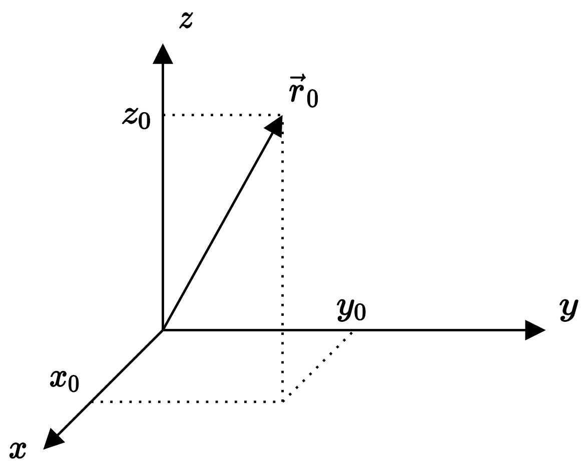
Vektoren und Koordinatensysteme

Vektoren und Kartesische Koordinaten

Ortsvektoren im kartesischen Koordinatensystem

Beschreibung eines Punktes P im dreidimensionalen Raum über einen *Ortsvektor* $\vec{r}_0$



Festlegung von drei Koordinatenachsen in x-, y- und z-Richtung

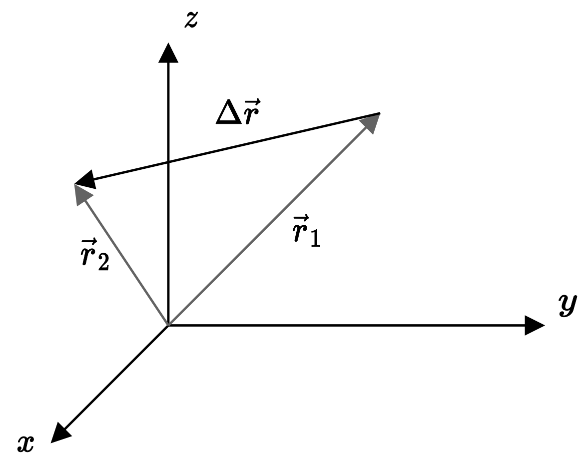
Ortsvektor $\vec{r}_0$ lässt sich mittels x-, y- und z-Komponente beschreiben:

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren im kartesischen Koordinatensystem

Beschreibung eines allgemeinen *Richtungsvektors* z.B. eines Weges als Differenz zweier Punkte:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$



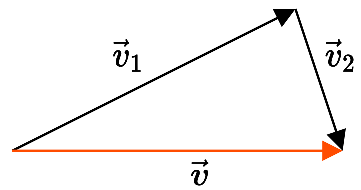
Richtungsvektoren können verschiedene Größen beschreiben, z.B.

- Wege
- Geschwindigkeiten
- elektrische oder magnetische Felder
- etc.

Rechnen mit Vektoren I

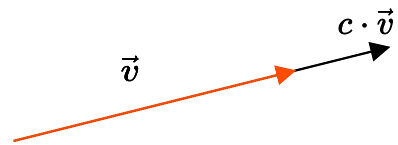
Vektoraddition: Addition der einzelenen Komponenten

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$



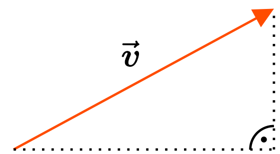
Multiplikation mit einem Skalar

$$c \cdot \vec{v} = c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x \\ c \cdot y \\ c \cdot z \end{pmatrix}$$



Länge eines Vektors

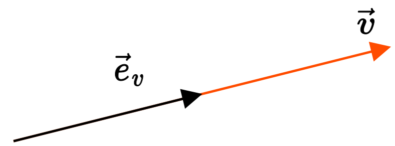
$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$



Rechnen mit Vektoren II

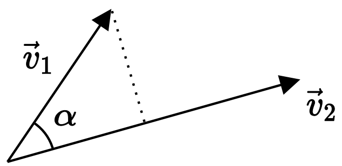
Einheitsvektor

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{mit} \quad |\vec{e}_v| = 1$$



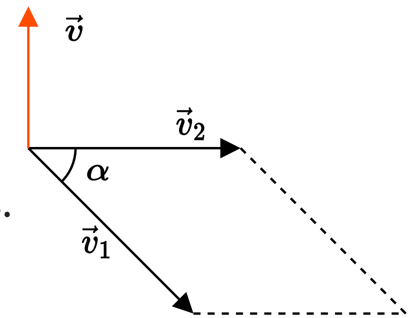
Skalarprodukt

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos(\alpha)$$



Kreuzprodukt

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2 \\ z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2 \\ x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$



Länge von $\vec{v}$ entspricht der Fläche des von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannten Parallelogramms.

