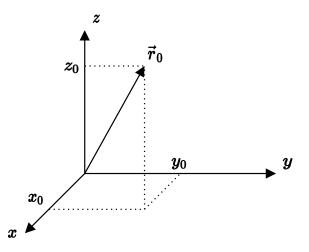
Vektoren und Koordinatensysteme

Vektoren und Kartesische Koordinaten

Ortsvektoren im kartesischen Koordinatensystem

Beschreibung eines Punktes P im dreidimensionalen Raum über einen $\mathit{Ortsvektor}\ \vec{r}_0$



Festlegung von drei Koordinatenachsen in x-, y- und z-Richtung

Ortsvektor \vec{r}_0 lässt sich mittels x-, y- und z-Komponente beschreiben:

$$ec{r}_0 = \left(egin{array}{c} x_0 \ y_0 \ z_0 \end{array}
ight)$$

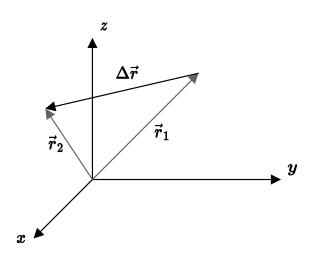
Richtungsvektoren im kartesischen Koordinatensystem

Beschreibung eines allgemeinen *Richtungsvektors* z.B. eines Weges als Differenz zweier Punkte:

$$\Delta ec{r}=ec{r}_2-ec{r}_1=\left(egin{array}{c} x_2-x_1\ y_2-y_1\ z_2-z_1 \end{array}
ight)$$

Richtungsvektoren können verschiedene Größen beschreiben, z.B.

- Wege
- Geschwindigkeiten
- elektrische oder magnetische Felder
- etc.



Rechnen mit Vektoren I

Vektoraddition: Addition der einzelenen Komponenten

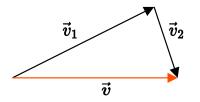
$$ec{v}=ec{v}_1+ec{v}_2=\left(egin{array}{c} x_1\ y_1\ z_1 \end{array}
ight)+\left(egin{array}{c} x_2\ y_2\ z_2 \end{array}
ight)=\left(egin{array}{c} x_1+x_2\ y_1+y_2\ z_1+z_2 \end{array}
ight)$$



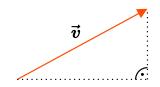
$$c \cdot ec{v} = c \cdot \left(egin{array}{c} x \ y \ z \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} c \cdot x \ c \cdot y \ c \cdot z \end{array}
ight)$$



$$|ec{v}| = \left| \left(egin{array}{c} x \ y \ z \end{array}
ight)
ight| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{ec{v} \cdot ec{v}}$$







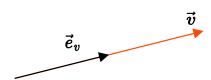
Rechnen mit Vektoren II

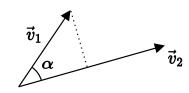
Einheitsvektor

$$ec{\mathrm{e}}_v = rac{ec{v}}{|ec{v}|} \quad \mathsf{mit} \quad |ec{\mathrm{e}}_v| = 1$$

Skalarprodukt

$$ec{v}_1\cdotec{v}_2=\left(egin{array}{c} x_1\ y_1\ z_1 \end{array}
ight)\cdot\left(egin{array}{c} x_2\ y_2\ z_2 \end{array}
ight)=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=|ec{v}_1|\cdot |ec{v}_2|\cdot \cos(lpha)$$



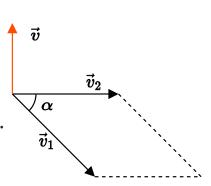


Kreuzprodukt

$$ec{v}=ec{v}_1 imesec{v}_2=\left(egin{array}{c} x_1\ y_1\ z_1 \end{array}
ight) imes\left(egin{array}{c} x_2\ y_2\ z_2 \end{array}
ight)=\left(egin{array}{c} y_1\cdot z_2-z_1\cdot y_2\ z_1\cdot x_2-x_1\cdot z_2\ x_1\cdot y_2-y_1\cdot x_2 \end{array}
ight)$$

Länge von \vec{v} entspricht der Fläche des von \vec{v}_1 und \vec{v}_2 aufgespannten Parallelogramms.

