsprozess

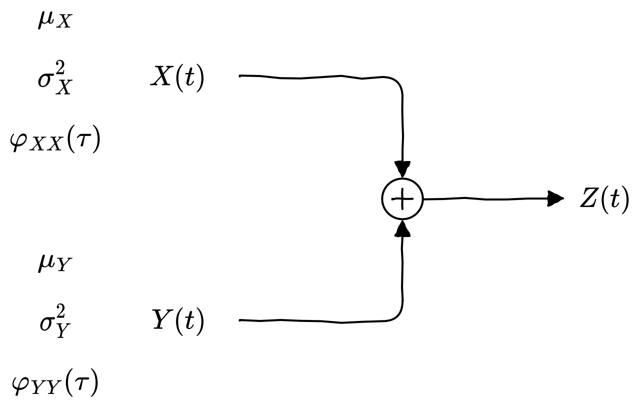
$$\varphi_{YX}(\tau) = \mathrm{E}\{Y(t+\tau) \cdot X(t)\} = \mathrm{E}\{(X(t+\tau)+c) \cdot X(t)\} =$$

$$= \mathrm{E}\{X(t+\tau) \cdot X(t) + c \cdot X(t)\} =$$

$$= \varphi_{XX}(\tau) + c \cdot \mu_X = \varphi_{XY}(\tau)$$

Addition von zwei Zufallsprozessen I

Addition von zwei paarweisen statistisch unabhängigen Zufallsprozessen $X(t)$ und $Y(t)$



Erwartungswert des Ausgangsprozesses

$$\mu_Z = \mathrm{E}\{Z(t)\} = \mathrm{E}\{X(t) + Y(t)\} = \mathrm{E}\{X(t)\} + \mathrm{E}\{Y(t)\} = \mu_X + \mu_Y$$

Varianz des Ausgangsprozesses

$$\sigma_Z^2 = \mathrm{E}\big\{(Z(t) - \mu_Z)^2\big\} = \mathrm{E}\big\{(X(t) + Y(t) - \mu_X - \mu_Y)^2\big\} = \mathrm{E}\big\{((X(t) - \mu_X) + (Y(t) - \mu_Y))^2\big\} =$$

$$= \mathrm{E}\big\{(X(t) - \mu_X)^2 + (Y(t) - \mu_Y)^2 + 2 \cdot (X(t) - \mu_X) \cdot (Y(t) - \mu_Y)\big\} = \ldots$$

Addition von zwei Zufallsprozessen II

$$
\begin{aligned}
\sigma_Z^2 = \ldots = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2 \cdot \mathrm{E}\{(X(t) - \mu_X) \cdot (Y(t) - \mu_Y)\} = \\
&= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2 \cdot \mathrm{E}\{X(t) \cdot Y(t) - X(t) \cdot \mu_Y - \mu_X \cdot Y(t) + \mu_X \mu_Y\} = \\
&= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2 \cdot \mathrm{E}\{X(t) \cdot Y(t)\} - 2 \cdot \mathrm{E}\{X(t) \cdot \mu_Y\} - 2 \cdot \mathrm{E}\{\mu_X \cdot Y(t)\} + 2 \cdot \mathrm{E}\{\mu_X \mu_Y\} = \\
&= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2 \cdot \mathrm{E}\{X(t)\} \cdot \mathrm{E}\{Y(t)\} - 2 \cdot \mu_Y \cdot \mathrm{E}\{X(t)\} - 2 \cdot \mu_X \cdot \mathrm{E}\{Y(t)\} + 2\mu_X \mu_Y = \\
&= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\mu_X \mu_Y - 2\mu_X \mu_Y - 2\mu_X \mu_Y + 2\mu_X \mu_Y = \\
&= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2
\end{aligned}
$$

Addition von zwei Zufallsprozessen III

Autokorrelationsfunktion des Ausgangsprozesses

$$\varphi_{ZZ}(\tau) = \mathrm{E}\{Z(t+\tau)\cdot Z(t)\} = \mathrm{E}\{(X(t+\tau)+Y(t+\tau))\cdot(X(t)+Y(t))\} =$$
$$= \mathrm{E}\{X(t+\tau)\cdot X(t) + X(t+\tau)\cdot Y(t) + X(t)\cdot Y(t+\tau) + Y(t+\tau)\cdot Y(t)\} =$$
$$= \varphi_{XX}(\tau) + \varphi_{XY}(\tau) + \varphi_{YX}(\tau) + \varphi_{YY}(\tau)$$

