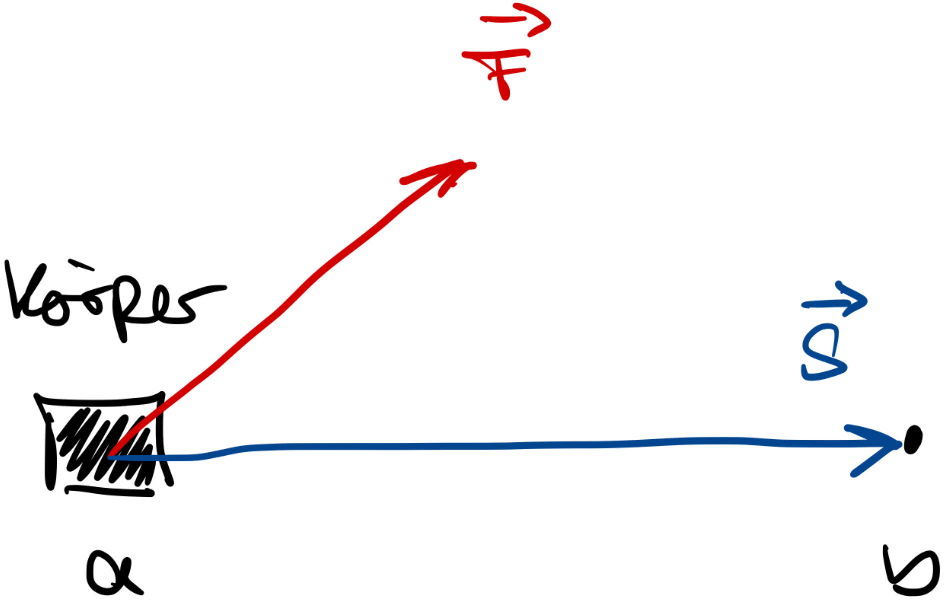
Integration von Vektorfeldern

Linienintegral

Bewegung eines Körpers I

Situation: Auf einen Körper wirkt eine Kraft $\vec{F}$



Frage: Welche Arbeit muss verrichtet werden, um Körper von Punkt a nach b zu bringen?

Beschreibung des Weges mit Vektor $\vec{s}$

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}$$

Bewegung eines Körpers II

Zerlegung der Kraft $\vec{F}$ in

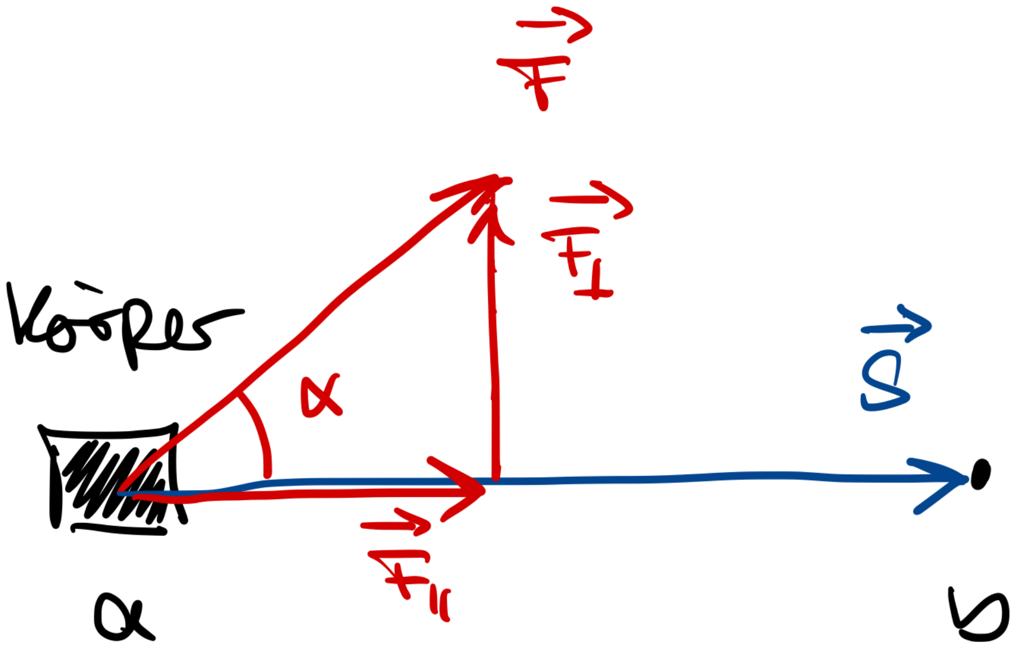
- $\vec{F}_{||}$: Parallel zur Bewegungsrichtung $\vec{s}$
- $\vec{F}_{\perp}$: Senkrecht zur Bewegungsrichtung $\vec{s}$

Die zu verrichtende Arbeit ist nun

$$W = |\vec{F}_{||}| \cdot |\vec{s}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\alpha)$$