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \sin(\alpha)$$

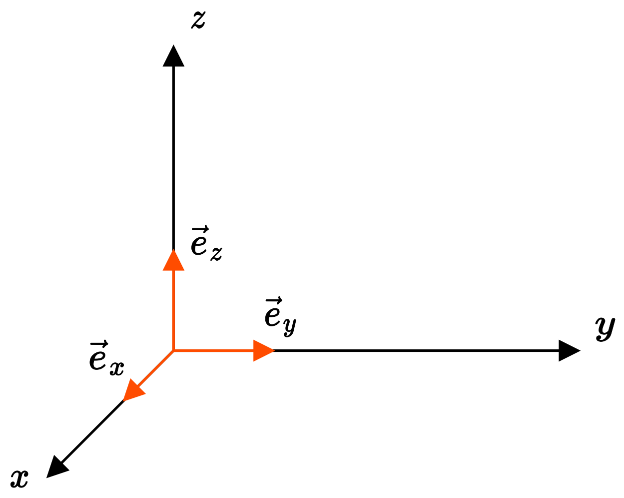
Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems

Verwendung der vektoriellen Schreibweise häufig umständlich

Beschreibung des Ortsvektor über *Einheitsvektoren* in x-, y- und z-Richtung:

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = x_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_0 \cdot \vec{\mathrm{e}}_x + y_0 \cdot \vec{\mathrm{e}}_y + z_0 \cdot \vec{\mathrm{e}}_z$$



Eigenschaften der Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem

Skalarprodukt

$$\vec{\mathrm{e}}_x \cdot \vec{\mathrm{e}}_x = 1 \qquad \vec{\mathrm{e}}_y \cdot \vec{\mathrm{e}}_y = 1 \qquad \vec{\mathrm{e}}_z \cdot \vec{\mathrm{e}}_z = 1$$

$$\vec{\mathrm{e}}_x \cdot \vec{\mathrm{e}}_y = 0 \qquad \vec{\mathrm{e}}_y \cdot \vec{\mathrm{e}}_z = 0 \qquad \vec{\mathrm{e}}_z \cdot \vec{\mathrm{e}}_x = 0$$

Kreuzprodukt

$$\vec{\mathrm{e}}_x \times \vec{\mathrm{e}}_x = 0 \qquad \vec{\mathrm{e}}_y \times \vec{\mathrm{e}}_y = 0 \qquad \vec{\mathrm{e}}_z \times \vec{\mathrm{e}}_z = 0$$

$$\vec{\mathrm{e}}_x \times \vec{\mathrm{e}}_y = \vec{\mathrm{e}}_z \qquad \vec{\mathrm{e}}_y \times \vec{\mathrm{e}}_z = \vec{\mathrm{e}}_x \qquad \vec{\mathrm{e}}_z \times \vec{\mathrm{e}}_x = \vec{\mathrm{e}}_y$$

$$\vec{\mathrm{e}}_y \times \vec{\mathrm{e}}_x = -\vec{\mathrm{e}}_z \qquad \vec{\mathrm{e}}_z \times \vec{\mathrm{e}}_y = -\vec{\mathrm{e}}_x \qquad \vec{\mathrm{e}}_x \times \vec{\mathrm{e}}_z = -\vec{\mathrm{e}}_y$$

Polar- und Zylinderkoordinaten

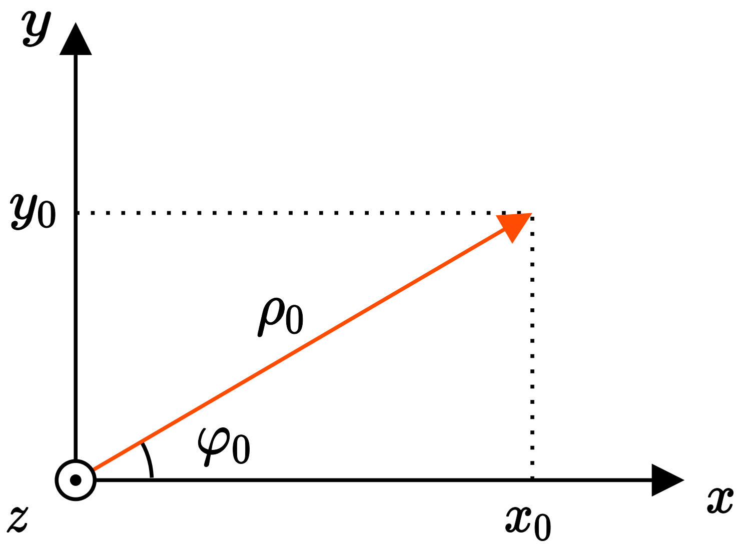
Alternative Beschreibung eines Punktes in der x-y-Ebene