$$|ec{v}| = |ec{v}_1| \cdot |ec{v}_2| \cdot \sin(lpha)$$

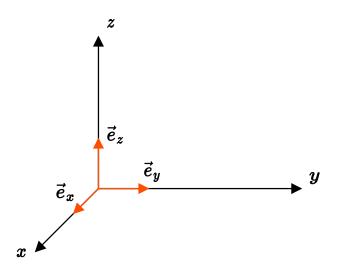


Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems

Verwendung der vektoriellen Schreibweise häufig umständlich

Beschreibung des Ortsvektor über *Einheitsvektoren* in x-, y- und z-Richtung:

$$egin{aligned} ec{r}_0 &= \left(egin{array}{c} x_0 \ y_0 \ z_0 \end{array}
ight) = x_0 \cdot \left(egin{array}{c} 1 \ 0 \ 0 \end{array}
ight) + y_0 \cdot \left(egin{array}{c} 0 \ 1 \ 0 \end{array}
ight) + z_0 \cdot \left(egin{array}{c} 0 \ 0 \ 1 \end{array}
ight) \ &= x_0 \cdot ec{\mathrm{e}}_x + y_0 \cdot ec{\mathrm{e}}_y + z_0 \cdot ec{\mathrm{e}}_z \end{aligned}$$



Eigenschaften der Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem

Skalarprodukt

$$\vec{\mathbf{e}}_x \cdot \vec{\mathbf{e}}_x = 1$$

$$\vec{\mathrm{e}}_x \cdot \vec{\mathrm{e}}_x = 1 \qquad \qquad \vec{\mathrm{e}}_y \cdot \vec{\mathrm{e}}_y = 1 \qquad \qquad \vec{\mathrm{e}}_z \cdot \vec{\mathrm{e}}_z = 1$$

$$\vec{\mathbf{e}}_z \cdot \vec{\mathbf{e}}_z = 1$$

$$\vec{\mathrm{e}}_x \cdot \vec{\mathrm{e}}_y = 0 \qquad \qquad \vec{\mathrm{e}}_y \cdot \vec{\mathrm{e}}_z = 0 \qquad \qquad \vec{\mathrm{e}}_z \cdot \vec{\mathrm{e}}_x = 0$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{u} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{z} = 0$$

$$\vec{\mathbf{e}}_z \cdot \vec{\mathbf{e}}_x = 0$$

Kreuzprodukt

$$\vec{\mathbf{e}}_x \times \vec{\mathbf{e}}_x = 0$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{u} \times \vec{\mathbf{e}}_{u} = 0$$

$$ec{ ext{e}}_x imes ec{ ext{e}}_x = 0 \hspace{1cm} ec{ ext{e}}_y imes ec{ ext{e}}_y = 0 \hspace{1cm} ec{ ext{e}}_z imes ec{ ext{e}}_z = 0$$

$$ec{ ext{e}}_x imes ec{ ext{e}}_y = ec{ ext{e}}_z \hspace{1cm} ec{ ext{e}}_y imes ec{ ext{e}}_z = ec{ ext{e}}_x \hspace{1cm} ec{ ext{e}}_z imes ec{ ext{e}}_x = ec{ ext{e}}_y$$

$$\vec{\mathbf{e}}_y \times \vec{\mathbf{e}}_z = \vec{\mathbf{e}}_x$$

$$\vec{\mathbf{e}}_z imes \vec{\mathbf{e}}_x = \vec{\mathbf{e}}_y$$

$$\vec{\mathbf{e}}_y \times \vec{\mathbf{e}}_x = -\vec{\mathbf{e}}_z$$

$$\vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{e}}_y = -\vec{\mathbf{e}}_x$$

$$ec{ ext{e}}_y imes ec{ ext{e}}_x = -ec{ ext{e}}_z \hspace{1cm} ec{ ext{e}}_z imes ec{ ext{e}}_y = -ec{ ext{e}}_x \hspace{1cm} ec{ ext{e}}_x imes ec{ ext{e}}_z = -ec{ ext{e}}_y$$

