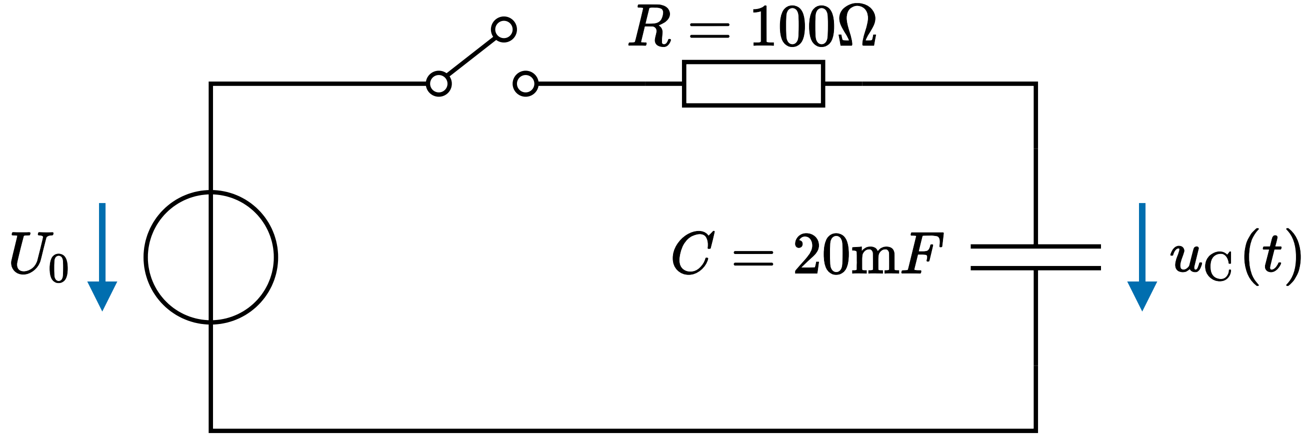
Numerische Integrationsverfahren

Einführung

Beispiel: Differentialgleichung 1. Ordnung

Betrachtung des Einschwingvorganges eines RC-Gliedes

- Kondensator ist zum Zeitpunkt $t = 0$ entladen
- Schließen des Schalters zum Zeitpunkt $t = 0$

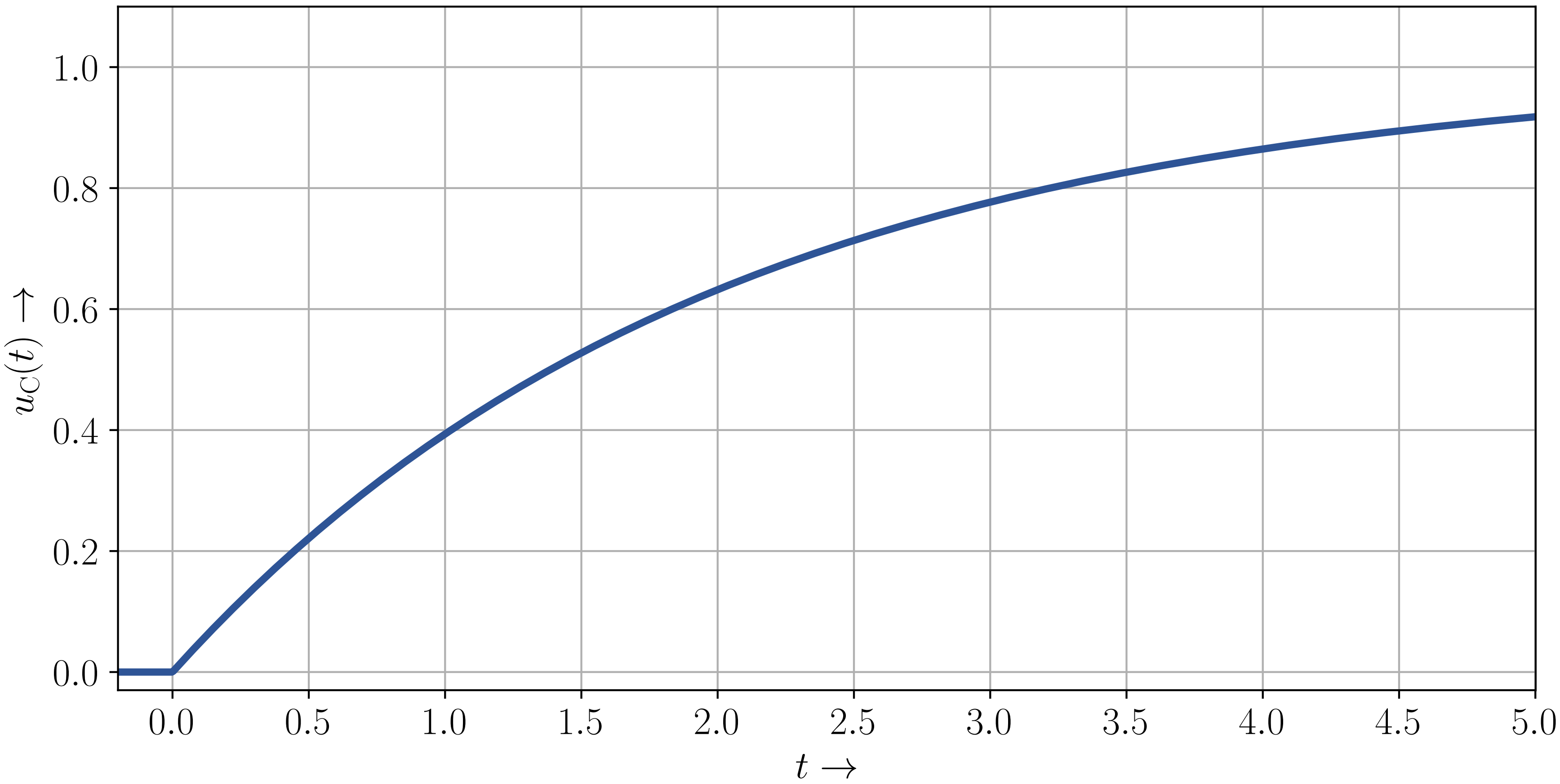


Differentialgleichung: $U_0 = RC \cdot \dot{u}_\text{C}(t) + u_\text{C}(t)$ mit $u_\text{C}(0) = 0$

Gesucht: Numerische Lösungswerte zu den Zeitpunkten
$t = 0, \quad 1.5, \quad 3.0, \quad \ldots$ (konstante Schrittweite $T = 1.5$)

Analytische Lösung der Differntialgleichung

$$u_{\mathrm{C}}(t) = U_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

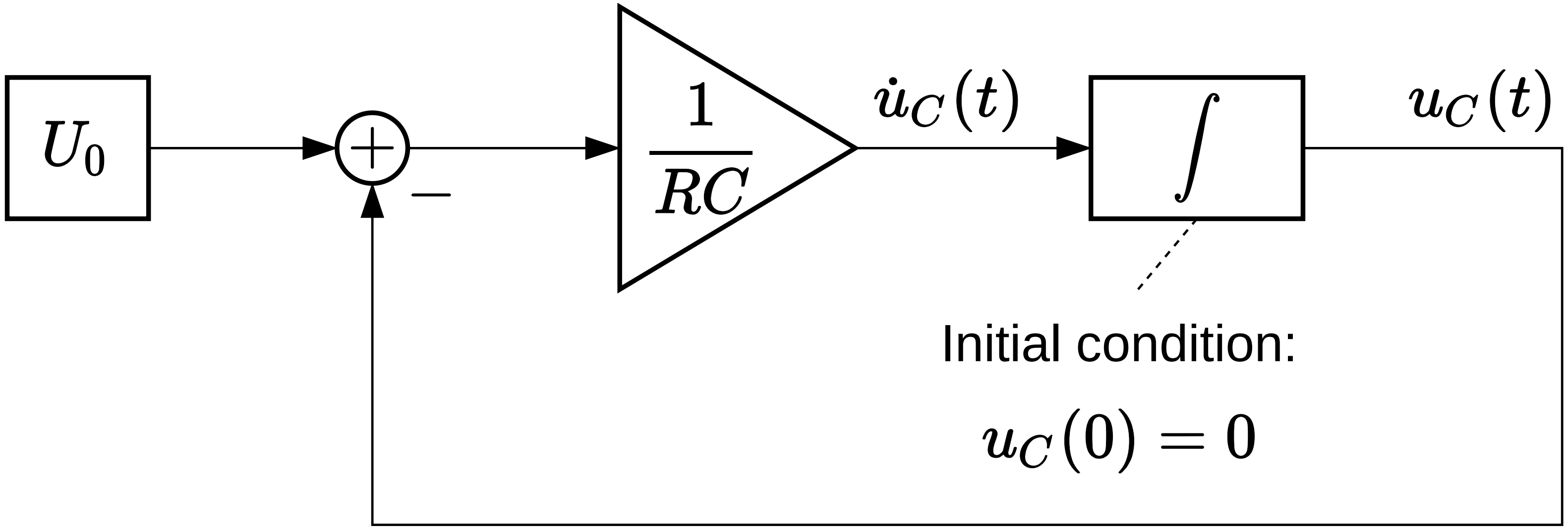


Blockschaltbild der Differentialgleichung

– Umformung der Differentialgleichung

$$\dot{u}_C(t) = \frac{1}{RC} \cdot (U_0 - u_C(t)) \qquad u_C(0) = 0$$

– Übertragung in ein Blockschaltbild



– Aufbau des Blockschaltbildes immer mit Integrations-Block: *Differentiation ist numerisch nicht stabil!*

Lösung der Differentialgleichung

Numerische Lösungsverfahren:

- Einschrittverfahren
- Mehrschrittverfahren

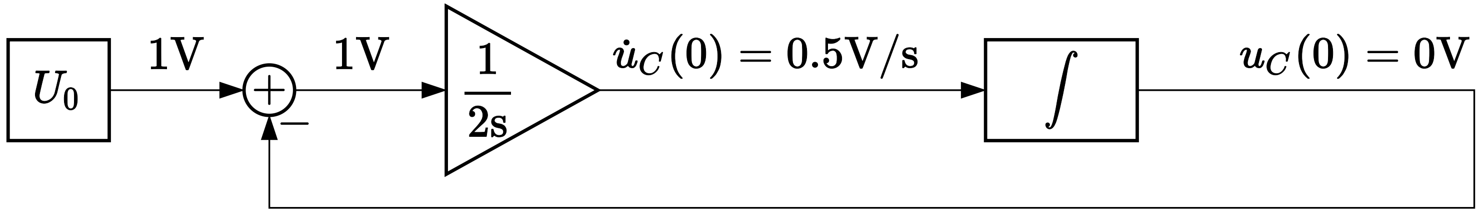
Hier: Behandlung der Einschrittverfahren

- Euler-Verfahren
- Heun-Verfahren

Einschränkung: Konstante Schrittweite T

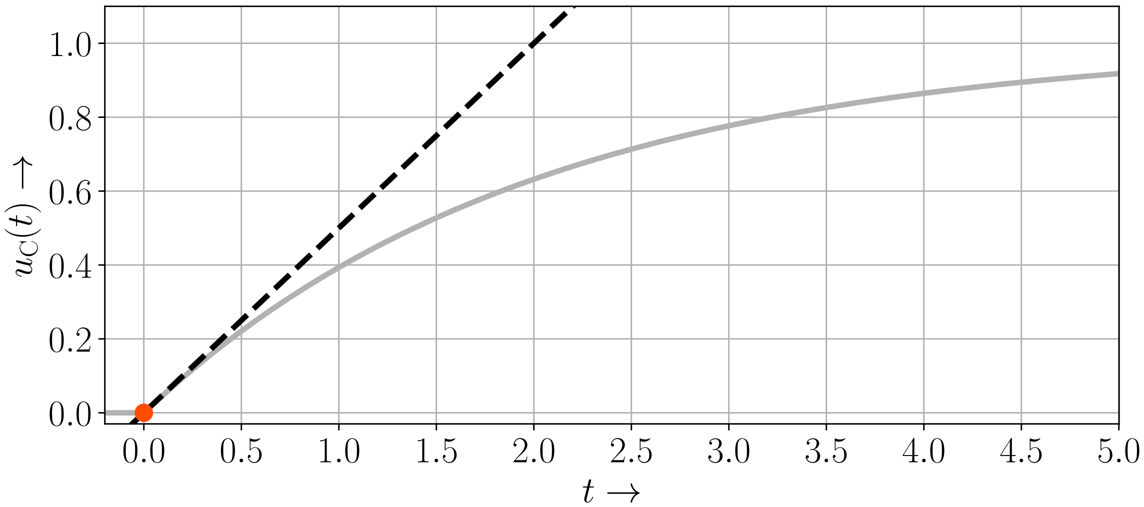
Euler-Verfahren

Euler-Verfahren - Anfangszustand



– Anfangswertbedingung: $u_C(t = 0\mathrm{s}) = 0\mathrm{V}$

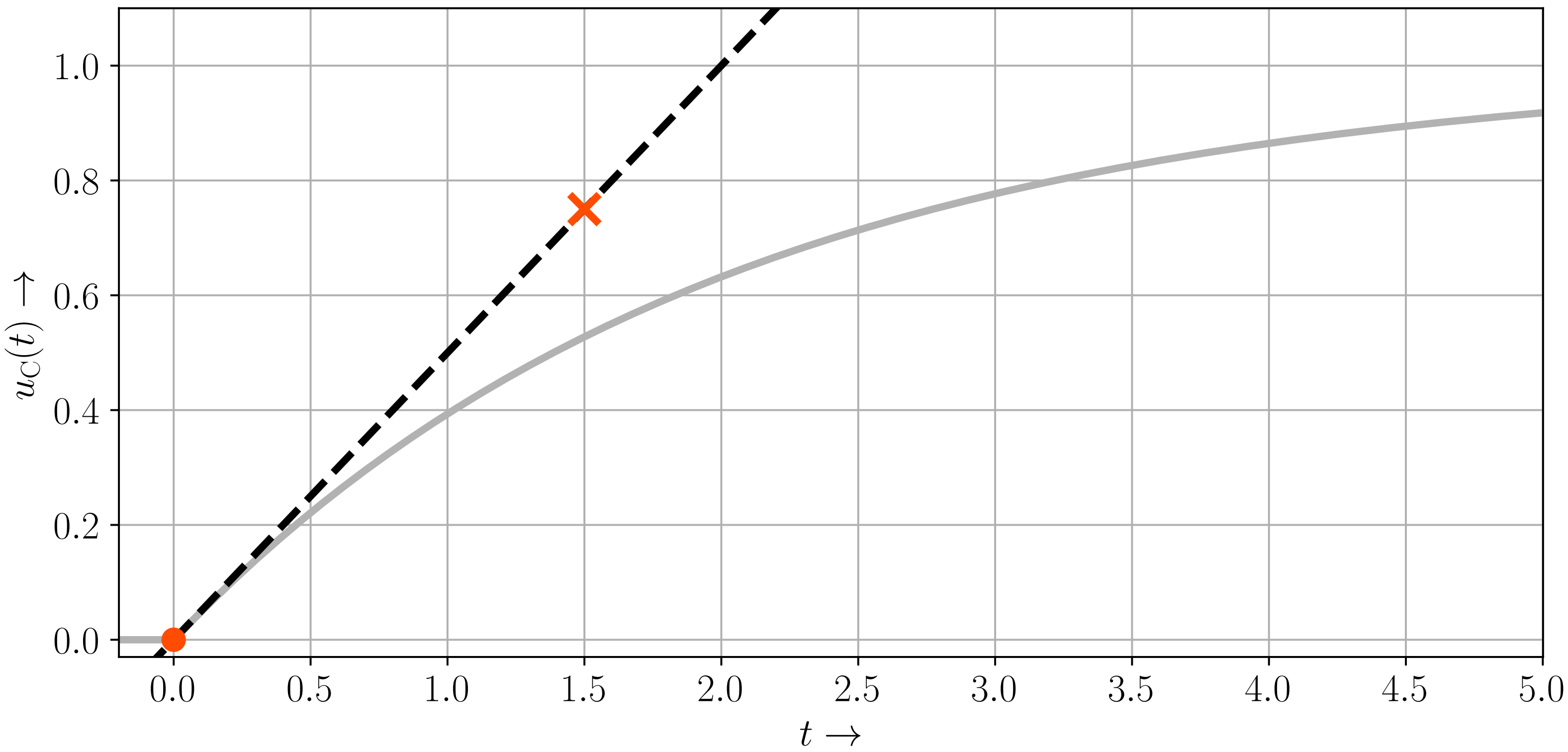
– Steigung der Kondensatorspannung: $\dot{u}_C(t = 0\mathrm{s}) = \frac{1}{100\Omega \cdot 20\mathrm{mF}} \cdot (1\mathrm{V} - 0\mathrm{V}) = 0.5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$



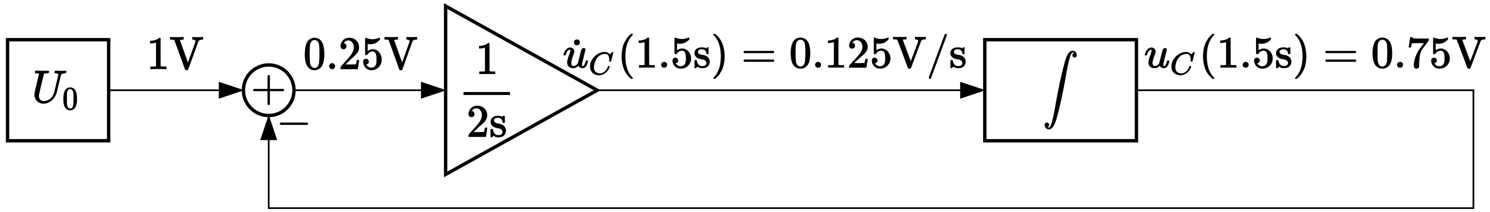
Euler-Verfahren - 1. Update

Integrationsschritt mittels Euler-Verfahren:

$$u_C(t = 1.5\text{s}) = u_C(t = 0\text{s}) + \dot{u}_C(t = 0\text{s}) \cdot T = 0\text{V} + 0.5\frac{\text{V}}{\text{s}} \cdot 1.5\text{s} = 0.75\text{V}$$