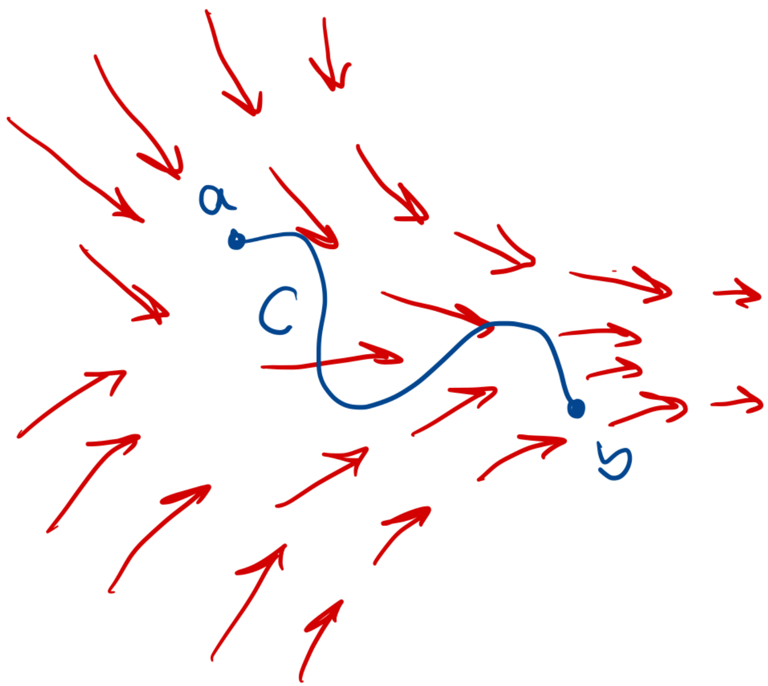
Anwendung des Skalarproduktes

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$



Bewegung eines Körpers in einem inhomogenen Kraftfeld I

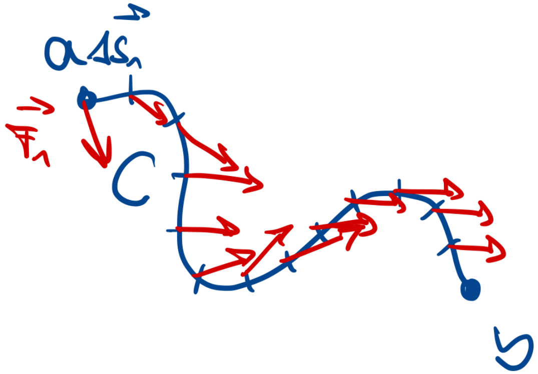
Inhomogenes Kraftfeld (z.B. durch Gravitation, Strömung eines Fluids, etc.)



Frage: Welche Arbeit muss verrichtet werden, um Körper entlang der Kontur C zu bewegen?

Bewegung eines Körpers in einem inhomogenen Kraftfeld II

Näherungsweise Zerlegung der Strecke s in N kleine Streckenabschnitte $\Delta\vec{s}_i$ mit $i = 1, \ldots, N$



Auswertung der mechanischen Arbeit entlang der kleinen Streckenabschnitte

$$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i$$

Näherungsweise Berechnung der Arbeit durch Summe der Teil-Arbeiten entlang der kleinen Streckenabschnitte

$$W \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i$$

Bewegung eines Körpers in einem inhomogenen Kraftfeld III

Verkleinerung der Streckenabschnitte $\Delta\vec{s}_i$ zu infinitesimal kleinen Streckenabschnitten $\mathrm{d}\vec{s}$

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

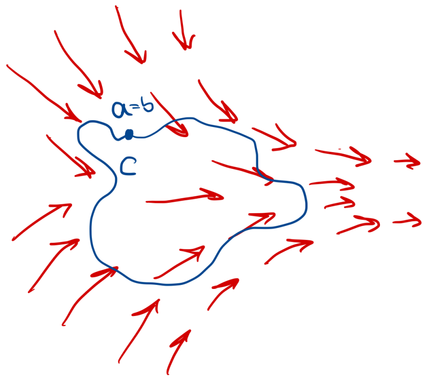
Berechnung der mechanischen Arbeit mittels Integration der infinitessimalen Arbeiten entlang der Kontur C

$$W = \int_C \mathrm{d}W = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Die Integration eines Vektorfeldes entlang einer Strecke wird auch als *Linienintegral* bezeichnet.

Bei geschlossener Kontur C (d.h. indentischer Anfangs- und Endpunkt), spricht man von einem *Ringintegral*

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$



Parametrierung des Linienintegrals

Um ein Linienintegral auszurechnen, muss es in ein bestimmtes Integral umgeformt werden

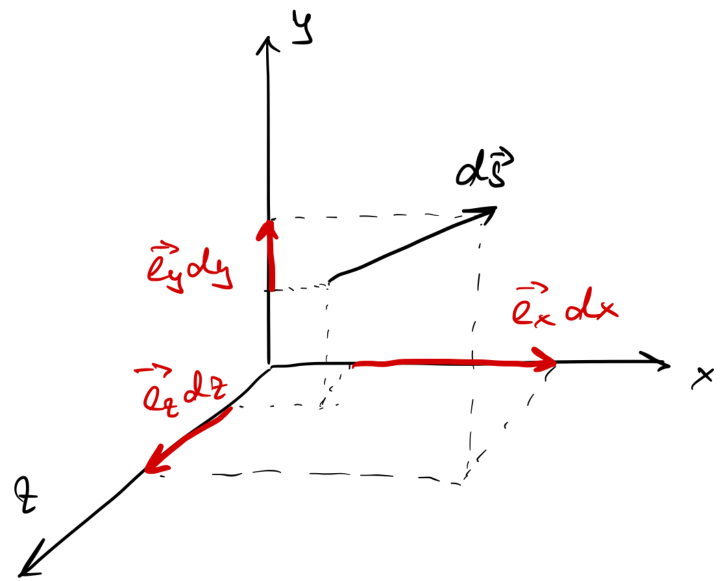
Diese Umformung nennt man *Parametrierung*