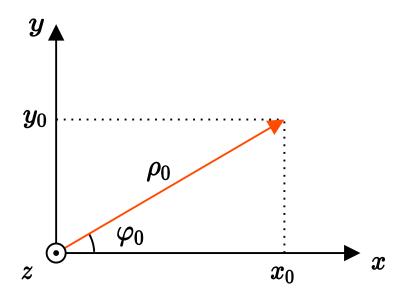
Polar- und Zylinderkoordinaten

Alternative Beschreibung eines Punktes in der x-y-Ebene

Gegeben ist ein Punkt in der x-y-Ebene (d.h. $z_0 = 0$)

Zwei Möglichkeiten zur Beschreibung dieses Punktes:

- 1. Kartesische Koordinaten (Komponenten x_0 und y_0)
- 2. Polarkoordinaten (Abstand ρ_0 des Punktes zum Ursprung und Winkel φ_0 zur x-Achse)



Umrechnung zwischen kartesischen und Polar-Koordinaten

Kartesische Koordinaten zu Polarkoordinaten

Berechnung des Abstandes mittels des Satz des Pythagoras

$$ho=\sqrt{x^2+y^2}$$

Berechnung des Winkels

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Vorsicht: Falls \vec{r} im II. oder III. Quadranten sind müssen π zu addieren bzw. zu subtrahieren

Polarkoordinaten zu kartesische Koordinaten

$$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$$

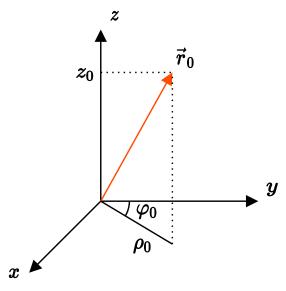
$$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$$

Zylinderkoordinaten

Beschreibung eines Punktes im dreidimensionalen Raum mittels

- Polarkoordinaten in x- und y-Richtung
- kartesischer z-Komponente

$$egin{aligned} ec{r}_0 &= \left(egin{aligned}
ho_0 \cdot \cos(arphi_0) \
ho_0 \cdot \sin(arphi_0) \ z_0 \end{array}
ight) =
ho_0 \cdot \left(egin{aligned} \cos(arphi_0) \ \sin(arphi_0) \ 0 \end{array}
ight) + z_0 \cdot \left(egin{aligned} 0 \ 0 \ 1 \end{array}
ight) \ &=
ho_0 \cdot ec{
m e}_
ho + z_0 \cdot ec{
m e}_z \end{aligned}$$



Einheitsvektor $ec{\mathbf{e}}_
ho$ zeigt vom Ursprung in radiale Richung und ist abhängig vom Winkel arphi

$$ec{\mathrm{e}}_
ho = ec{\mathrm{e}}_x \cdot \cos(arphi_0) + ec{\mathrm{e}}_y \cdot \sin(arphi_0)$$

Tangentialvektor \vec{e}_{φ} (senkrecht auf \vec{e}_{ρ} in x-y-Ebene)

$$ec{\mathrm{e}}_{arphi} = ec{\mathrm{e}}_z imes ec{\mathrm{e}}_{arphi} = -ec{\mathrm{e}}_x \cdot \sin(arphi_0) + ec{\mathrm{e}}_y \cdot \cos(arphi_0)$$

Copyright by Prof. Dr. Christian Siegl

Eigenschaften der Einheitsvektoren des Zylinderkoordinatensystems

Skalarprodukt

$$\vec{\mathrm{e}}_{
ho}\cdot\vec{\mathrm{e}}_{
ho}=1 \qquad \qquad \vec{\mathrm{e}}_{arphi}\cdot\vec{\mathrm{e}}_{arphi}=1 \qquad \qquad \vec{\mathrm{e}}_{z}\cdot\vec{\mathrm{e}}_{z}=1$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\varphi} = 1$$

$$\vec{\mathrm{e}}_z \cdot \vec{\mathrm{e}}_z = 1$$

$$ec{\mathrm{e}}_
ho\cdotec{\mathrm{e}}_arphi=0 \qquad \qquad ec{\mathrm{e}}_arphi\cdotec{\mathrm{e}}_z=0 \qquad \qquad ec{\mathrm{e}}_z\cdotec{\mathrm{e}}_
ho=0$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{\omega} \cdot \vec{\mathbf{e}}_z = 0$$