Da $X(t)$ und $Y(t)$ statistisch unabhängig sind gilt für die jeweiligen Kreuzkorrelationsfunktionen

$$\varphi_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\{X(t+\tau)\cdot Y(t)\} = \mathrm{E}\{X(t+\tau)\}\cdot\mathrm{E}\{Y(t)\} = \mu_X\mu_Y \qquad \text{und} \qquad \varphi_{YX} = \mu_X\mu_Y$$

Somit ist die Autokorrelationsfunktion von $Z(t)$

$$\varphi_{ZZ}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) + \varphi_{XY}(\tau) + \varphi_{YX}(\tau) + \varphi_{YY}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) + \varphi_{YY}(\tau) + 2\mu_X\mu_Y$$

Addition von zwei Zufallsprozessen IV

Die Kreuzkorrelation zwischen $Z(t)$ und einem der Eingänge (z.B. $X(t)$) ist nun

$$\varphi_{ZX}(\tau) = \mathrm{E}\{Z(t+\tau) \cdot X(t)\} = \mathrm{E}\{(X(t+\tau) + Y(t+\tau)) \cdot X(t)\} =$$

$$= \mathrm{E}\{X(t+\tau) \cdot X(t) + Y(t+\tau) \cdot X(t)\} = \varphi_{XX}(\tau) + \mathrm{E}\{Y(t+\tau)\} \cdot \mathrm{E}\{X(t)\} =$$

$$= \varphi_{XX}(\tau) + \mu_X \mu_Y$$

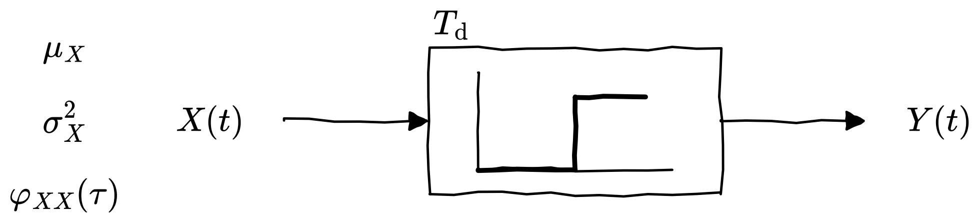
Für orthogonale Zufallsprozesse (d.h. $X(t)$ und $Y(t)$ unabhängig und zumindest einer mittelwertfrei)

$$\varphi_{ZZ}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) + \varphi_{YY}(\tau)$$

$$\varphi_{ZX}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau)$$

Zeitliche Verzögerung eines Zufallsprozesses I

Verzögerung des Eingangssignals um die Zeitdauer T_d



Erwartungswert des Ausgangsprozesses

$$\mu_Y = \mathrm{E}\{Y(t)\} = \mathrm{E}\{X(t - T_\mathrm{d})\} = \mu_X$$

Varianz des Ausgangsprozesses

$$\sigma_Y^2 = \mathrm{E}\big\{(Y(t) - \mu_Y)^2\big\} = \mathrm{E}\big\{(X(t - T_\mathrm{d}) - \mu_X)^2\big\} = \sigma_X^2$$

Autokorrelationsfunktion des Ausgangsprozesses

$$\varphi_{YY}(\tau) = \mathrm{E}\{Y(t+\tau) \cdot Y(t)\} = \mathrm{E}\{X(t - T_\mathrm{d} + \tau) \cdot X(t - T_\mathrm{d})\} =$$

$$= \varphi_{XX}(t - T_\mathrm{d} + \tau - (t - T_\mathrm{d})) = \varphi_{XX}(\tau)$$