Die Parametrierung lässt sich mathematisch allgemein formulieren (vgl. z.B. [Albach])

Hier werden spezielle Parametrierungen für verschiedene Koordinatensysteme betrachtet

Kartesische Koordinaten

$$\mathrm{d}\vec{s} = \vec{\mathrm{e}}_x \cdot \mathrm{d}x + \vec{\mathrm{e}}_y \cdot \mathrm{d}y + \vec{\mathrm{e}}_z \cdot \mathrm{d}z$$

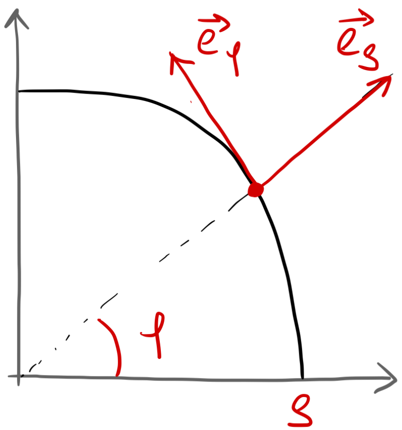


Parametrierung des Linienintegrals - Polar- und Zylinderkoordinaten

Polarkoordinaten

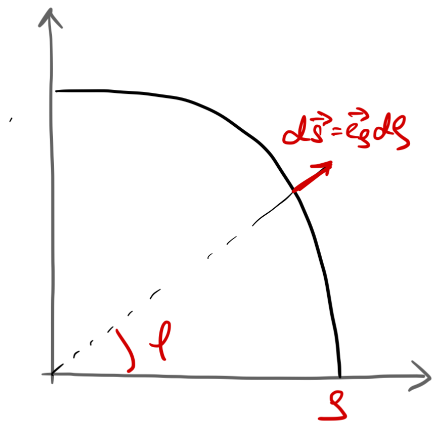
Radiale Richtung

$$\mathrm{d}\vec{s} = \vec{\mathrm{e}}_\rho \mathrm{d}\rho$$



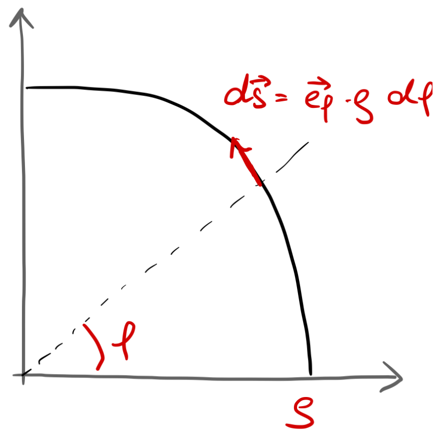
Tangentiale Richtung

$$\mathrm{d}\vec{s} = \vec{\mathrm{e}}_\varphi \rho \,\mathrm{d}\varphi$$



Allgemeine Kurve

$$\mathrm{d}\vec{s} = \vec{\mathrm{e}}_\rho \mathrm{d}\rho + \vec{\mathrm{e}}_\varphi \rho \,\mathrm{d}\varphi$$



Zylinderkoordinaten

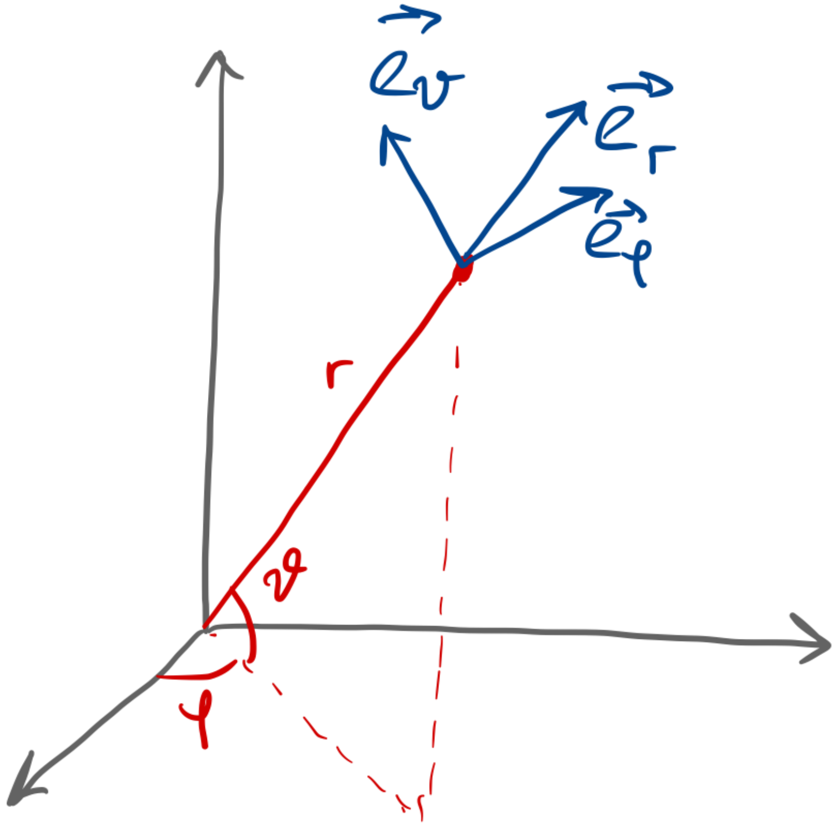
Erweiterung des Wegelementes von Polarkoordinaten um die z-Komponente:

$$\mathrm{d}\vec{s} = \vec{\mathrm{e}}_\rho \mathrm{d}\rho + \vec{\mathrm{e}}_\varphi \rho \,\mathrm{d}\varphi + \vec{\mathrm{e}}_z \mathrm{d}z$$

Parametrierung des Linienintegrals III

Kugelkoordinaten

$$\mathrm{d}\vec{s} = \vec{\mathrm{e}}_r \mathrm{d}r + \vec{\mathrm{e}}_\vartheta r\, \mathrm{d}\vartheta + \vec{\mathrm{e}}_\varphi r \sin(\vartheta)\, \mathrm{d}\varphi$$



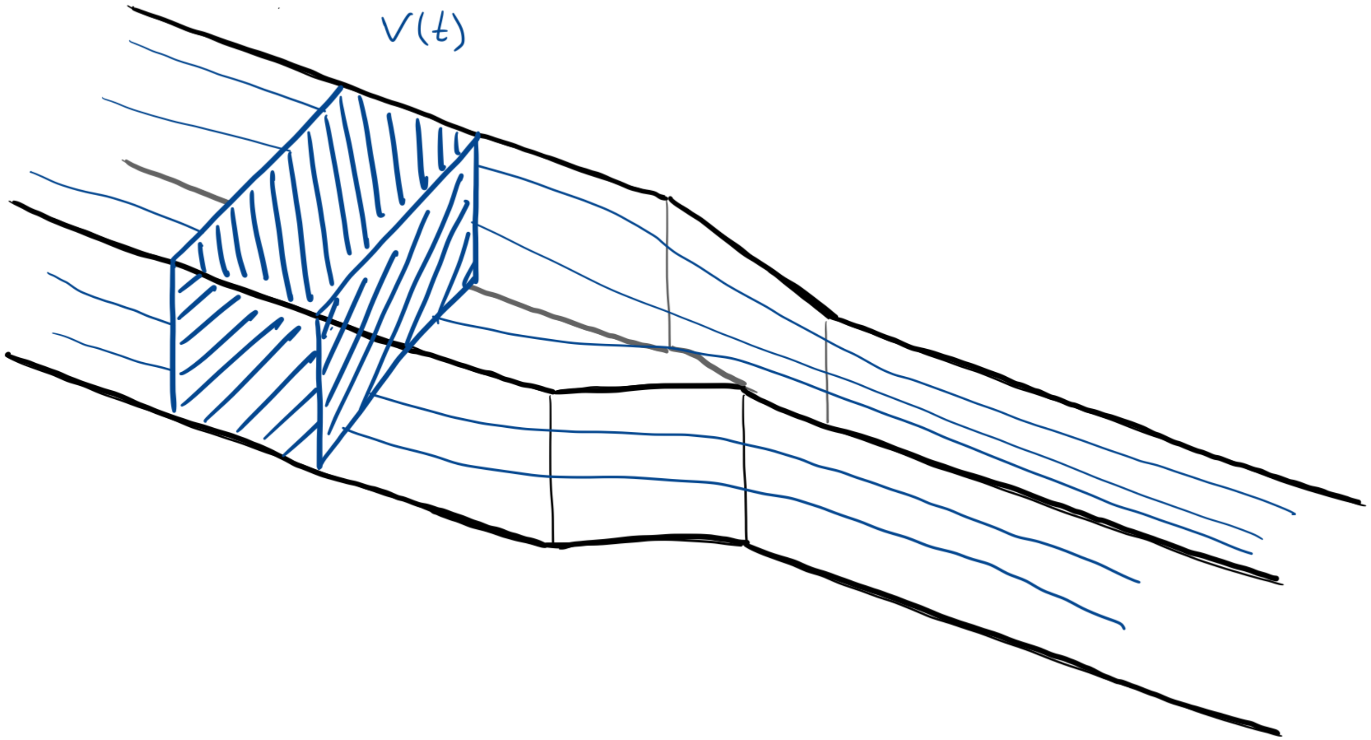
Flächenintegral

Strömung eines Flusses durch Engstelle I

Frage: Ein Fluss tritt auf eine Engstelle. Wie ändert sich die Strömungsgeschwindigkeit?