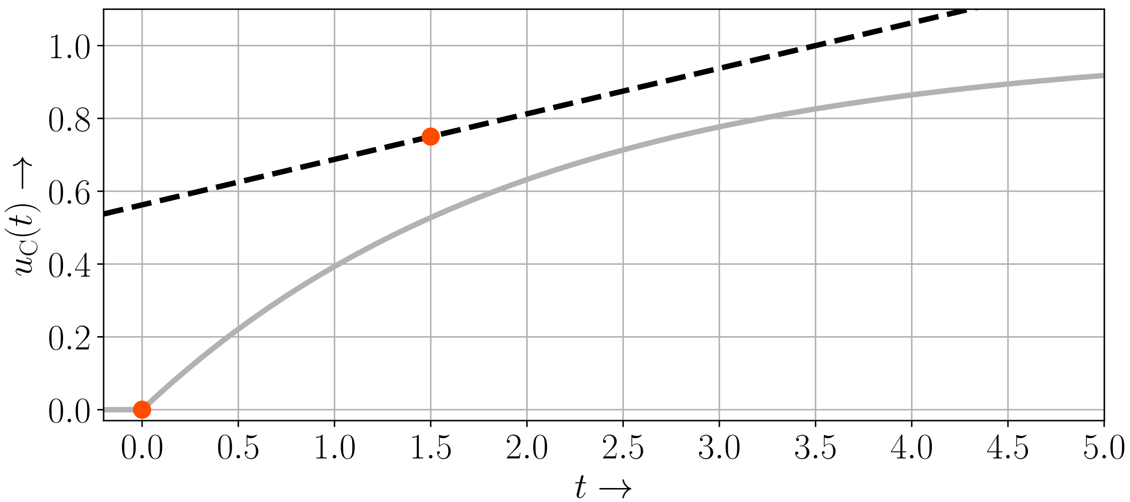


Euler-Verfahren - 1. Update: Berechnung des neuen Zustandes



– Aktuelle Kondensatorspannung: $u_C(t = 1.5\text{s}) = 0.75\text{V}$

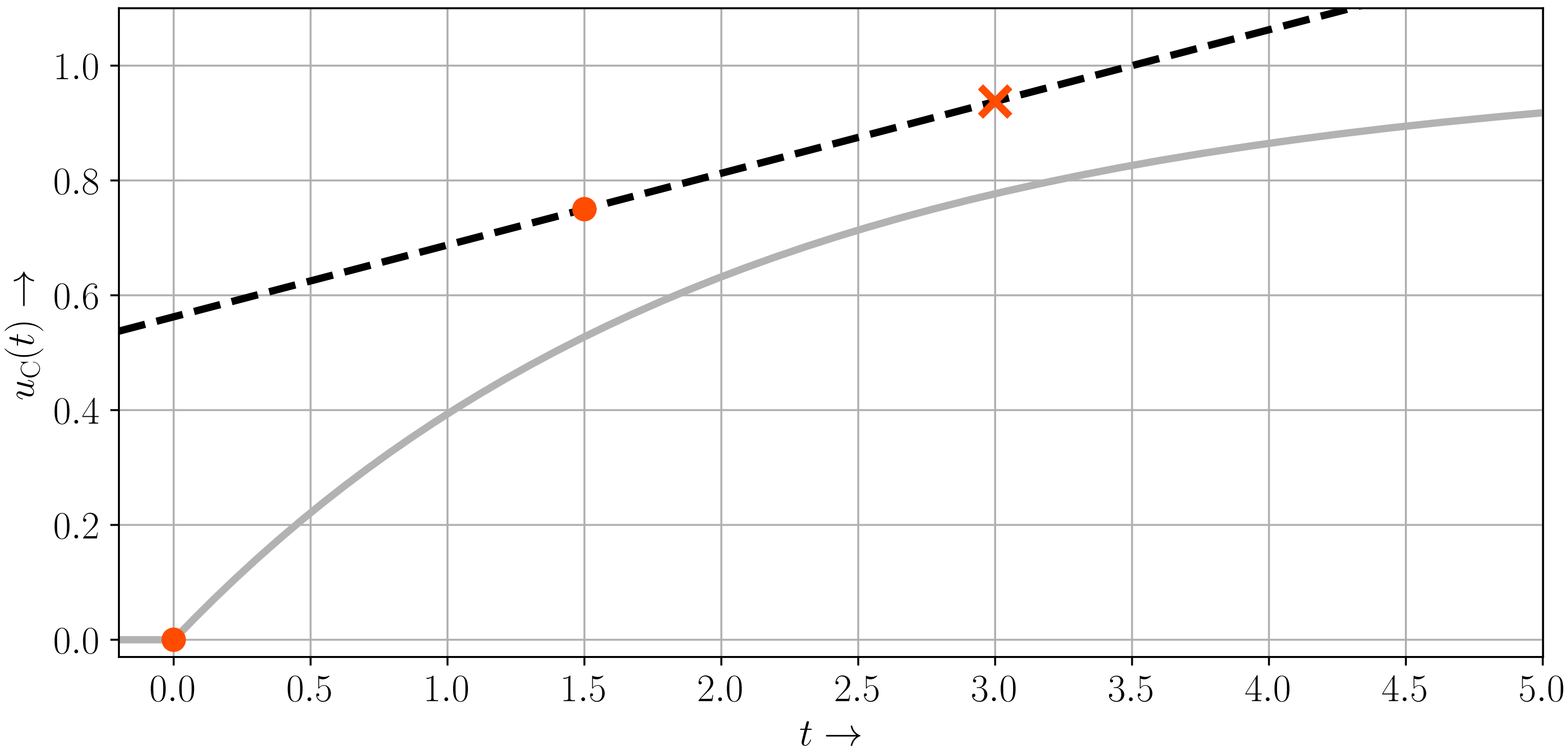
– Steigung der Kondensatorspannung: $\dot{u}_C(t = 1.5\text{s}) = \frac{1}{2\text{s}} \cdot (1\text{V} - 0.75\text{V}) = 0.125\,\frac{\text{V}}{\text{s}}$



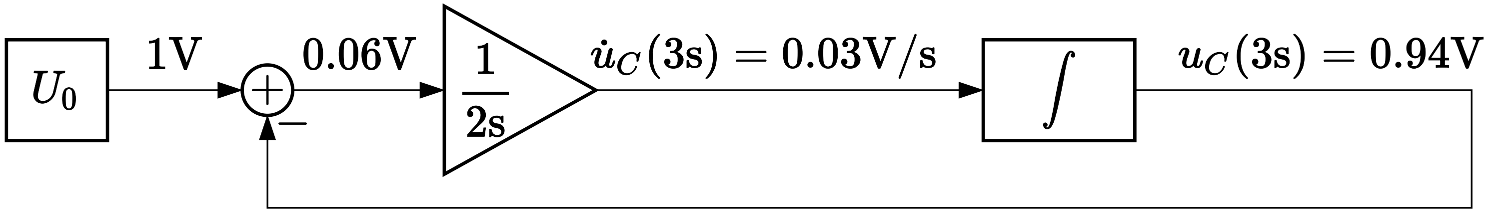
Euler-Verfahren - 2. Update

Integrationsschritt mittels Euler-Verfahren:

$$u_C(t = 3\text{s}) = u_C(t = 1.5\text{s}) + \dot{u}_C(t = 1.5\text{s}) \cdot T = 0.75\text{V} + 0.125\frac{\text{V}}{\text{s}} \cdot 1.5\text{s} \approx 0.94\text{V}$$