Gegeben ist ein Punkt in der x-y-Ebene (d.h. $z_0 = 0$)

Zwei Möglichkeiten zur Beschreibung dieses Punktes:

1. Kartesische Koordinaten (Komponenten x_0 und y_0)

2. Polarkoordinaten (Abstand ρ_0 des Punktes zum Ursprung und Winkel φ_0 zur x-Achse)



Umrechnung zwischen kartesischen und Polar-Koordinaten

Kartesische Koordinaten zu Polarkoordinaten

Berechnung des Abstandes mittels des *Satz des Pythagoras*

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Berechnung des Winkels

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Vorsicht: Falls $\vec{r}$ im II. oder III. Quadranten sind müssen π zu addieren bzw. zu subtrahieren

Polarkoordinaten zu kartesische Koordinaten

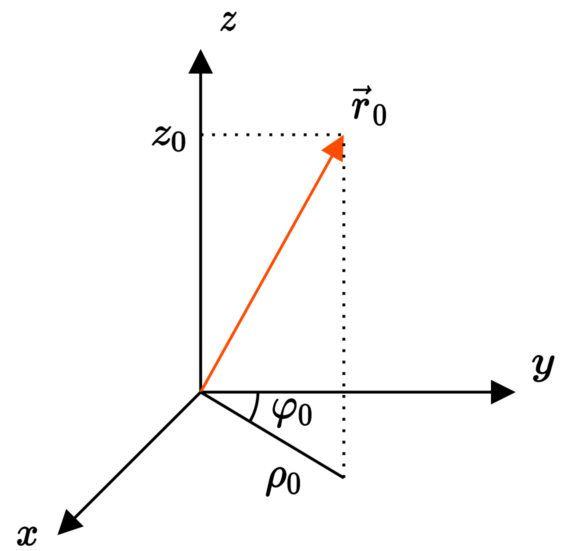
$$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$$

Zylinderkoordinaten

Beschreibung eines Punktes im dreidimensionalen Raum mittels

- Polarkoordinaten in x- und y-Richtung
- kartesischer z-Komponente



$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} \rho_0 \cdot \cos(\varphi_0) \\ \rho_0 \cdot \sin(\varphi_0) \\ z_0 \end{pmatrix} = \rho_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0) \\ \sin(\varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix} + z_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \rho_0 \cdot \vec{\mathrm{e}}_\rho + z_0 \cdot \vec{\mathrm{e}}_z$$

Einheitsvektor $\vec{\mathrm{e}}_\rho$ zeigt vom Ursprung in radiale Richung und ist abhängig vom Winkel φ

$$\vec{\mathrm{e}}_\rho = \vec{\mathrm{e}}_x \cdot \cos(\varphi_0) + \vec{\mathrm{e}}_y \cdot \sin(\varphi_0)$$

Tangentialvektor $\vec{\mathrm{e}}_\varphi$ (senkrecht auf $\vec{\mathrm{e}}_\rho$ in x-y-Ebene)

$$\vec{\mathrm{e}}_\varphi = \vec{\mathrm{e}}_z \times \vec{\mathrm{e}}_\varphi = -\vec{\mathrm{e}}_x \cdot \sin(\varphi_0) + \vec{\mathrm{e}}_y \cdot \cos(\varphi_0)$$

Eigenschaften der Einheitsvektoren des Zylinderkoordinatensystems

Skalarprodukt

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = 1 \qquad \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = 1 \qquad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \qquad \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = 0 \qquad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\rho = 0$$

Kreuzprodukt

$$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\rho = 0 \qquad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\varphi = 0 \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0$$

$$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \qquad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\rho = -\vec{e}_z \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\rho \qquad \vec{e}_\rho \times \vec{e}_z = -\vec{e}_\varphi$$

