Dreiphasensysteme

Kraftwerk

Quelle: Von Avda - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=26894741

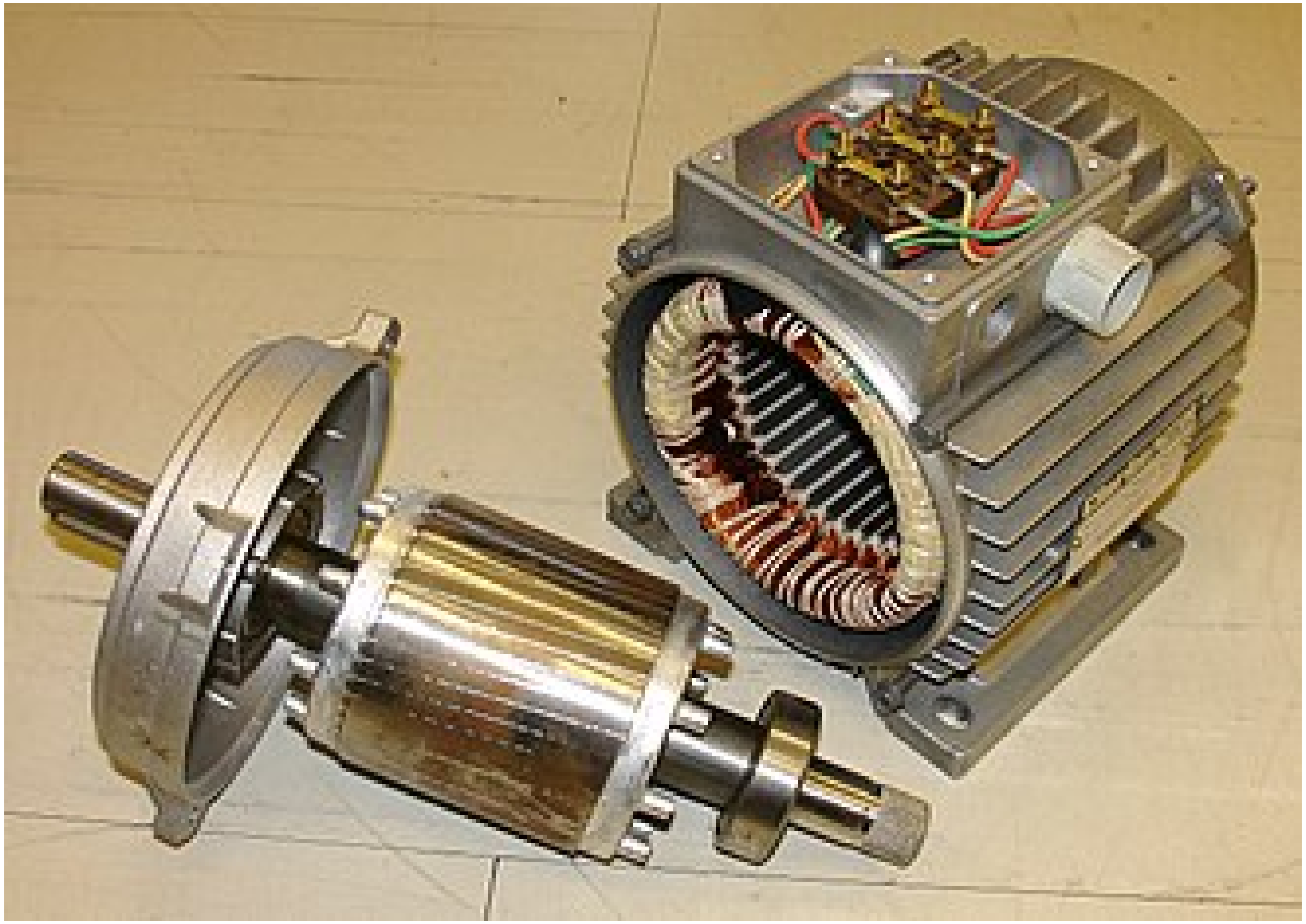
Freileitung

Quelle: http://de.wikipedia.org

Windkraftanlage

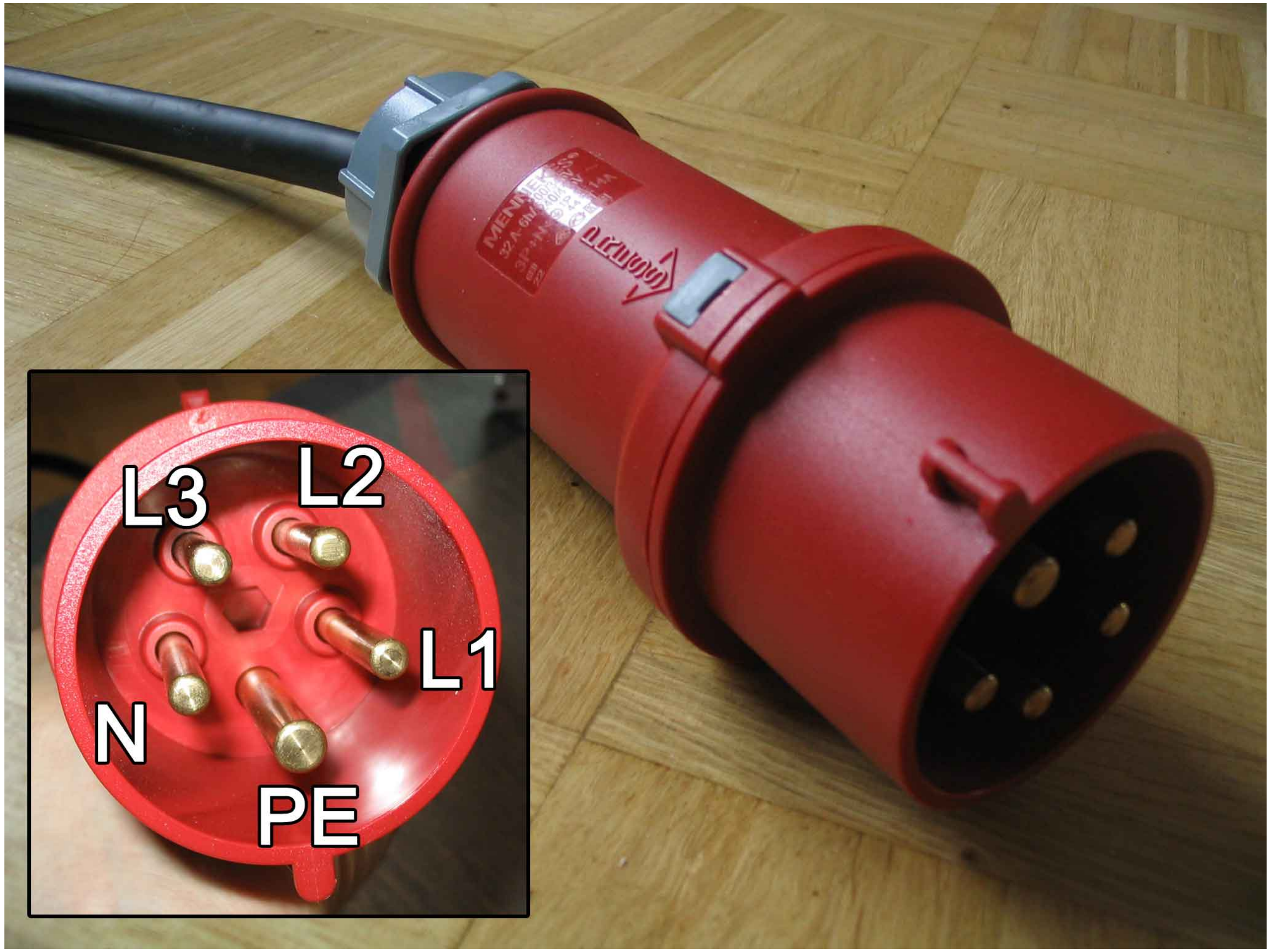
Quelle: http://de.wikipedia.org

Elektromotor



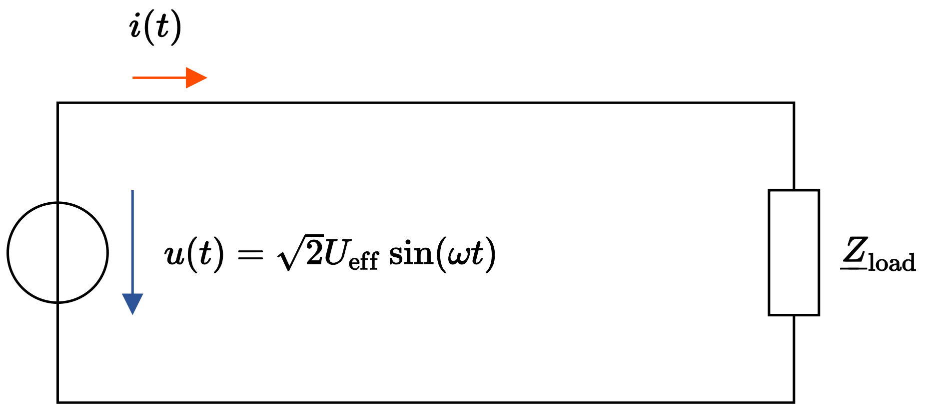
Quelle: http://de.wikipedia.org

Dreiphasenstecker



Quelle: Stephan N, CC BY-SA 3.0 , via Wikimedia Commons

Probleme bei der Anwendung von einphasiger Wechselstromtechnik



Momentanleistung am Verbraucher ist nicht konstant über die Zeit

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \sqrt{2}U_{\mathrm{eff}} \sin(\omega t) \cdot \sqrt{2}I_{\mathrm{eff}} \sin(\omega t + \Delta\varphi) = U_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}} \cdot \Big(\cos(\Delta\varphi) - \cos(2\omega t + \Delta\varphi) \Big) =$$

$$= U_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}} \cdot \Big(\cos(\Delta\varphi) - \cos(\Delta\varphi)\cos(2\omega t) + \sin(\Delta\varphi)\sin(2\omega t) \Big) =$$

$$= U_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}} \cos(\Delta\varphi) \cdot \Big(1 - \cos(2\omega t)\Big) + U_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}} \sin(\Delta\varphi) \cdot \sin(2\omega t) = P \cdot \Big(1 - \cos(2\omega t)\Big) + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Bei elektrischen Maschinen schwankt somit das Drehmoment und somit die mechanische Belastung.