$$\vec{\mathbf{e}}_z \cdot \vec{\mathbf{e}}_\rho = 0$$

Kreuzprodukt

$$ec{
m e}_
ho imes ec{
m e}_
ho = 0 \hspace{1cm} ec{
m e}_arphi imes ec{
m e}_arphi = 0 \hspace{1cm} ec{
m e}_z imes ec{
m e}_z = 0$$

$$\vec{\mathrm{e}}_{arphi} imes \vec{\mathrm{e}}_{arphi} = 0$$

$$\vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{e}}_z = 0$$

$$ec{
m e}_
ho imes ec{
m e}_arphi = ec{
m e}_z \hspace{1cm} ec{
m e}_arphi imes ec{
m e}_z imes ec{
m e}_
ho = ec{
m e}_arphi \hspace{1cm}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{\varphi} \times \vec{\mathbf{e}}_{z} = \vec{\mathbf{e}}_{\varrho}$$

$$\vec{\mathrm{e}}_z imes \vec{\mathrm{e}}_
ho = \vec{\mathrm{e}}_arphi$$

$$ec{
m e}_{arphi} imes ec{
m e}_{
ho} = -ec{
m e}_z$$

$$ec{\mathrm{e}}_z imes ec{\mathrm{e}}_arphi = -ec{\mathrm{e}}_
ho$$

$$ec{
m e}_{arphi} imes ec{
m e}_{
ho} = -ec{
m e}_z \hspace{1cm} ec{
m e}_z imes ec{
m e}_{arphi} = -ec{
m e}_{
ho} \hspace{1cm} ec{
m e}_{
ho} imes ec{
m e}_z = -ec{
m e}_{arphi}$$

Umrechnen zwischen kartesischen Koordinaten und Zylinderkoordinaten

Kartesische Koordinaten in Zylinderkoordinaten

$$ho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

Zylinderkoordinaten in kartesiche Koordinaten

$$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = z$$

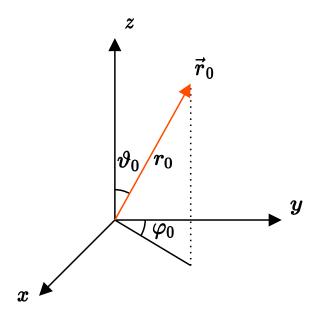
Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten

Beschreibung eines Punktes im Raum mittels

- Abstand r_0 vom Ursprung
- Winkel φ_0 zur x-Achse bei Projektion des Punktes in x-y-Ebene
- Winkel ϑ_0 zur z-Achse

$$ec{r}_0 = \left(egin{array}{c} r_0 \cdot \sin(artheta_0) \cdot \cos(arphi_0) \ r_0 \cdot \sin(artheta_0) \cdot \sin(arphi_0) \ r_0 \cdot \cos(artheta_0) \end{array}
ight) = r_0 \cdot \left(egin{array}{c} \sin(artheta_0) \cdot \cos(arphi_0) \ \sin(artheta_0) \ \cos(artheta_0) \end{array}
ight) = r_0 \cdot ec{
m e}_r$$



Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten

Einheitsvektor $\vec{\mathbf{e}}_r$ ist abhängig von φ und ϑ

$$ec{\mathrm{e}}_r = ec{\mathrm{e}}_x \cdot \sin(artheta) \cdot \cos(arphi) + ec{\mathrm{e}}_y \cdot \sin(artheta) \cdot \sin(arphi) + ec{\mathrm{e}}_z \cdot \cos(artheta)$$

Einheitsvektor \vec{e}_{φ} liegt in x-y-Ebene in tangentialer Richtung zur z-Achse (vgl. Zylinderkoordinaten)

$$ec{\mathrm{e}}_{arphi} = -ec{\mathrm{e}}_x \cdot \sin(arphi) + ec{\mathrm{e}}_y \cdot \cos(arphi)$$