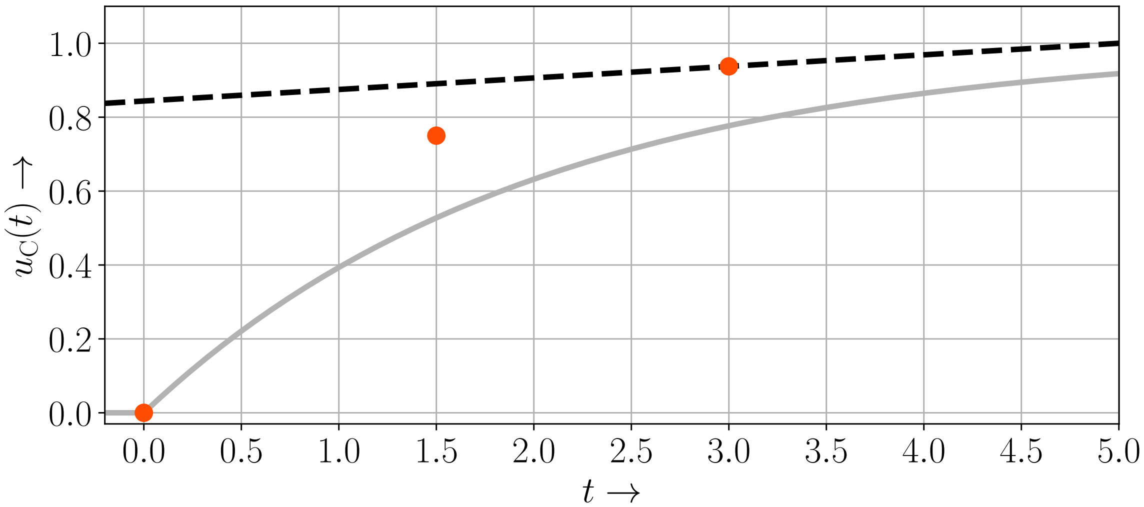


Euler-Verfahren - 2. Update: Berechnung des neuen Zustandes



– Aktuelle Kondensatorspannung: $u_C(t = 3s) = 0.94V$

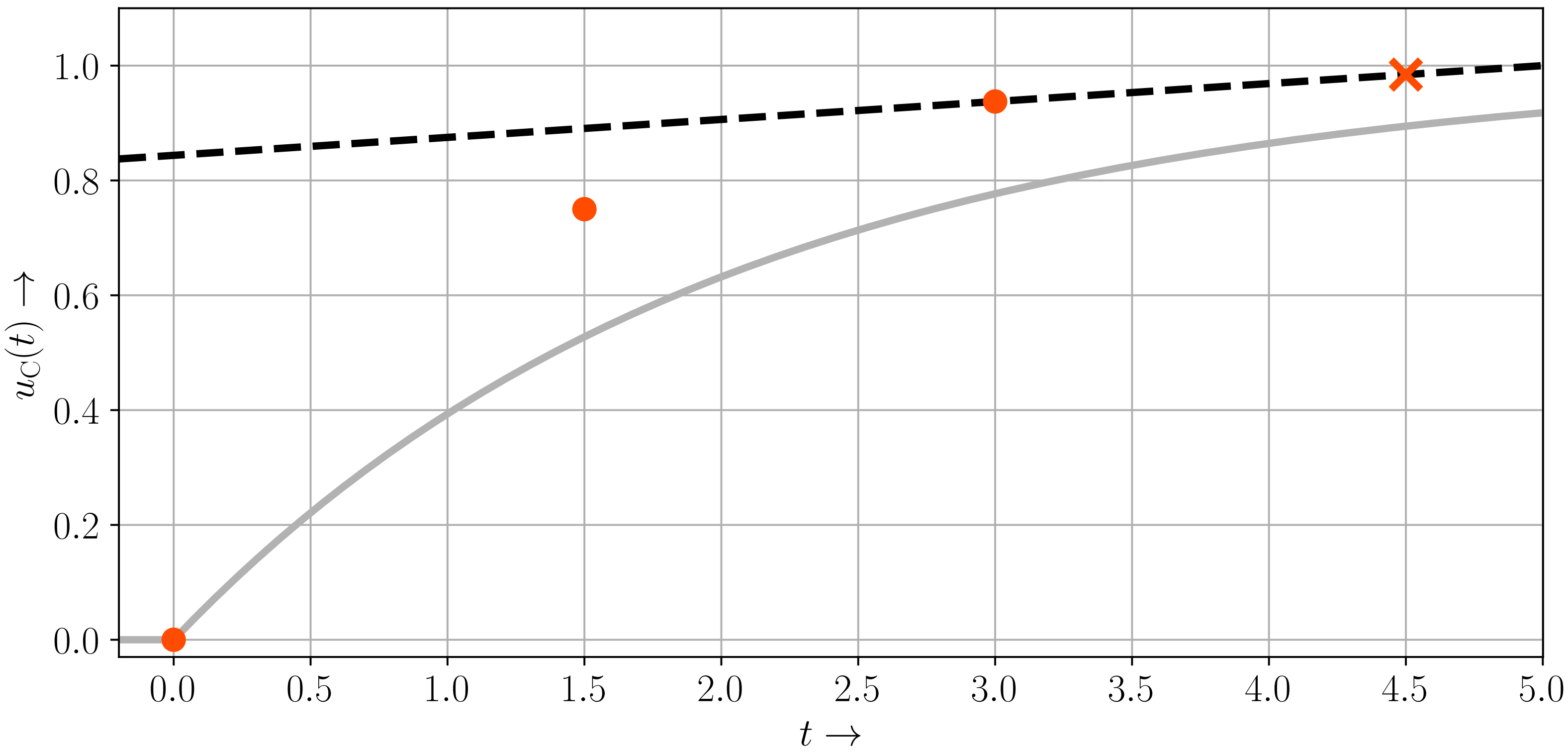
– Steigung der Kondensatorspannung: $\dot{u}_C(t = 3s) = \frac{1}{2s} \cdot (1V - 0.94V) = 0.03\,\frac{V}{s}$



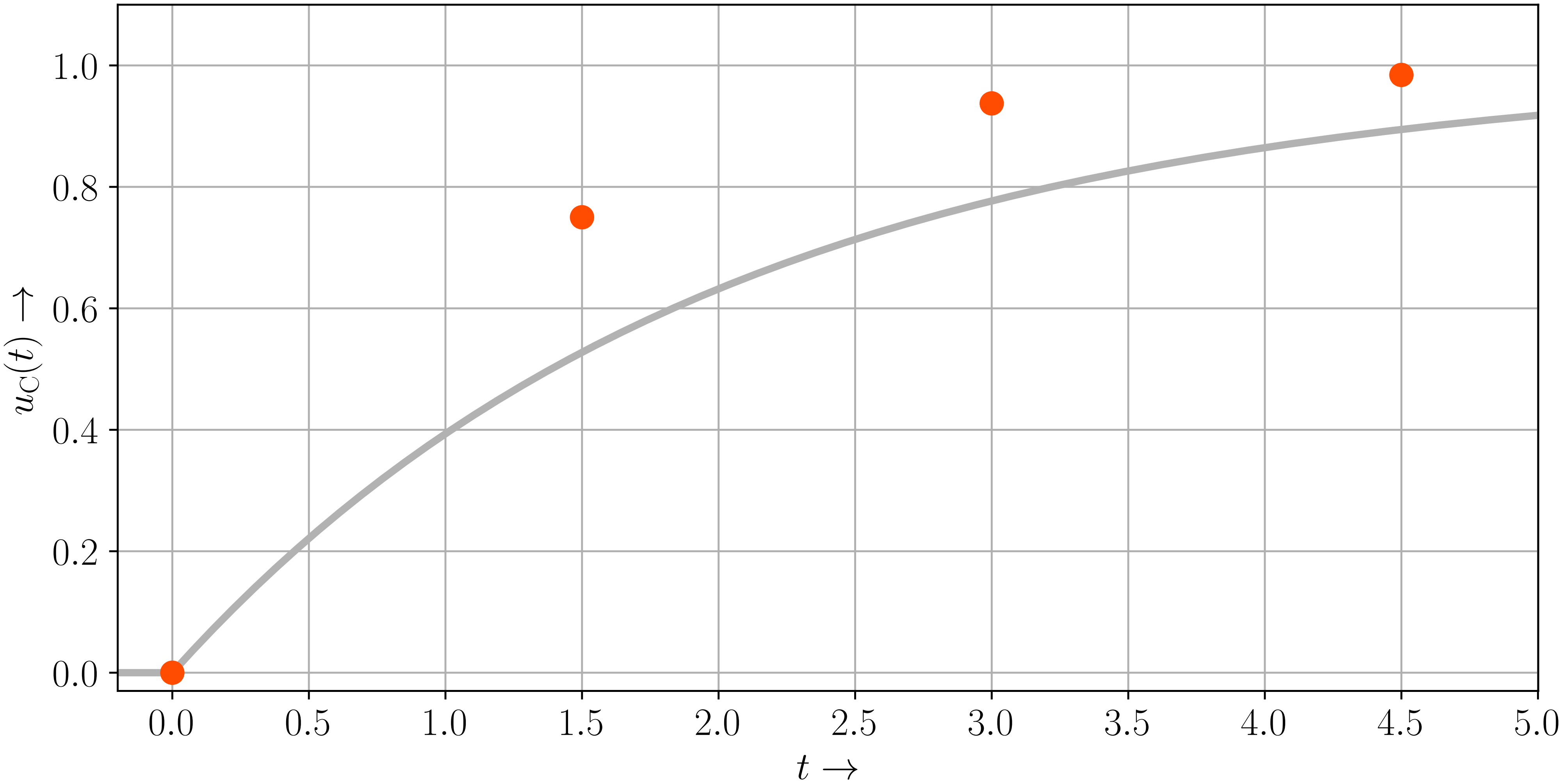
Euler-Verfahren - 3. Update

Integrationsschritt mittels Euler-Verfahren:

$$u_C(t = 4.5\text{s}) = u_C(t = 3\text{s}) + \dot{u}_C(t = 3\text{s}) \cdot T = 0.94\text{V} + 0.03\frac{\text{V}}{\text{s}} \cdot 1.5\text{s} \approx 0.99\text{V}$$