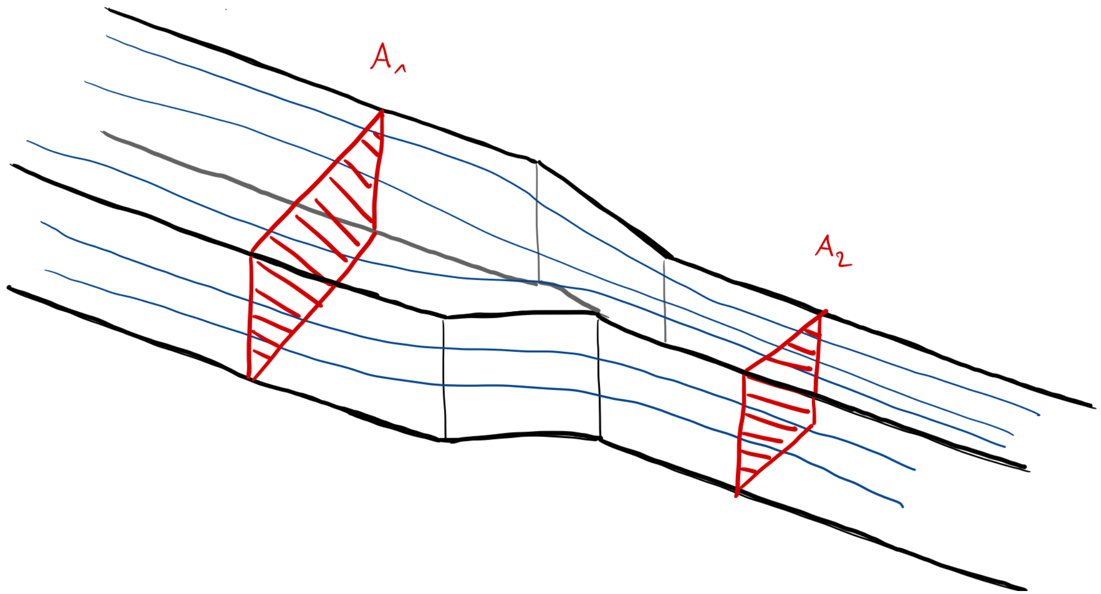
Volumenstrom: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t) = \Phi$ (Fluss) $[\Phi] = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$

Volumenstrom ist unabhängig von der Engstelle



Strömung eines Flusses durch Engstelle II

Beschreibung der Engstelle durch niedrigere Querschnittsfläche $A_2 < A_1$



Flussdichte: $v = \frac{\Phi}{A}$ (Strömungsgeschwindigkeit) $[v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

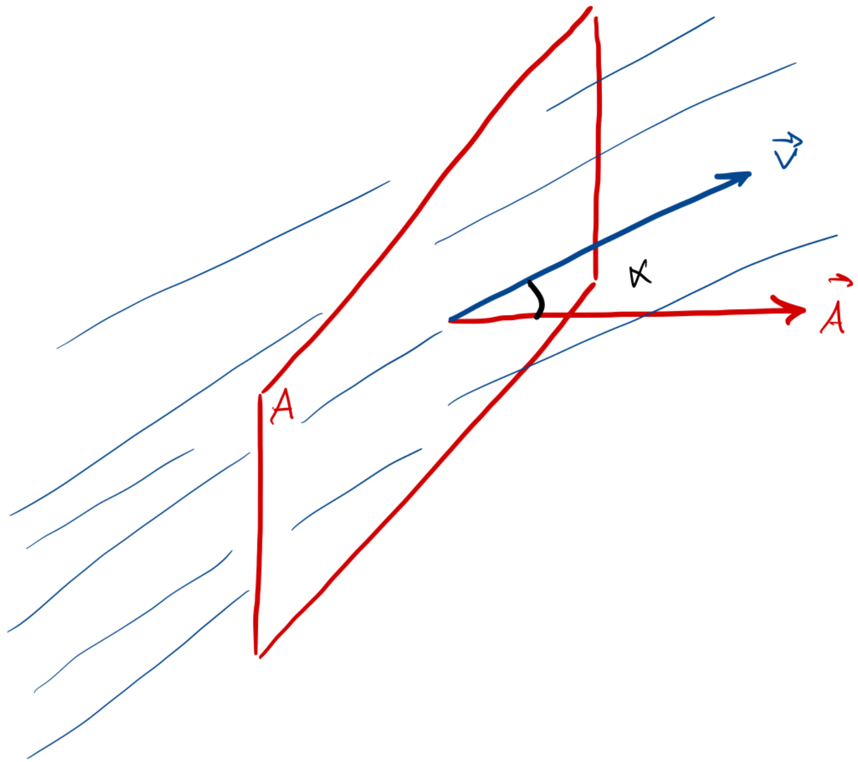
Da Fluss Φ vor und nach der Engstelle gleich folgt

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \qquad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

Strömung eines Flusses durch Engstelle II

Vektorielle Flussdichte und vektorielle Querschnittsfläche

$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A} = |\vec{v}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos(\alpha) = v \cdot A \cdot \cos(\alpha)$$