Zeitliche Verzögerung eines Zufallsprozesses II

Kreuzkorrelationsfunktionen zwischen Eingangs- und Ausgangsprozess

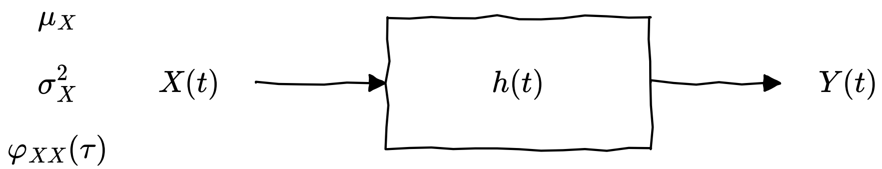
$$\varphi_{YX}(\tau) = \mathrm{E}\{Y(t+\tau)\cdot X(t)\} = \mathrm{E}\{X(t-T_\mathrm{d}+\tau)\cdot X(t)\} =$$

$$= \varphi_{XX}(t-T_\mathrm{d}+\tau-t) = \varphi_{XX}(\tau-T_\mathrm{d})$$

$$\varphi_{XY}(\tau) = \varphi_{YX}(-\tau) = \varphi_{XX}(-\tau-T_\mathrm{d}) = \varphi_{XX}(-(\tau+T_\mathrm{d})) = \varphi_{XX}(\tau+T_\mathrm{d})$$

Verarbeitung mit LTI System I

Verarbeitung mit einem linearen zeitinvarianten System mit Impulsantwort $h(t)$



Mittelwert des Ausgangsprozesses

$$\mu_Y = \mathrm{E}\{Y(t)\} = \mathrm{E}\{X(t) * h(t)\} = \mathrm{E}\left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X(t-\tau) \cdot h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}\{X(t-\tau) \cdot h(\tau)\}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}\{X(t-\tau)\} \cdot h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mu_X \cdot h(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \mu_X \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Verarbeitung mit LTI System II

Kreuzkorrelationsfunktionen zwischen Eingangs- und Ausgangsprozess

$$\varphi_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\{X(t+\tau)\cdot Y(t)\} = \mathrm{E}\{X(t+\tau)\cdot h(t) * X(t)\} =$$

$$= \mathrm{E}\left\{X(t+\tau)\cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)\cdot X(t-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right\} = \mathrm{E}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)\cdot X(t+\tau)\cdot X(t-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)\cdot \mathrm{E}\{X(t+\tau)\cdot X(t-\vartheta)\}\,\mathrm{d}\vartheta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)\cdot \mathrm{E}\{X(t+\tau+\vartheta)\cdot X(t)\}\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)\cdot \varphi_{XX}(\tau+\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)\cdot \varphi_{XX}(-\tau-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = h(-\tau) * \varphi_{XX}(\tau)$$

Aus der Symmetrieeigenschaft der Kreuzkorrelationsfunktion folgt

$$\varphi_{YX}(\tau) = \varphi_{XY}(-\tau) = h(\tau) * \varphi_{XX}(\tau)$$

Verarbeitung mit LTI System III

Autokorrelationsfunktion des Ausgangsprozesses

$$\varphi_{YY}(\tau) = \mathrm{E}\{Y(t+\tau)\cdot Y(t)\} = \mathrm{E}\{Y(t+\tau)\cdot h(t) \ast X(t)\} = h(-\tau) \ast \varphi_{YX}(\tau) =$$

$$= h(-\tau) \ast h(t) \ast \varphi_{XX}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) \ast \Big(h(\tau) \ast h(-\tau)\Big) =$$

$$= \varphi_{XX}(\tau) \ast \varphi_{hh}(\tau)$$

Mit der *Filterautokorrelation*

$$\varphi_{hh}(\tau) = h(\tau) \ast h(-\tau)$$

Eigenschaften der Filterautokorrelationsfunktion:

- deterministische Funktion
- Berechnung erfolgt über Faltungsintegral und nicht über Erwartungswertoperator
- gerade Funktion, d.h. $\varphi_{hh}(\tau) = \varphi_{hh}(-\tau)$

Analyse von Zufallsprozessen im Frequenzbereich

Schwach stationäre Prozesse im Frequenzbereich

Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion ergibt das *Leistungsdichtespektrum*:

$$\Phi_{XX}(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi_{XX}(\tau)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{XX}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

Integral des *Leistungsdichtespektrums* über alle Frequenzen ergibt die Leistung des Zufallsprozesses

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{XX}(\omega)\mathrm{d}\omega = \varphi_{XX}(0) = \mathrm{E}\big\{(X(t))^2\big\} = P$$

Analog dazu lässt sich ein *Kreuzleistungsdichtespektrum* defininieren

$$\Phi_{XY}(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi_{XY}(\tau)\}$$

Eigenschaften des Leistungsdichtespektrums

Aus der Symmetrieeigenschaft der Autokorrelationsfunktion folgt:

- Leistungsdichtespektrum ist gerade
- Leistungsdichtespektrum ist reell

$$\varphi_{XX}(\tau) = \varphi_{XX}(-\tau) \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_{XX}(\omega) = \Phi_{XX}(-\omega) \qquad \mathrm{Im}\{\Phi_{XX}(\omega)\} = 0$$

Selbstverständlich ist das Leistungsdichtespektrum positiv: $\Phi_{XX}(\omega) \geq 0$

Für das Kreuzleistungsdichtespektrum gilt

$$\Phi_{XY}(\omega) = \Phi_{YX}(-\omega)$$

Weißes Rauschen

Gegeben sei ein stationärer und weißer Rauschprozess $N(t)$ mit

$$\varphi_{NN}(\tau) = N_0 \cdot \delta(\tau)$$

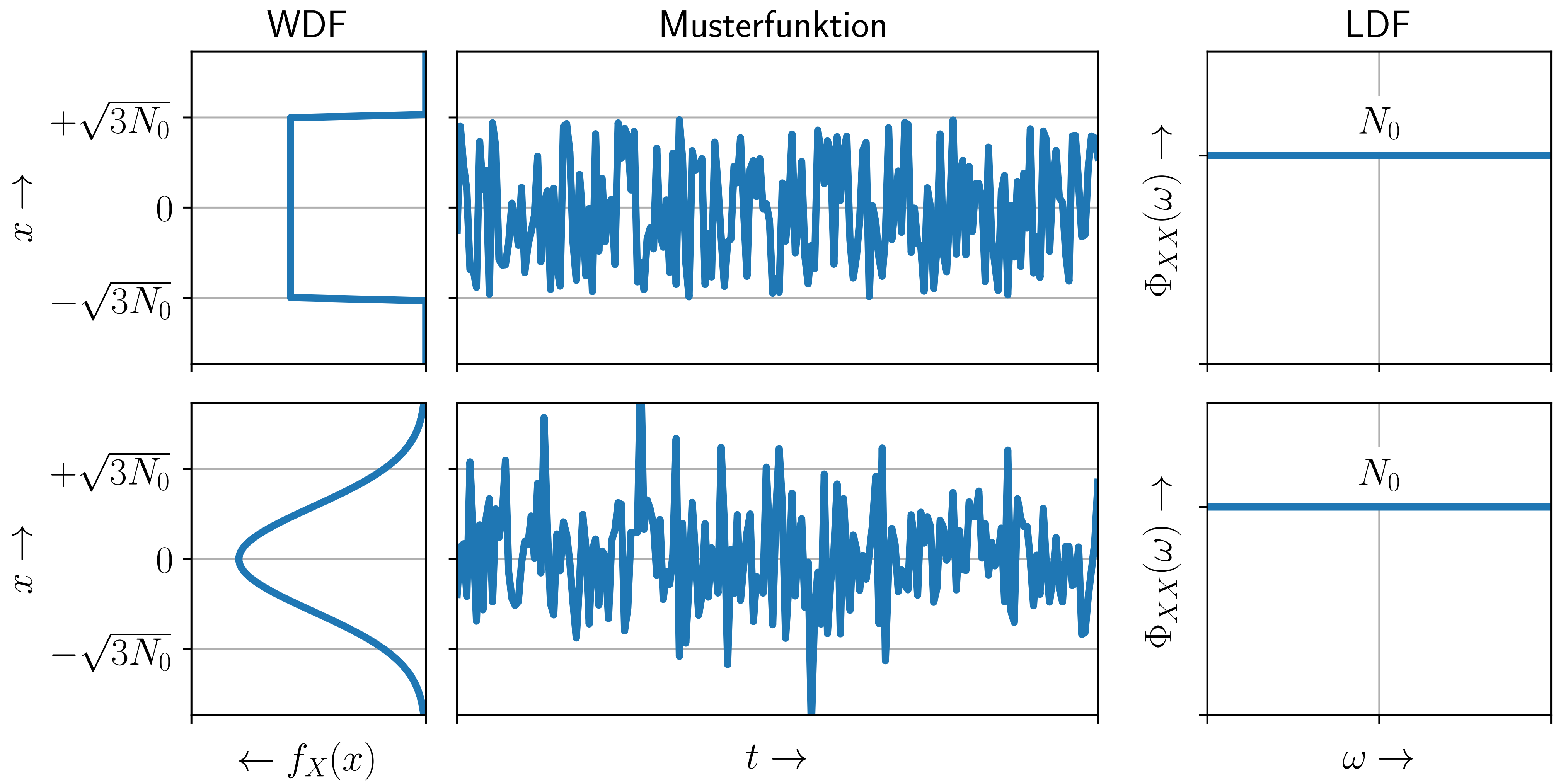
Das Leistungsdichtespektrum dieses Prozesses ist