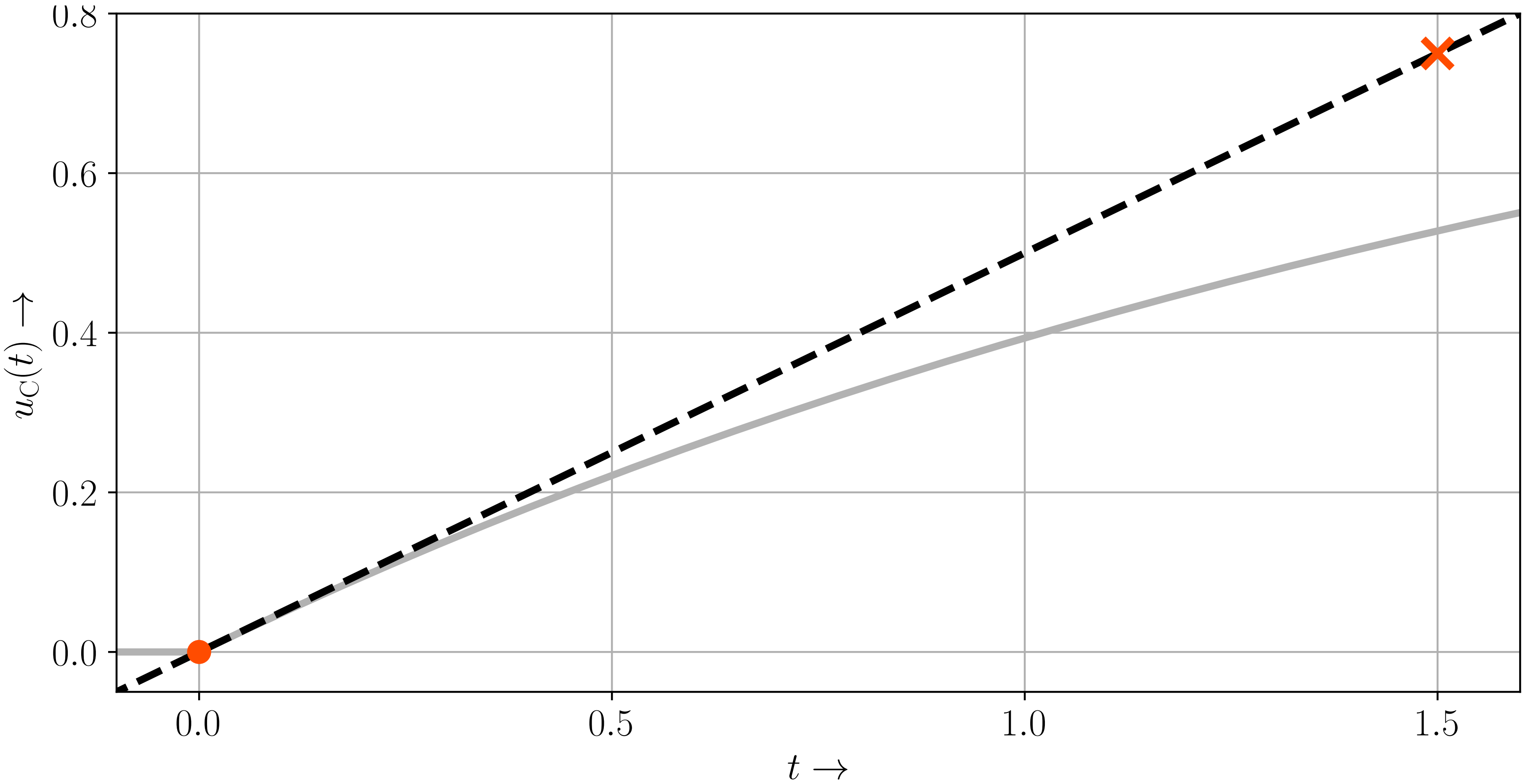


Lösung der Differentialgleichung mit dem Euler-Verfahren

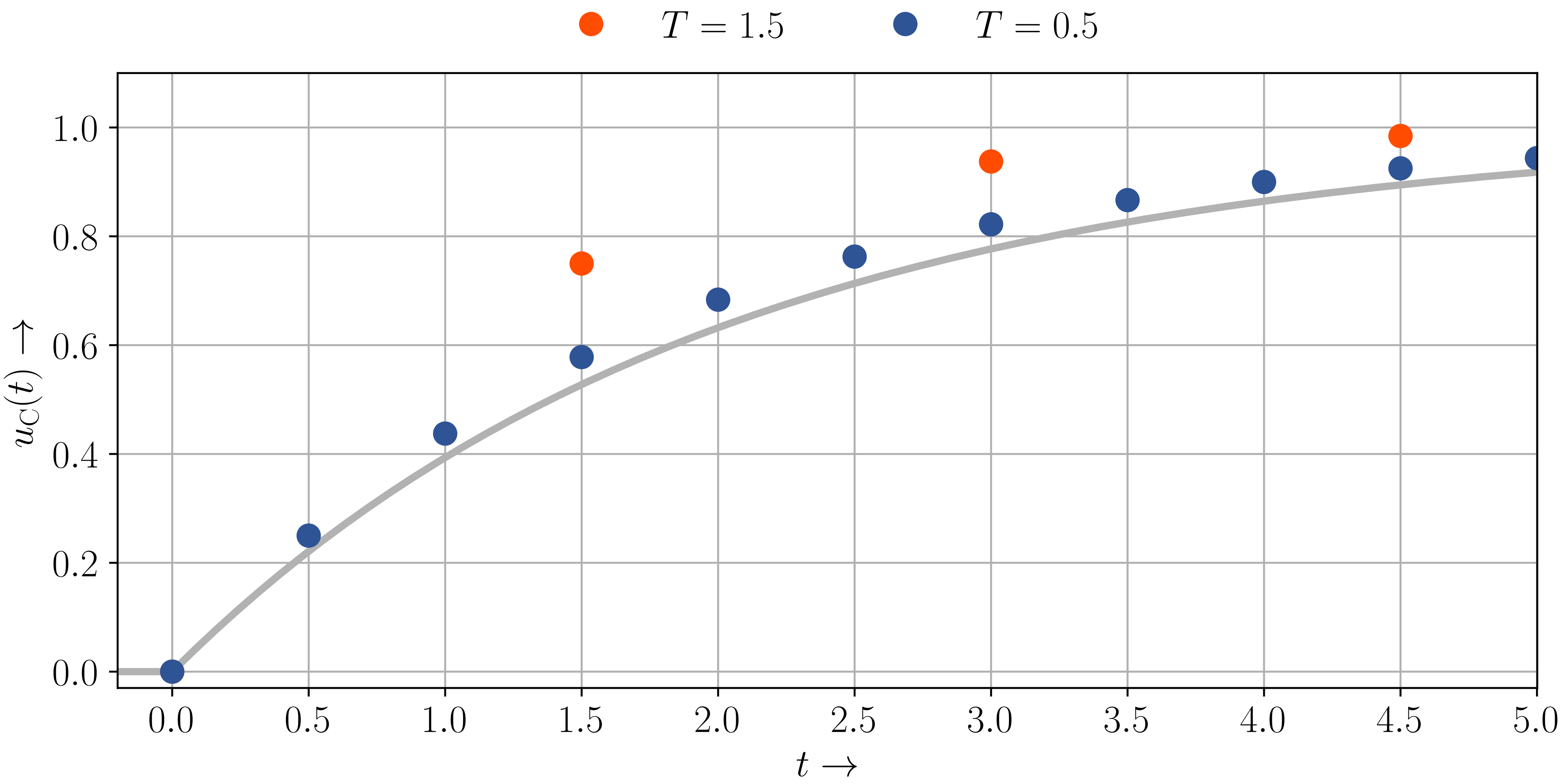


Analyse der Abweichung zwischen Euler-Verfahren und analytischer Lösung

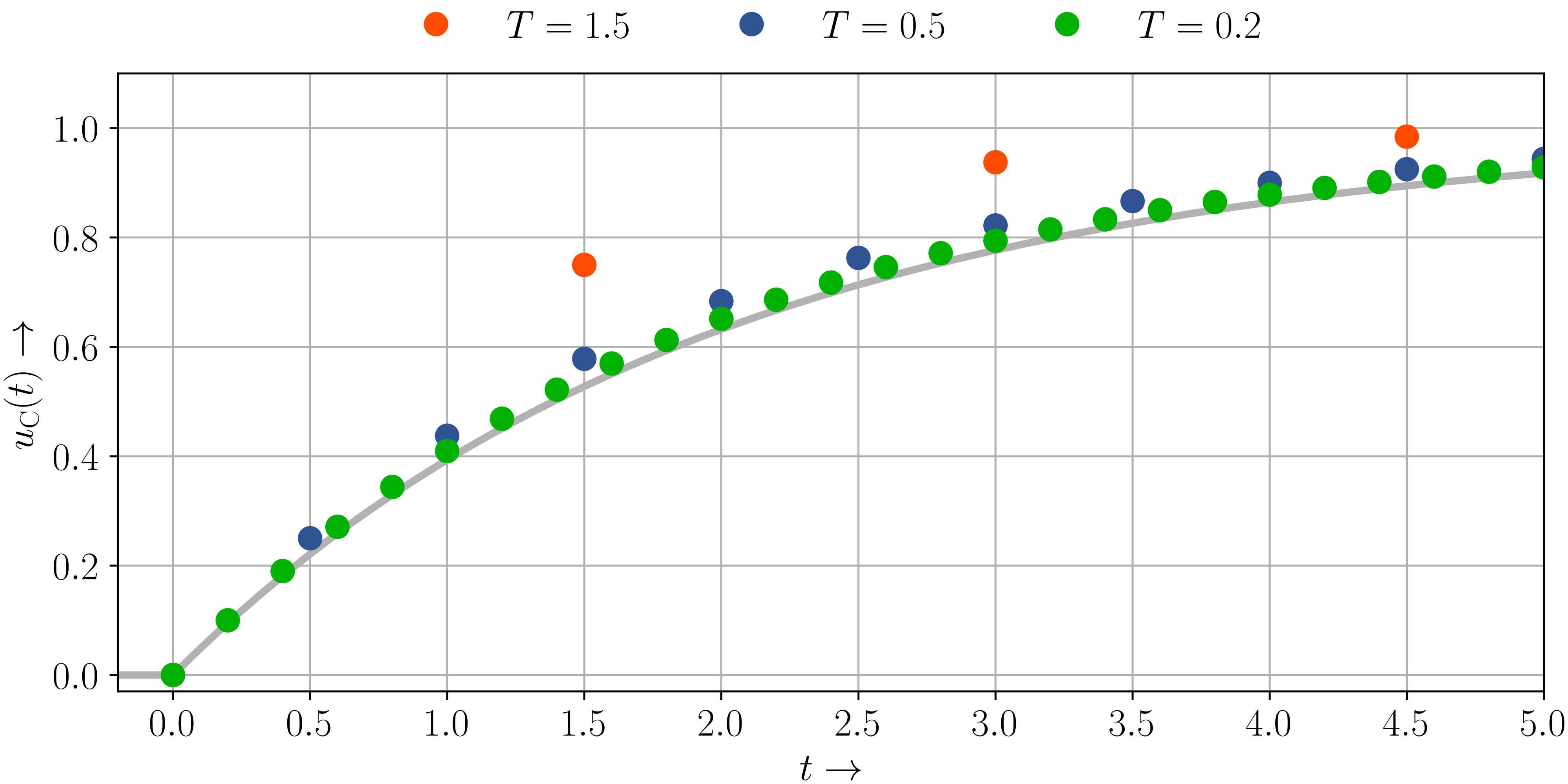
Steigung der Lösungskurve verändert sich zwischen $t = 0\,\mathrm{s}$ und $t = 1.5\,\mathrm{s}$



Verbesserungsmöglichkeit: Verkleinerung der Schrittweite ($T = 0.5\,\mathrm{s}$)