Berücksichtigung einer inhomogenen Strömung

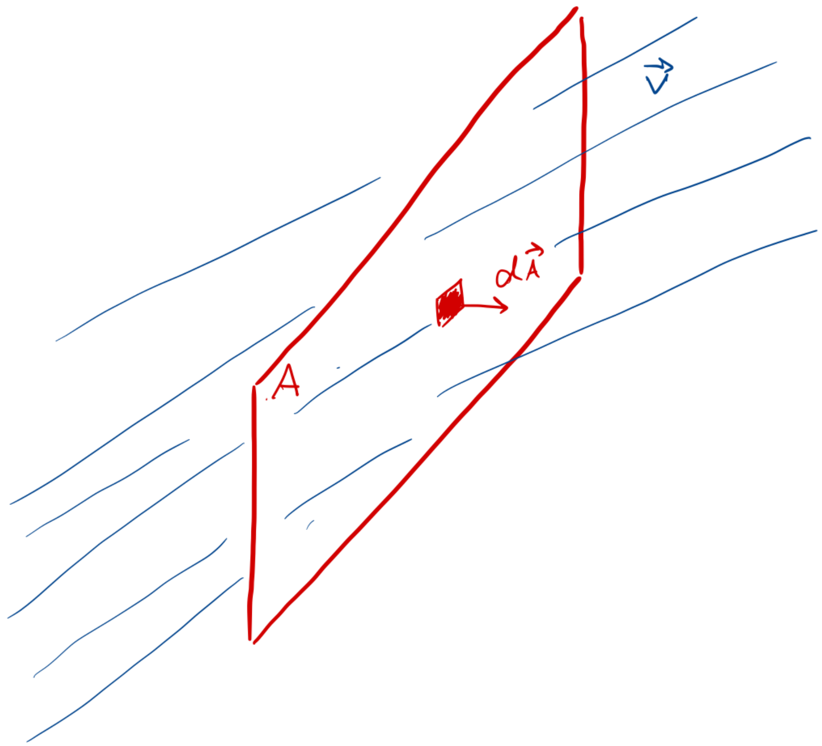
Inhomogene Flussdichte $\vec{v}$ durch berücksichtigung der Reibung am Ufer und Grund

Berechnung des Flusses durch ein infinitessimales Flächenstück

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

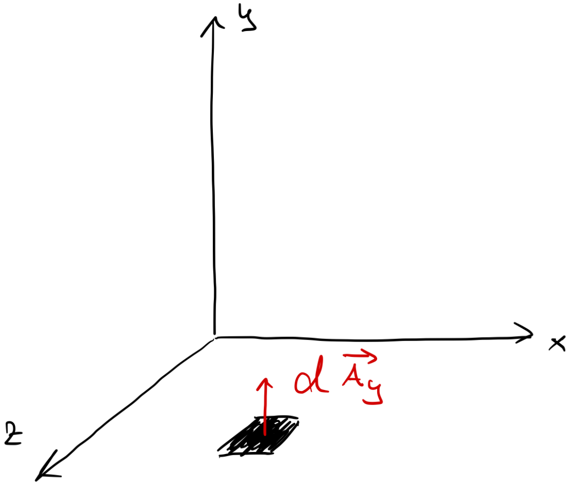
Integration über alle infinitessimalen Fluss-Beiträge

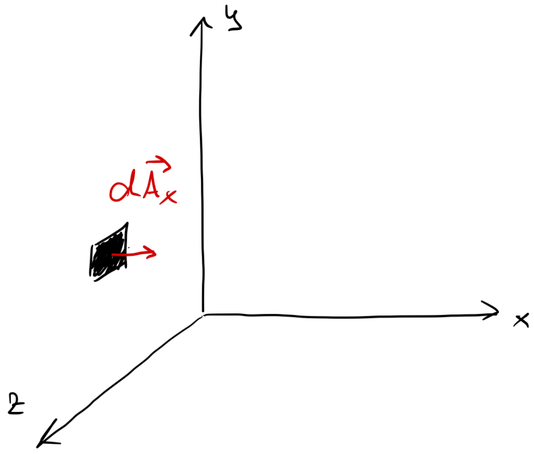
$$\Phi = \iint_A \mathrm{d}\Phi = \iint_A \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

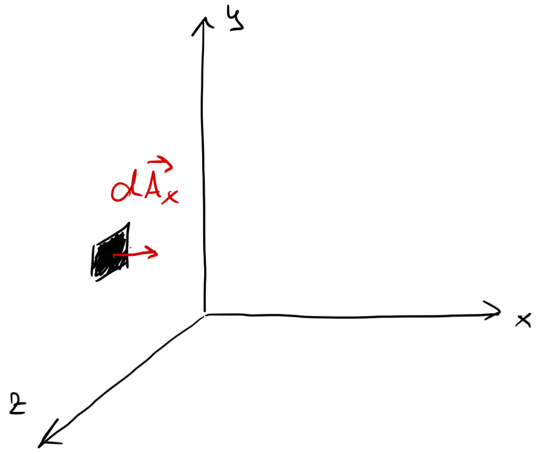


Parametrierung des Flächenintegrals - Kartesische Koordinaten

$$\mathrm{d}\vec{A}_x = \vec{\mathrm{e}}_x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}\vec{A}_y = \vec{\mathrm{e}}_y \mathrm{d}x \mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}\vec{A}_z = \vec{\mathrm{e}}_z \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$



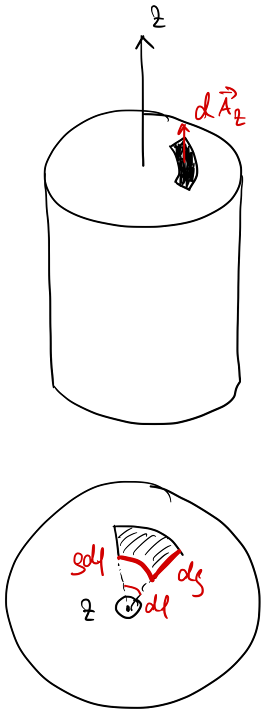




Parametrierung des Flächenintegrals - Zylinderkoordinaten

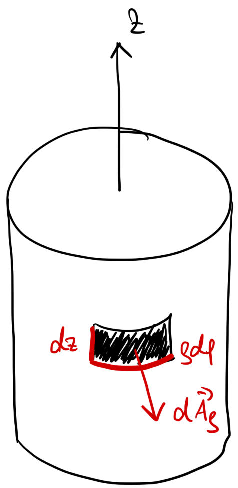
Deckel

$$\mathrm{d}\vec{A}_z = \vec{\mathrm{e}}_z \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi$$