$$\Phi_{NN}(\omega) = \mathcal{F}\{N_0 \cdot \delta(\tau)\} = N_0$$

Anmerkungen zum Weißen Rauschen

- Ausdruck *weiß* kommt von der Assoziation mit weißem Licht (konstante Frequenz im sichtbaren Bereich)
- Ideales weißes Rauschen hat unendliche Bandbreite und besitzt somit unendliche mittlere Leistung
- Ein Rauschprozess wird aus *weiß* bezeichnet, wenn LDS innerhalb der betrachteten Bandbreite konstant ist
- Leistungsdichtespektrum gibt keinerlei Aussage über Form der WDF des Prozesses

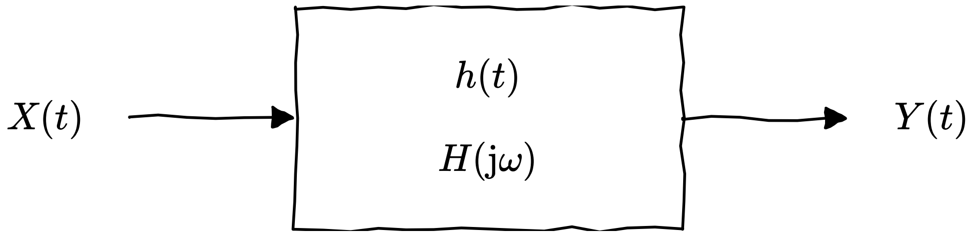
Weißes Rauschen - WDF, Musterfunktion und LDF



Verarbeitung von Zufallsprozessen mit linearen zeitinvarianten Systemen

Verarbeitung eines stationären Zufallsprozesses $X(t)$ mittels eines LTI-Systems beschreiben durch

- Impulsantwort $h(t)$ bzw.
- Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich $H(s)$



Analyse der stochastischen Eigenschaften des Ausgangsprozesses $Y(t)$

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_Y(y)$
- Mittelwert μ_Y und Varianz σ_Y^2
- Kreuzkorrelation und Kreuzleistungsdichtespektrum zwischen Eingang und Ausgang $\varphi_{XY}(\tau)$ und $\Phi_{XY}(\omega)$
- Autokorrelation und Leistungsdichtespektrum des Ausgangsprozesses $\varphi_{YY}(\tau)$ und $\Phi_{YY}(\omega)$

Statistische Eigenschaften des Ausgangsprozesses

1. Unabhängig von den Stationaritätseigenschaften von $X(t)$ entsteht der Ausgangsprozess durch (gewichtete) Überlagerung des Eingangsprozesses. Nach dem *zentralen Grenzwertsatz* strebt $Y(t)$ näherungsweise zu einem Gauß-verteilten Zufallsprozess.
2. Falls $X(t)$ ein (schwach) stationärer Zufallsprozess so ist $Y(t)$ die Menge aller gefilterter Musterfunktionen von $X(t)$ und somit ebenfalls (schwach) stationär
3. Wenn $X(t)$ ein stationärer weißer Rauschprozess ist, handelt es sich bei $Y(t)$ ebenfalls um einen stationären Rauschprozess. Allerdings können sich Mittelwert, Varianz und Autokorrelationsfunktion bzw. Leistungsdichtespektrum unterscheiden.

Korrelationsfunktionen und Leistungsdichtesprektrum I

Für die Auto- un Kreuzkorrelationsfunktionen gilt

$$\varphi_{YY}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) \ast h(\tau) \ast h(-\tau) = \varphi_{XX}(\tau) \ast \varphi_{hh}(\tau)$$

$$\varphi_{YX}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) \ast h(\tau)$$

$$\varphi_{XY}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) \ast h(-\tau)$$