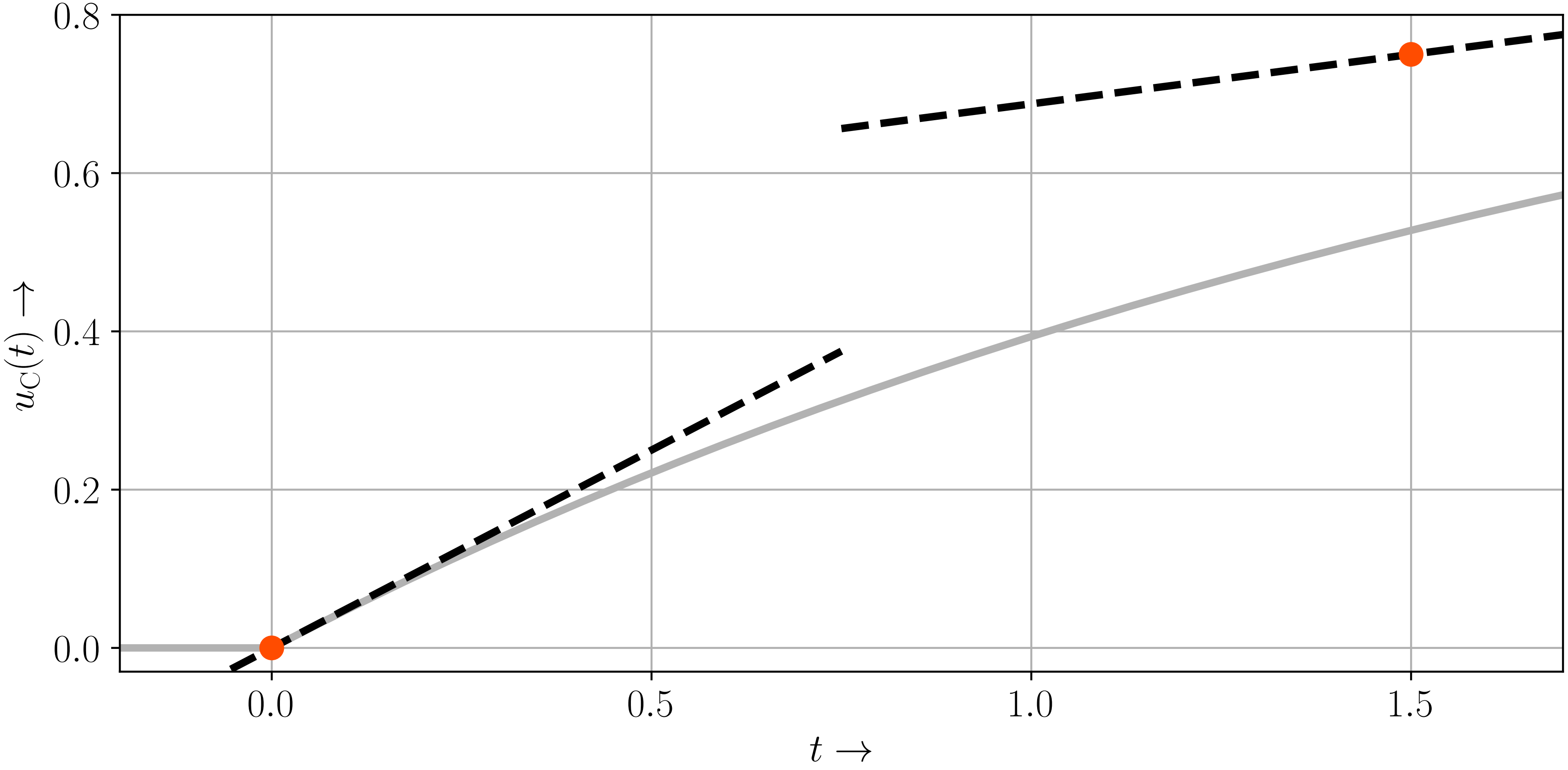
Verbesserungsmöglichkeit: Verkleinerung der Schrittweite ($T = 0.2\,\mathrm{s}$)



Heun-Verfahren

Weitere Verbesserungsmöglichkeit zur Schätzung der Steigung

Berechneter Punkt bei $t = 1.5\,\mathrm{s}$ hat niedrigere Steigung: *Lässt sich diese berücksichtigen?*



Heun-Verfahren

1. Berechnung der Steigung im aktuellen Punkt

$$\dot{u}_C(t = 0\,\mathrm{s}) = \frac{1}{100\Omega \cdot 20\mathrm{mF}} \cdot (1\mathrm{V} - 0\mathrm{V}) = 0.5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$$

2. Berechnung eines Prädiktorpunktes mittels des Euler-Verfahrens

$$u_{C,\mathrm{P}}(t = 1.5\,\mathrm{s}) = u_C(t = 0\,\mathrm{s}) + \dot{u}_C(t = 0\,\mathrm{s}) \cdot T = 0\mathrm{V} + 0.5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} \cdot 1.5\,\mathrm{s} = 0.75\mathrm{V}$$

3. Berechnung der Steigung im Prädiktorpunkt

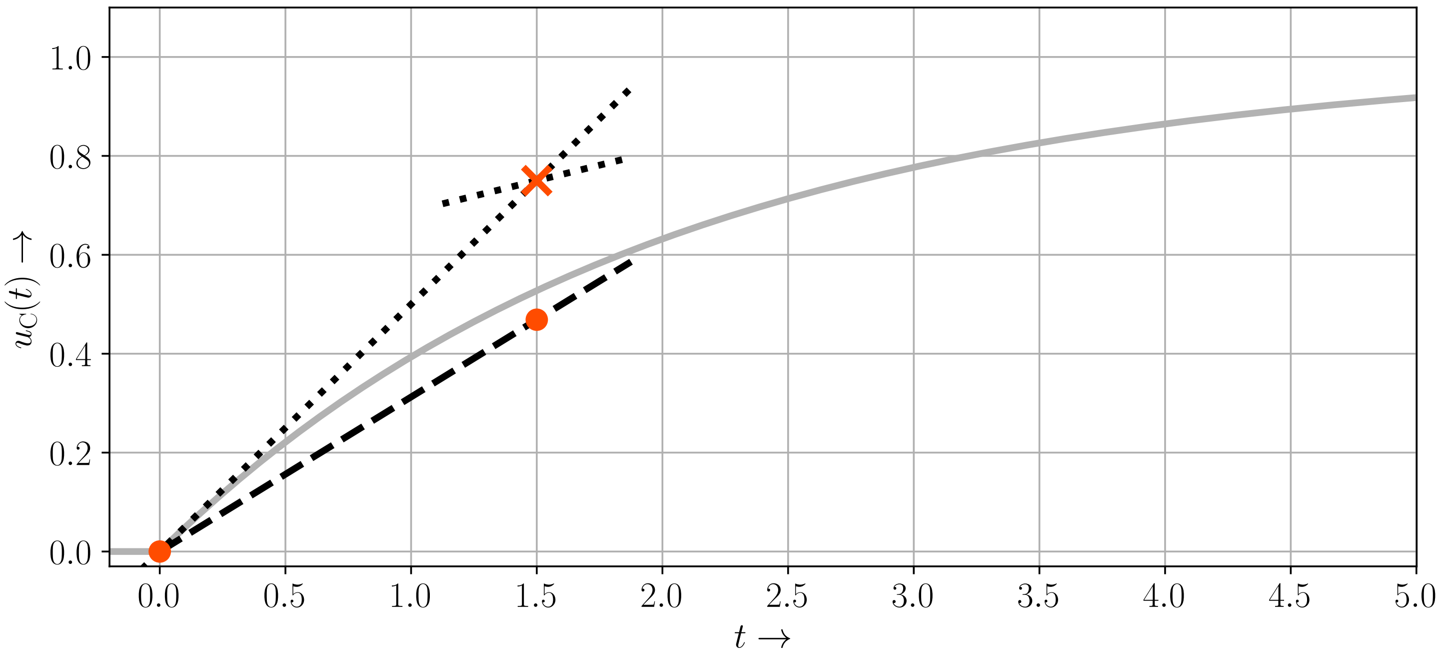
$$\dot{u}_{C,\mathrm{P}}(t = 1.5\,\mathrm{s}) = \frac{1}{2\,\mathrm{s}} \cdot (1\mathrm{V} - 0.75\mathrm{V}) = 0.125\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$$

4. Berechnung des ersten Updates

$$u_C(t = 1.5\,\mathrm{s}) = u_C(t = 0\,\mathrm{s}) + \frac{\dot{u}_C(t{=}0\,\mathrm{s}) + \dot{u}_{C,\mathrm{P}}(t{=}1.5\,\mathrm{s})}{2} \cdot T = 0\mathrm{V} + \frac{0.5\mathrm{V/s} + 0.125\mathrm{V/s}}{2} \cdot 1.5\,\mathrm{s} \approx 0.47\mathrm{V}$$

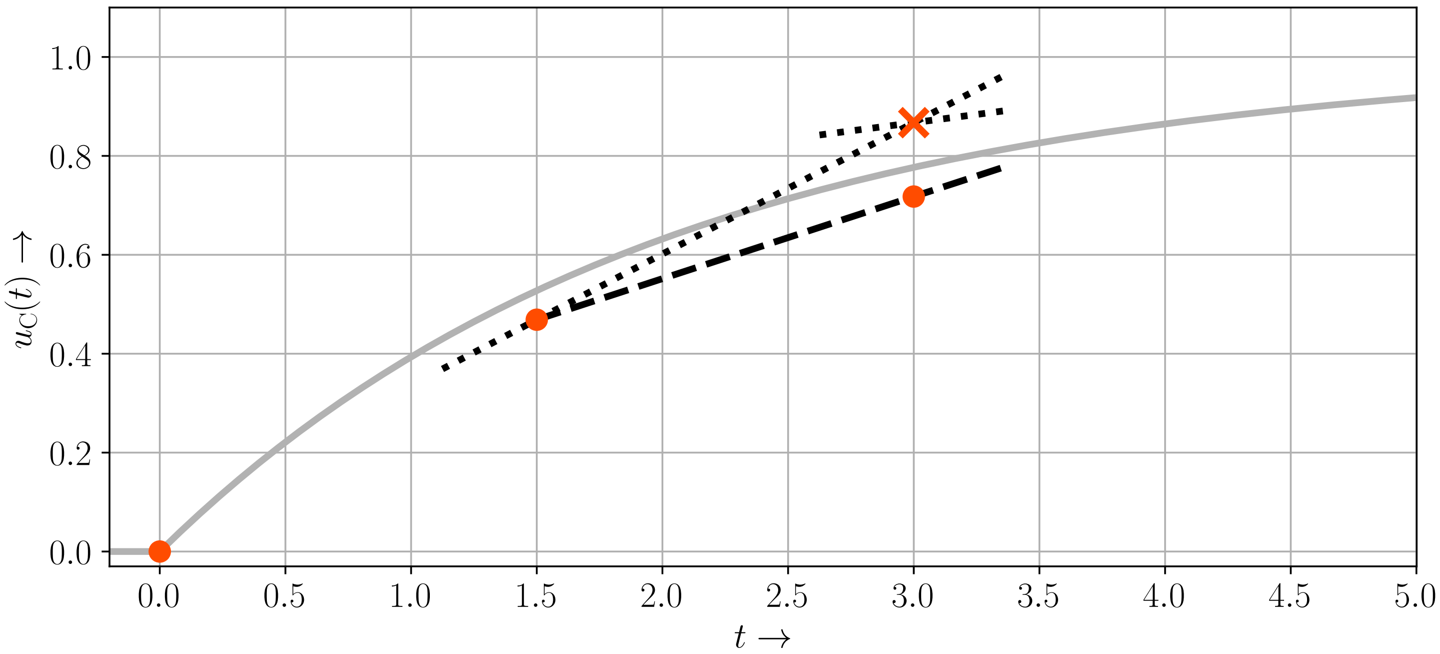
Lösung der Differentialgleichung mit dem Heun Verfahren: 1. Update