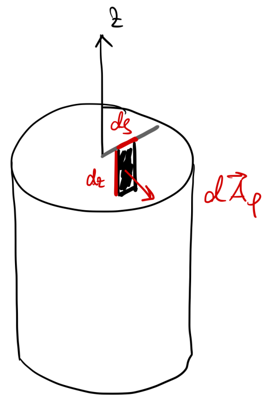
Mantel

$$\mathrm{d}\vec{A}_\rho = \vec{\mathrm{e}}_\rho \rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z$$



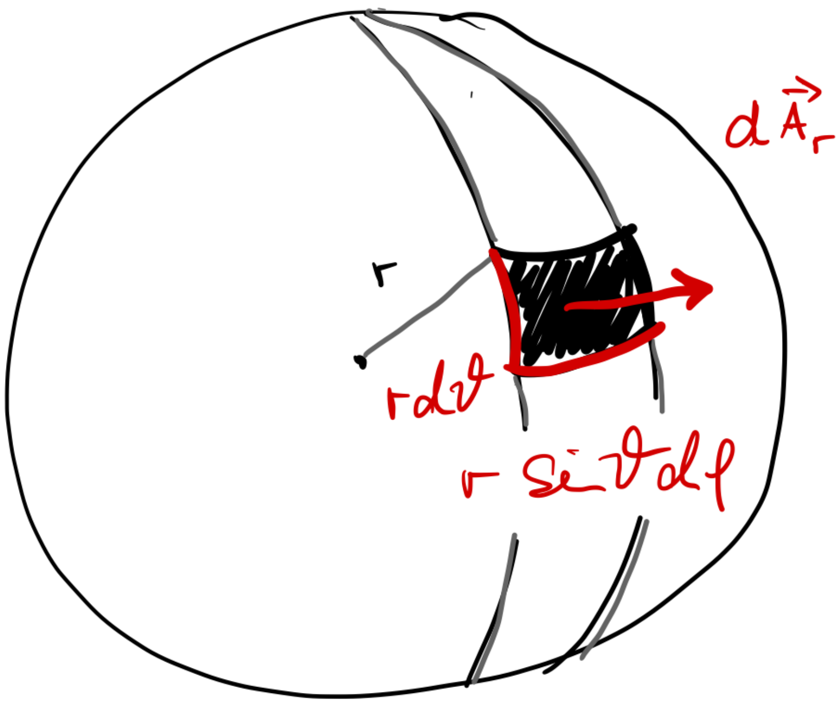
Schnitt

$$\mathrm{d}\vec{A}_\varphi = \vec{\mathrm{e}}_\varphi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z$$



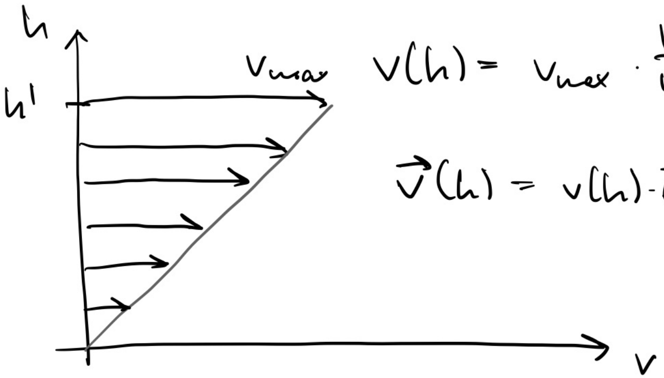
Parametrierung des Flächenintegrals - Kugelkoordinaten

$$\mathrm{d}\vec{A}_r = \vec{\mathrm{e}}_r r^2 \sin(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$$



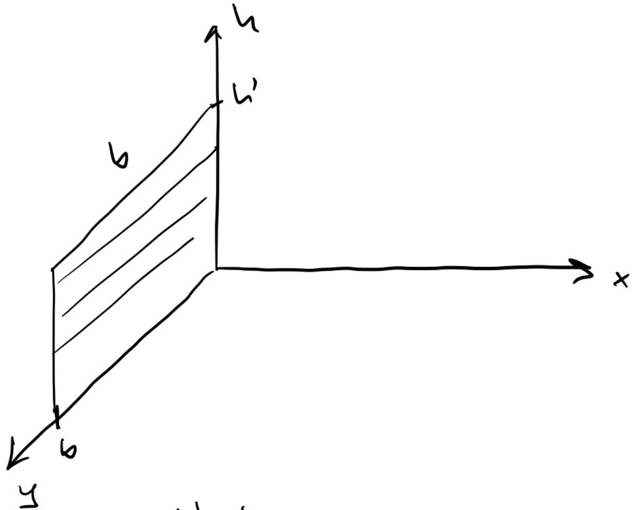
Beispiel zur Berechnung des Flächenintegrals