Damit folgt sofort für das Kreuzleistungsdichtespektrum

$$\Phi_{YX}(\omega) = \Phi_{XX}(\omega) \cdot H(\mathrm{j}\omega)$$

Annahme: Alle Signale und Übertragungsfunktionen sind rein reell

$$\mathcal{F}\{h(-t)\} = H(-\mathrm{j}\omega) = H^*(\mathrm{j}\omega)$$

Damit gilt für das umgekehrte Kreuzleistungsdichtespektrum rein reeller Zufallsprozesse

$$\Phi_{XY}(\omega) = \Phi_{XX}(\omega) \cdot H^*(\mathrm{j}\omega)$$

Korrelationsfunktionen und Leistungsdichtesprektrum II

Aus der Berechnung des Kreuz-LDS folgt für das *Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals*

$$\Phi_{YY}(\omega) = \Phi_{XY}(\omega) \cdot H(\mathrm{j}\omega) = \Phi_{YX}(\omega) \cdot H^*(\mathrm{j}\omega) = \Phi_{XX}(\omega) \cdot H(\mathrm{j}\omega) \cdot H^*(\mathrm{j}\omega) =$$

$$= \Phi_{XX}(\omega) \cdot |H(\mathrm{j}\omega)|^2$$

Die Autokorrelationsfunktion ergibt sich nun über die inverse Fourier-Transformation

$$\varphi_{YY}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\Phi_{YY}(\omega)\} = \varphi_{XX}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = \varphi_{XX}(\tau) * \Big(h(\tau) * h(-\tau)\Big) =$$

$$= \varphi_{XX}(\tau) * \varphi_{hh}(\tau)$$

Mit der *Filterautokorrelation*

$$\varphi_{hh}(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}\{\cdot\}} \quad |H(\mathrm{j}\omega)|^2$$

Mittelwert und Varianz des Ausgangsprozesses

Für den Mittelwert des Ausgangsprozesses $Y(t)$ ergibt sich

$$\mu_Y = \mathrm{E}\{Y(t)\} = \mathrm{E}\{X(t) * h(t)\} = \mathrm{E}\left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X(t-\vartheta) \cdot h(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}\{X(t-\vartheta) \cdot h(\vartheta)\}\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}\{X(t-\vartheta)\} \cdot h(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \mu_X \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \mu_X \cdot H(0)$$

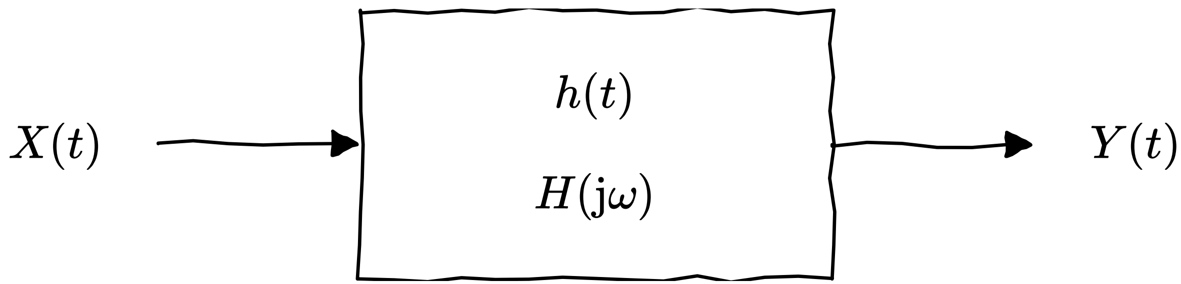
Für den Varianz des Ausgangsprozesses $Y(t)$ ergibt sich

$$\sigma_Y^2 = \mathrm{E}\big\{(Y(t) - \mu_Y)^2\big\} = \mathrm{E}\big\{Y(t)^2\big\} - \mu_Y^2 = \varphi_{YY}(\tau)\Big|_{\tau=0} - \mu_Y^2 = \varphi_{hh}(\tau) * \varphi_{XX}(\tau)\Big|_{\tau=0} - \mu_Y^2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{hh}(-\vartheta) \cdot \varphi_{XX}(0)\,\mathrm{d}\vartheta - \mu_Y^2 = (\sigma_X^2 + \mu_X^2) \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{hh}(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta - \mu_Y^2 =$$