- Prädiktorpunkt mittels Euler-Verfahren: $u_{C,\mathrm{P}}(t = 1.5\,\mathrm{s}) = 0\mathrm{V} + 0.5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} \cdot 1.5\mathrm{s} = 0.75\mathrm{V}$
- Steigung im Prädiktorpunkt: $\dot{u}_{C,\mathrm{P}}(t = 1.5\,\mathrm{s}) = \frac{1}{2\,\mathrm{s}} \cdot (1\mathrm{V} - 0.75\mathrm{V}) = 0.125\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$
- Update-Schritt: $u_C(t = 1.5\,\mathrm{s}) = 0\mathrm{V} + \frac{0.5\mathrm{V/s} + 0.125\mathrm{V/s}}{2} \cdot 1.5\,\mathrm{s} \approx 0.47\mathrm{V}$



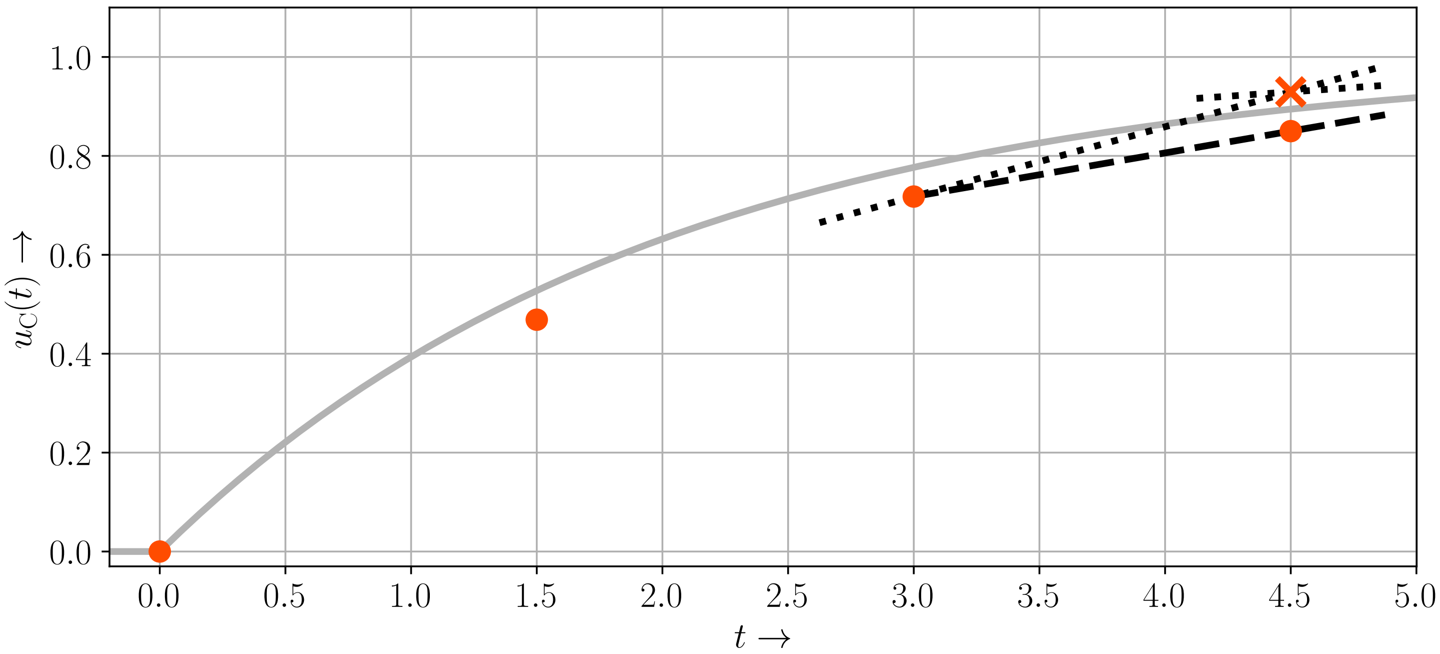
Lösung der Differentialgleichung mit dem Heun Verfahren: 2. Update

- Prädiktorpunkt mittels Euler-Verfahren: $u_{C,\mathrm{P}}(t = 3\,\mathrm{s}) = 0.47\mathrm{V} + 0.27\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} \cdot 1.5\mathrm{s} = 0.87\mathrm{V}$
- Steigung im Prädiktorpunkt: $\dot{u}_{C,\mathrm{P}}(t = 3\,\mathrm{s}) = \frac{1}{2\,\mathrm{s}} \cdot (1\mathrm{V} - 0.87\mathrm{V}) = 0.066\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$
- Update-Schritt: $u_C(t = 3\,\mathrm{s}) = 0.47\mathrm{V} + \frac{0.27\mathrm{V/s} + 0.066\mathrm{V/s}}{2} \cdot 1.5\,\mathrm{s} \approx 0.72\mathrm{V}$

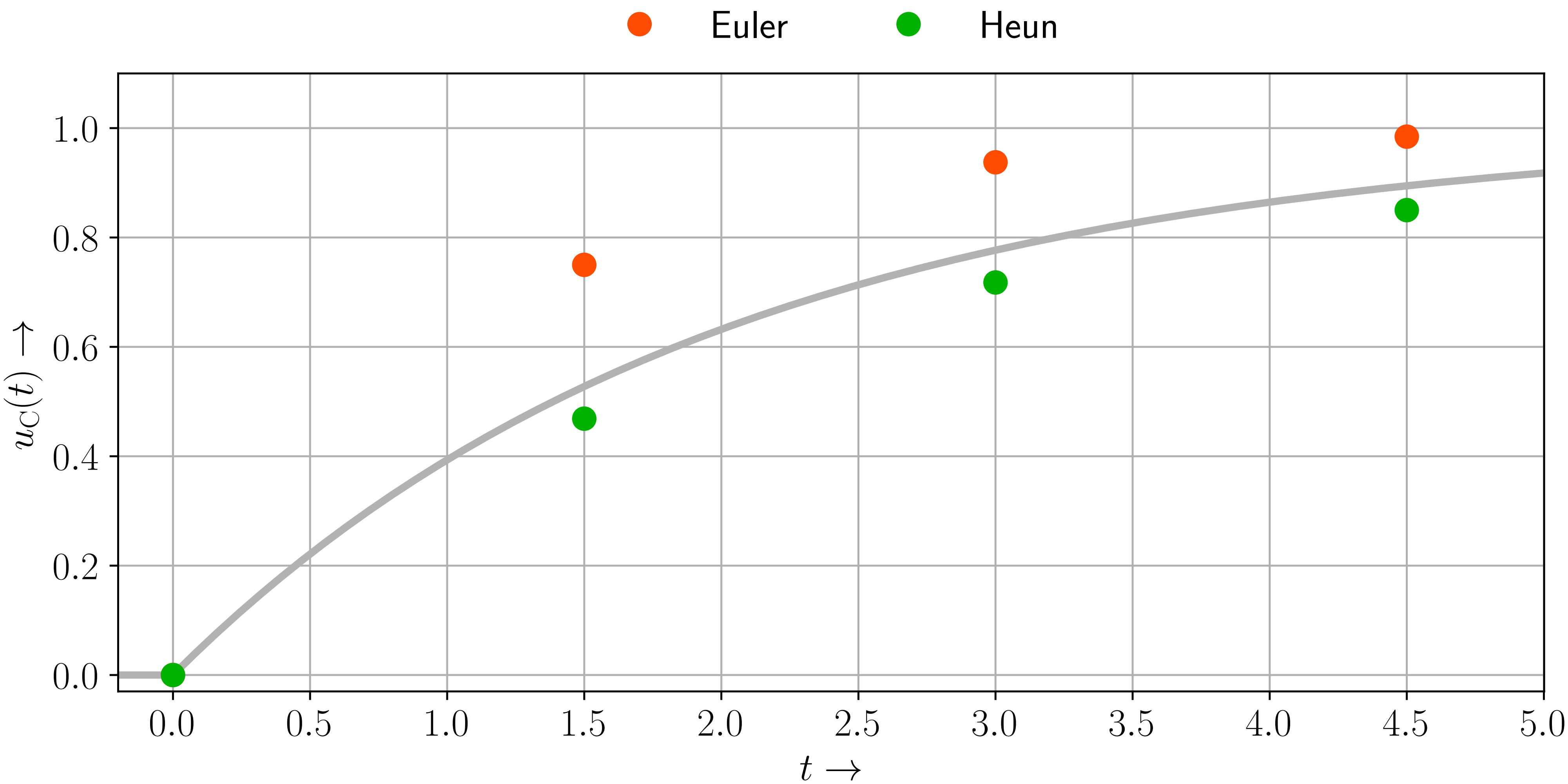


Lösung der Differentialgleichung mit dem Heun Verfahren: 3. Update

- Prädiktorpunkt mittels Euler-Verfahren: $u_{C,\mathrm{P}}(t = 4.5\,\mathrm{s}) = 0.72\mathrm{V} + 0.14\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} \cdot 1.5\mathrm{s} = 0.93\mathrm{V}$
- Steigung im Prädiktorpunkt: $\dot{u}_{C,\mathrm{P}}(t = 4.5\,\mathrm{s}) = \frac{1}{2\,\mathrm{s}} \cdot (1\mathrm{V} - 0.93\mathrm{V}) = 0.035\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$
- Update-Schritt: $u_C(t = 3\,\mathrm{s}) = 0.72\mathrm{V} + \frac{0.14\mathrm{V/s}+0.035\mathrm{V/s}}{2} \cdot 1.5\,\mathrm{s} \approx 0.85\mathrm{V}$