Einheitsvektor $ec{\mathbf{e}}_{artheta}$ steht senkrecht auf $ec{\mathbf{e}}_{arphi}$ und $ec{\mathbf{e}}_{r}$

$$egin{aligned} ec{\mathbf{e}}_artheta &= ec{\mathbf{e}}_arphi imes ec{\mathbf{e}}_r = \ &= (-ec{\mathbf{e}}_x \cdot \sin(arphi) + ec{\mathbf{e}}_y \cdot \cos(arphi)) imes (ec{\mathbf{e}}_x \cdot \sin(artheta) \cdot \cos(arphi) + ec{\mathbf{e}}_y \cdot \sin(artheta) \cdot \sin(arphi) + ec{\mathbf{e}}_z \cdot \cos(artheta) \ &= ec{\mathbf{e}}_x \cdot \cos(artheta) \cdot \cos(arphi) + ec{\mathbf{e}}_y \cdot \cos(artheta) \cdot \sin(arphi) - ec{\mathbf{e}}_z \cdot \sin(artheta) \end{aligned}$$

Eigenschaften der Einheitsvektoren bei Kugelkoordinaten

Skalarprodukt

$$\vec{\mathbf{e}}_r \cdot \vec{\mathbf{e}}_r = 1$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\varphi} = 1$$

$$ec{
m e}_r \cdot ec{
m e}_r = 1 \qquad \qquad ec{
m e}_arphi \cdot ec{
m e}_arphi = 1 \qquad \qquad ec{
m e}_artheta \cdot ec{
m e}_artheta = 1$$

$$ec{\mathrm{e}}_r \cdot ec{\mathrm{e}}_arphi = 0 \qquad \qquad ec{\mathrm{e}}_arphi \cdot ec{\mathrm{e}}_artheta = 0 \qquad \qquad ec{\mathrm{e}}_artheta \cdot ec{\mathrm{e}}_r = 0$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\vartheta} = 0$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{\vartheta} \cdot \vec{\mathbf{e}}_r = 0$$

Kreuzprodukt

$$\vec{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{e}}_r = 0$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{\varphi} \times \vec{\mathbf{e}}_{\varphi} = 0$$

$$ec{
m e}_r imes ec{
m e}_r = 0 \hspace{1cm} ec{
m e}_arphi imes ec{
m e}_arphi = 0 \hspace{1cm} ec{
m e}_artheta imes ec{
m e}_artheta = 0$$

$$\vec{\mathrm{e}}_r imes \vec{\mathrm{e}}_artheta = \vec{\mathrm{e}}_arphi$$

$$\vec{\mathrm{e}}_{\vartheta} imes \vec{\mathrm{e}}_{\varphi} = \vec{\mathrm{e}}_{r}$$

$$ec{
m e}_r imes ec{
m e}_artheta = ec{
m e}_arphi \hspace{1.5cm} ec{
m e}_artheta imes ec{
m e}_arphi = ec{
m e}_artheta \hspace{1.5cm} ec{
m e}_arphi imes ec{
m e}_arphi = ec{
m e}_artheta \hspace{1.5cm}$$

$$ec{
m e}_artheta imes ec{
m e}_r = -ec{
m e}_arphi$$

$$ec{\mathrm{e}}_{arphi} imes ec{\mathrm{e}}_{artheta} = -ec{\mathrm{e}}_r$$

$$ec{
m e}_artheta imes ec{
m e}_r = -ec{
m e}_arphi \hspace{1.5cm} ec{
m e}_arphi imes ec{
m e}_artheta = -ec{
m e}_artheta \hspace{1.5cm} ec{
m e}_r imes ec{
m e}_arphi = -ec{
m e}_artheta \hspace{1.5cm}$$

Umrechnung zwischen kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten

Kartesische Koordinaten in Kugelkoordinaten

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$artheta=rccos\left(rac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}
ight)$$

Kugelkorrdinaten in kartesische Koordinaten

$$x = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = r \cdot \cos(\vartheta)$$

Referenzen

- [1] G. Hagmann, Grundlagen der Elektrotechnik, Aula Verlag.
- [2] T. Rießinger, Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag.
- [3] R. Unbehauen, Grundlagen der Elektrotechnik 1, Springer Verlag.