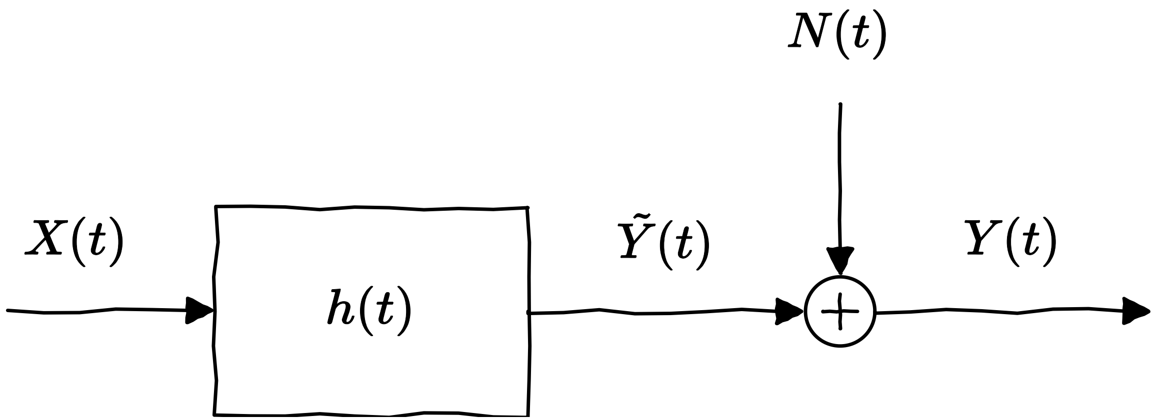
$$= (\sigma_X^2 + \mu_X^2) \cdot |H(0)|^2 - \mu_X^2 \cdot |H(0)|^2 = \sigma_X^2 \cdot |H(0)|^2$$

Überblick zur Verarbeitung stochastischer Prozesse über LTI-Systeme



Zeitbereich	Frequenzbereich
$\varphi_{XX}(\tau) = \mathrm{E}\{X(t) \cdot X(t+\tau)\}$	$\Phi_{XX}(\omega)$
$\varphi_{YX}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) \ast h(\tau)$	$\Phi_{YX}(\omega) = \Phi_{XX}(\omega) \cdot H(\mathrm{j}\omega)$
$\varphi_{XY}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) \ast h(-\tau)$	$\Phi_{XY}(\omega) = \Phi_{XX}(\omega) \cdot H^*(\mathrm{j}\omega)$
$\varphi_{YY}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) \ast h(\tau) \ast h(-\tau)$	$\Phi_{YY}(\omega) = \Phi_{XX}(\omega) \cdot H(\mathrm{j}\omega) \cdot H^*(\mathrm{j}\omega)$
$\varphi_{hh}(\tau) = h(\tau) \ast h(-\tau)$	$\lvert H(\mathrm{j}\omega)\rvert^2$
$\varphi_{YY}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) \ast \varphi_{hh}(\tau)$	$\Phi_{YY}(\omega) = \Phi_{XX}(\omega) \cdot \lvert H(\mathrm{j}\omega)\rvert^2$

Beispiel: Systemidentifikation mit additivem Rauschen I



Ein unbekanntes System mit Impulsantwort $h(t)$ soll identifiziert werden. Dazu wird am Eingang ein Testsignal $X(t)$ in Form eines weißen Gauß-verteilten Zufallsprozesses $X(t)$ mit konstanter spektraler Rauschleistungsdichte X_0 angelegt.

Berechnung der Korrelation zwischen Eingang und Ausgang:

$$\varphi_{YX}(\tau) = \varphi_{\tilde{Y}X}(\tau) + \varphi_{NX}(\tau)$$

Da additives Rauschen $N(t)$ mittelwertfrei und unabhängig von $X(t)$ folgt $\varphi_{NX}(\tau) = 0$

$$\varphi_{YX}(\tau) = \varphi_{\tilde{Y}X}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) \, * \, h(\tau)$$