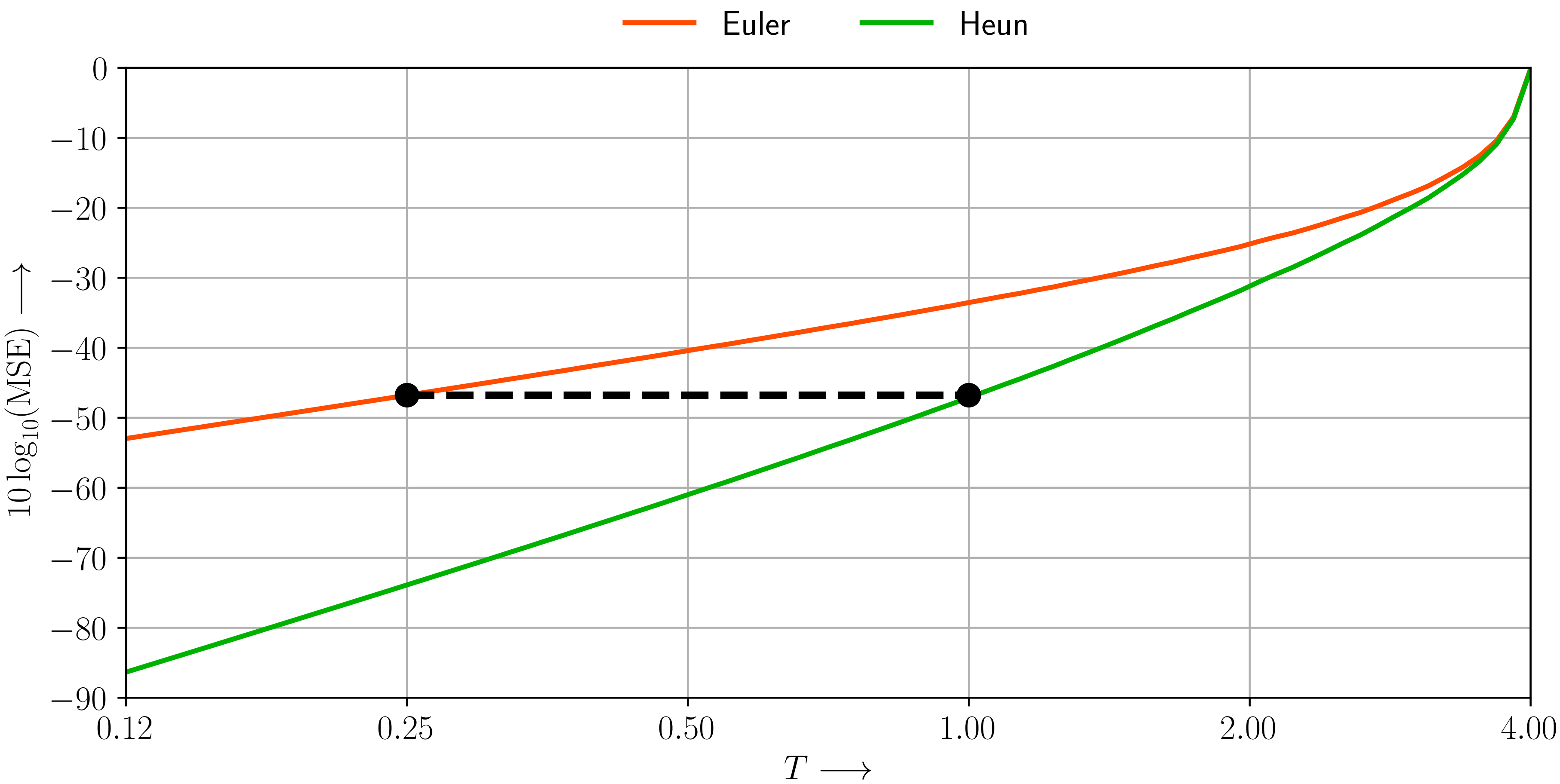


Vergleich von Euler- und Heun-Verfahren bei einer Schrittweite von $T = 1.5\mathrm{s}$



Vergleich von Euler- und Heun-Verfahren gegenüber der analytischen Lösung

Bei diesem Beispiel: Heun-Verfahren $T = 1\mathrm{s}$ hat gleichen Fehler wie Euler-Verfahren bei halber Komplexität

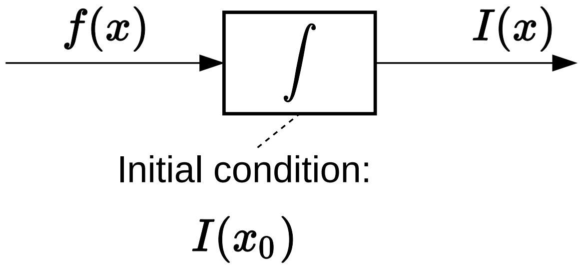


Interpretation der Euler- und Heun-Integration

Intepretation von Euler- und Heun-Verfahrens

Berechnung des Integrals über eine Funktion $f(x)$

$$I(x) = I(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$



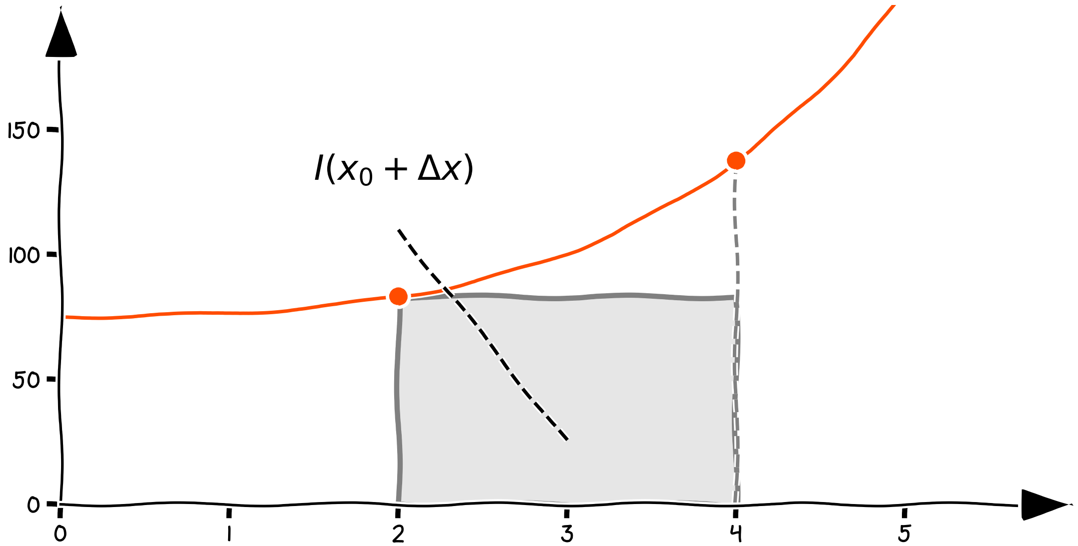
Im folgenden wird der Anfangswert zu Null gesetzt

$$I(x_0) = 0$$

Numerische Integration mittels Euler-Verfahren

Berechnung des ersten Update-Schrittes bei Schrittweite Δx mit Euler-Verfahren

$$I(x_0 + \Delta x) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(\xi)\mathrm{d}\xi \approx f(x_0) \cdot \Delta x$$

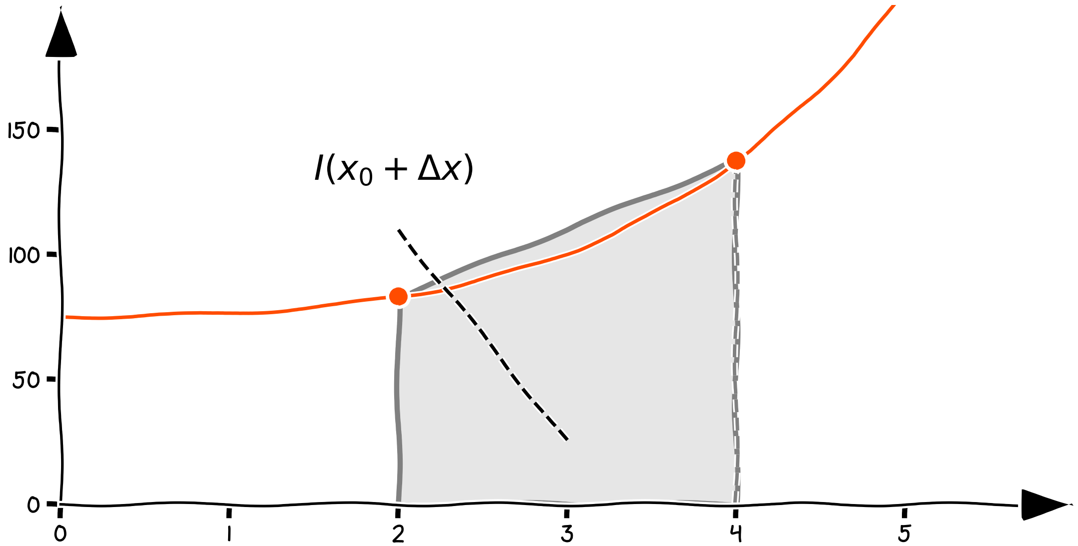


Das Euler-Verfahren entschpricht der Näherung der Integration mittels Rechtecken.

Intepretation des Heun-Verfahrens

Berechnung des ersten Update-Schrittes bei Schrittweite Δx mit Heun-Verfahren

$$I(x_0 + \Delta x) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \frac{1}{2}\Big(f(x_0) + f(x_0 + \Delta_x)\Big) \cdot \Delta x$$



Das Heun-Verfahren entspricht der Näherung der Integration mittels Trapezen.

Referenzen

[1] B. Wagner H. Carl, *Skriptum zur Vorlesung Modellbildung und Simulation*, TH Nürnberg.

[2] A. Reusken W. Dahmen, *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Springer Verlag.