Beispiel



$$v(h) = v_{max} \cdot \frac{h}{h'}$$

$$\vec{v}(h) = v(h) \cdot \vec{e}_x$$



$$\Phi = \iint_A \vec{v}\, d\vec{A} = \int_{h=0}^{h'} \int_{y=0}^{b} v_{max} \cdot \frac{h}{h'} \cdot \vec{e}_x \vec{e}_x \cdot dh \cdot dy = \frac{v_{max}}{h'} \int_{h=0}^{h'} \int_{y=0}^{b} h \; dy\, dh =$$

$$= \frac{v_{max}}{h'} \int_{h=0}^{h'} h \, [y]_0^b \, dh = \frac{v_{max}}{h'} \int_0^{h'} h \, b \, dh = \frac{v_{max} b}{h'} \left[\frac{h^2}{2} \right]_0^{h'} =$$

$$= \frac{v_{max} b}{h'} \frac{h'^2}{2} = \frac{1}{2} v_{max} \cdot b \cdot h'$$

Volumenintegral

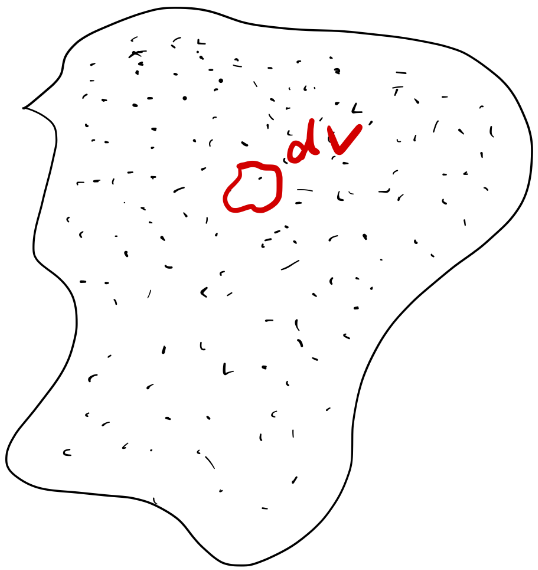
Berechnung der Masse eines Körpers

Gegeben ist Dichte ϱ eines Körpers

Bei homogener Dichte berechnet sich das Gewicht des Körpers mit Volumen V durch

$$m = \varrho \cdot V$$

Zerlegung des Körpers in infinitessimal kleine Volumeneinheiten $\mathrm{d}V$



Masse dieser kleinen Volumeneinheiten

$$\mathrm{d}m = \varrho \cdot \mathrm{d}V$$

Gesamtmasse durch Integration der infinitessimal kleinen Masseneinheiten

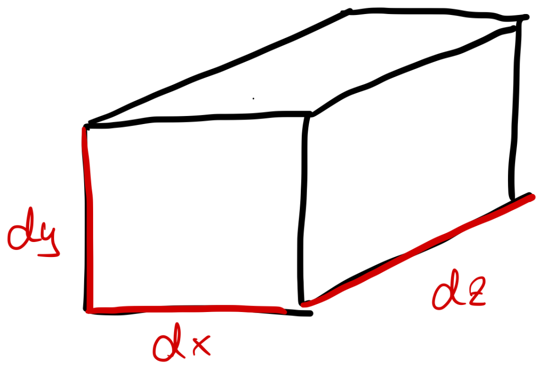
$$m = \int \mathrm{d}m = \iiint_V \varrho \mathrm{d}V$$

Volumenintegral über die Dichte ϱ: Integration über drei Raumrichtungen

Parametrierung des Volumenintegrals

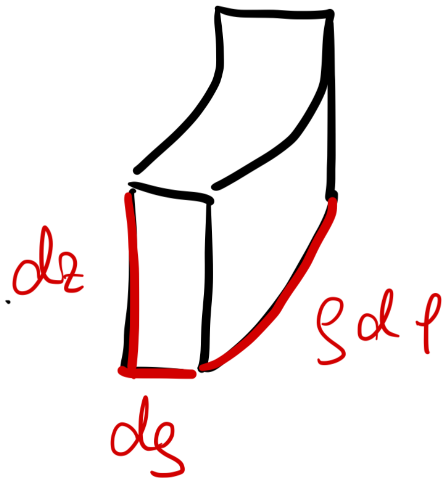
Kartesische Koordinaten

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$



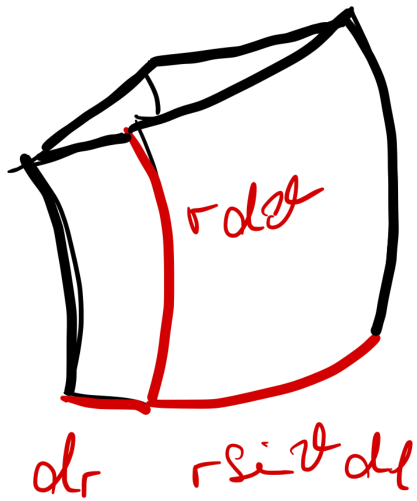
Zylinderkoordinaten

$$\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$



Kugelkoordinaten

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta$$



Referenzen

[1] M. Albach, *Elektrotechnik,* Pearson Verlag.