Beispiel: Systemidentifikation mit additivem Rauschen II

Im Frequenzbereich gilt nun

$$\Phi_{YX}(\omega) = \Phi_{XX}(\omega) \cdot H(\mathrm{j}\omega)$$

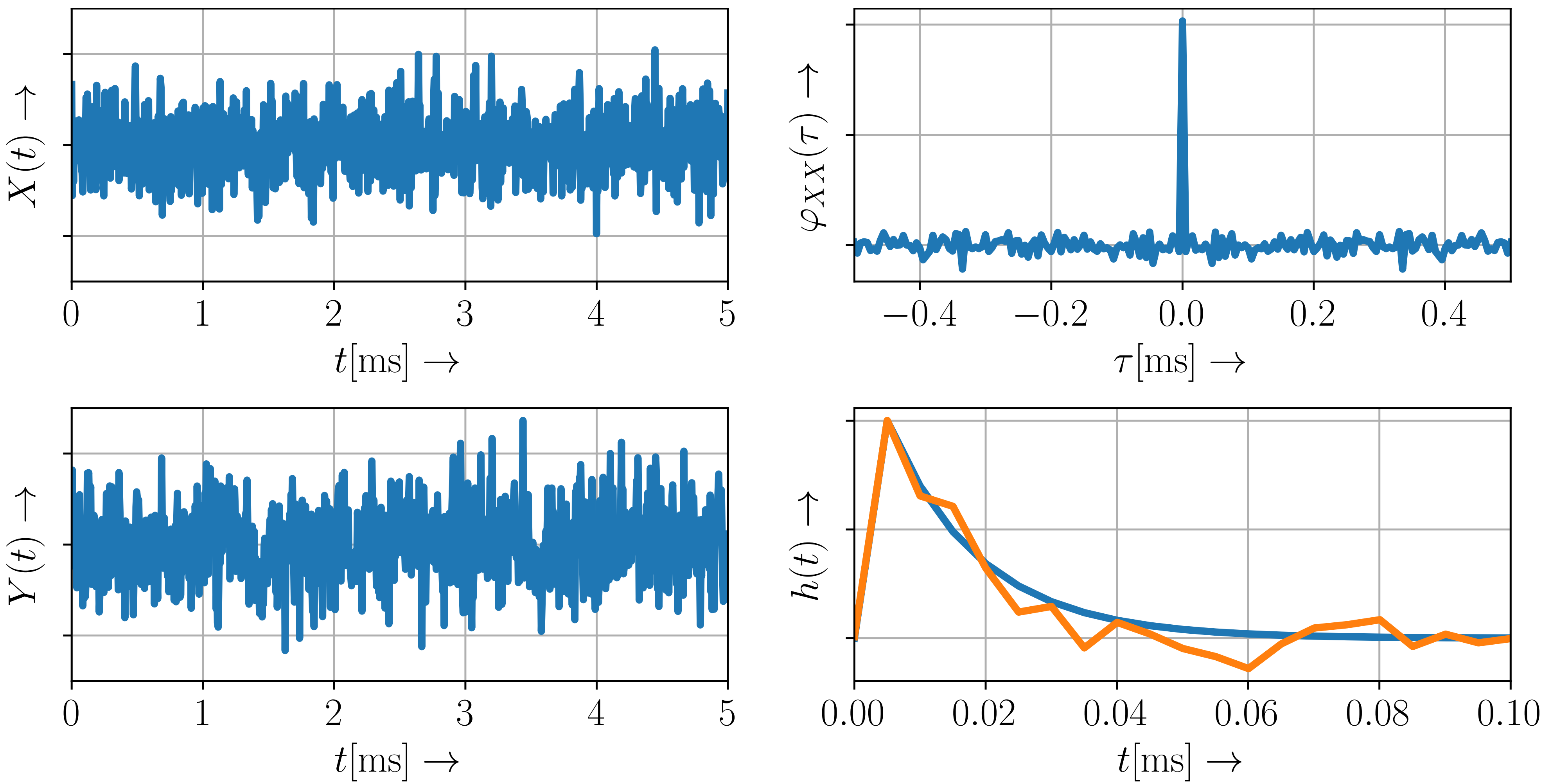
Damit ergibt sich für die zu identifizierende Übertragungsfunktion

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{\Phi_{YX}(\omega)}{\Phi_{XX}(\omega)} = \frac{\Phi_{YX}(\omega)}{X_0}$$

Die Impulsantwort der Übertragungsfunktion ist entsprechend

$$h(t) = \frac{\varphi_{YX}(\tau)}{X_0}$$

Beispiel: Systemidentifikation mit additivem Rauschen III



Referenzen

[1] B. Wagner, *Skript zur Vorlesung Nichtlineare und Stochastische Systeme,* TH Nürnberg.

[2] B. Girod, R. Rabenstein, A. Stenger, *Signals and Systems,* John Wiley & Sons.

[3] E. Hänsler, *Statistische Signale,* Springer Verlag.

[4] J.-R. Ohm, D. Lücke, *Signalübertragung,* Springer Verlag.