Umrechnen zwischen kartesischen Koordinaten und Zylinderkoordinaten

Kartesische Koordinaten in Zylinderkoordinaten

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

Zylinderkoordinaten in kartesiche Koordinaten

$$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$$

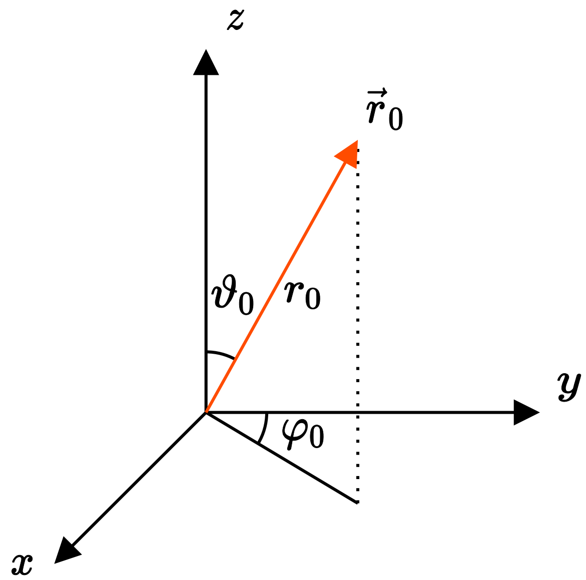
$$z = z$$

Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten

Beschreibung eines Punktes im Raum mittels

- Abstand r_0 vom Ursprung
- Winkel φ_0 zur x-Achse bei Projektion des Punktes in x-y-Ebene
- Winkel ϑ_0 zur z-Achse



$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} r_0 \cdot \sin(\vartheta_0) \cdot \cos(\varphi_0) \\ r_0 \cdot \sin(\vartheta_0) \cdot \sin(\varphi_0) \\ r_0 \cdot \cos(\vartheta_0) \end{pmatrix} = r_0 \cdot \begin{pmatrix} \sin(\vartheta_0) \cdot \cos(\varphi_0) \\ \sin(\vartheta_0) \cdot \sin(\varphi_0) \\ \cos(\vartheta_0) \end{pmatrix} =$$

$$= r_0 \cdot \vec{\mathrm{e}}_r$$

Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten

Einheitsvektor $\vec{e}_r$ ist abhängig von φ und ϑ

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) + \vec{e}_y \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) + \vec{e}_z \cdot \cos(\vartheta)$$

Einheitsvektor $\vec{e}_\varphi$ liegt in x-y-Ebene in tangentialer Richtung zur z-Achse (vgl. Zylinderkoordinaten)

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \cdot \sin(\varphi) + \vec{e}_y \cdot \cos(\varphi)$$

Einheitsvektor $\vec{e}_\vartheta$ steht senkrecht auf $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_r$

$$\begin{aligned}\vec{e}_\vartheta &= \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \\ &= (-\vec{e}_x \cdot \sin(\varphi) + \vec{e}_y \cdot \cos(\varphi)) \times (\vec{e}_x \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) + \vec{e}_y \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) + \vec{e}_z \cdot \cos(\vartheta)) \\ &= \vec{e}_x \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) + \vec{e}_y \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) - \vec{e}_z \cdot \sin(\vartheta)\end{aligned}$$

Eigenschaften der Einheitsvektoren bei Kugelkoordinaten

Skalarprodukt

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1 \qquad \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = 1 \qquad \vec{e}_\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta = 1$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \qquad \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\vartheta = 0 \qquad \vec{e}_\vartheta \cdot \vec{e}_r = 0$$

Kreuzprodukt

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_r = 0 \qquad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\varphi = 0 \qquad \vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\vartheta = 0$$

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi \qquad \vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \qquad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\vartheta$$

$$\vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_r = -\vec{e}_\varphi \qquad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\vartheta = -\vec{e}_r \qquad \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\vartheta$$

Umrechnung zwischen kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten

Kartesische Koordinaten in Kugelkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Kugelkorrdinaten in kartesische Koordinaten

$$x = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = r \cdot \cos(\vartheta)$$

Referenzen

[1] G. Hagmann, *Grundlagen der Elektrotechnik,* Aula Verlag.

[2] T. Rießinger, *Mathematik für Ingenieure,* Springer Verlag.

[3] R. Unbehauen, *Grundlagen der Elektrotechnik 1,* Springer Verlag.