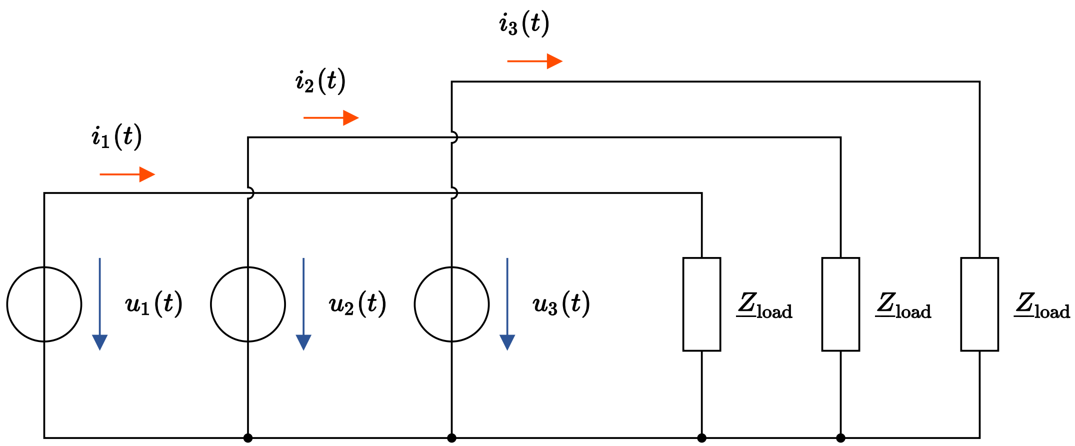
Symmetrisches Dreiphasensystem

Verwendung von drei Spannungsquellen mit jeweiligen Phasenversatz von $\frac{2\pi}{3}$ oder $120°$

$$u_1(t) = \sqrt{2} \cdot U_{\text{eff}} \sin(\omega t)$$

$$u_2(t) = \sqrt{2} \cdot U_{\text{eff}} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$u_3(t) = \sqrt{2} \cdot U_{\text{eff}} \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$$



Konstante Momentanleistung am Verbraucher

$$\begin{aligned} p(t) = P \cdot \Big(1 - \cos(2\omega t)\Big) \\ &+Q \cdot \sin(2\omega t) + P \cdot \Big(1 - \cos(2\omega t - \frac{2\pi}{3})\Big) \\ &+Q \cdot \sin(2\omega t - \frac{2\pi}{3}) + P \cdot \Big(1 - \cos(2\omega t + \frac{2\pi}{3})\Big) + Q \cdot \sin(2\omega t + \frac{2\pi}{3}) \\ &= 3 \cdot P \end{aligned}$$

Vorteile bei der Anwendung eines Dreiphasensystems

Offensichtliche Vorteile

- Konstante Momentanleistung am Verbraucher
- Im Vergleich zum Einphasensystem werden zur Übertragung der 3-fachen Leistung nur vier Leitungen statt sechs Leitungen benötigt.

Weitere Vorteile

- Preiswerte und effiziente Motoren und Generatoren
- Kompakter Aufbau von Dreiphasen-Transformatoren

Zeigerdarstellung

Zeigerdarstellung der drei Spannungen als Spitzwenwertzeiger

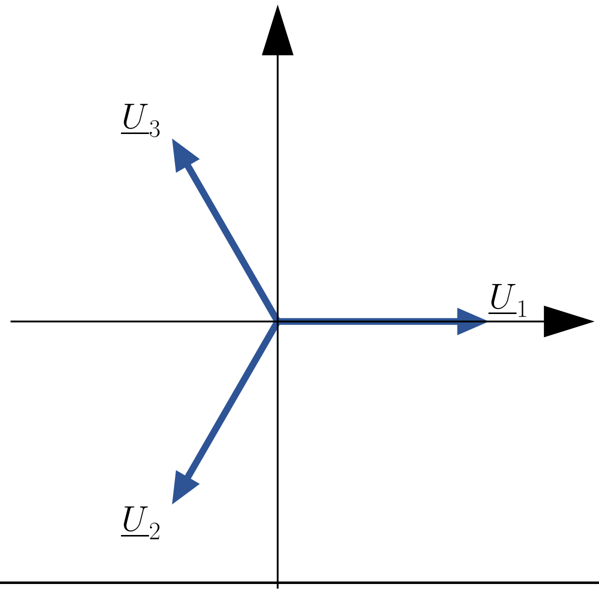
$$\underline{\hat{U}}_1 = \hat{U} \qquad \underline{\hat{U}}_2 = \hat{U}e^{-j\frac{2\pi}{3}} \qquad \underline{\hat{U}}_3 = \hat{U}e^{+j\frac{2\pi}{3}}$$

Zeigerdarstellung der drei Spannungen als Effektivwertzeiger

$$\underline{U}_1 = U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \qquad \underline{U}_2 = Ue^{-j\frac{2\pi}{3}} \qquad \underline{U}_3 = Ue^{+j\frac{2\pi}{3}}$$

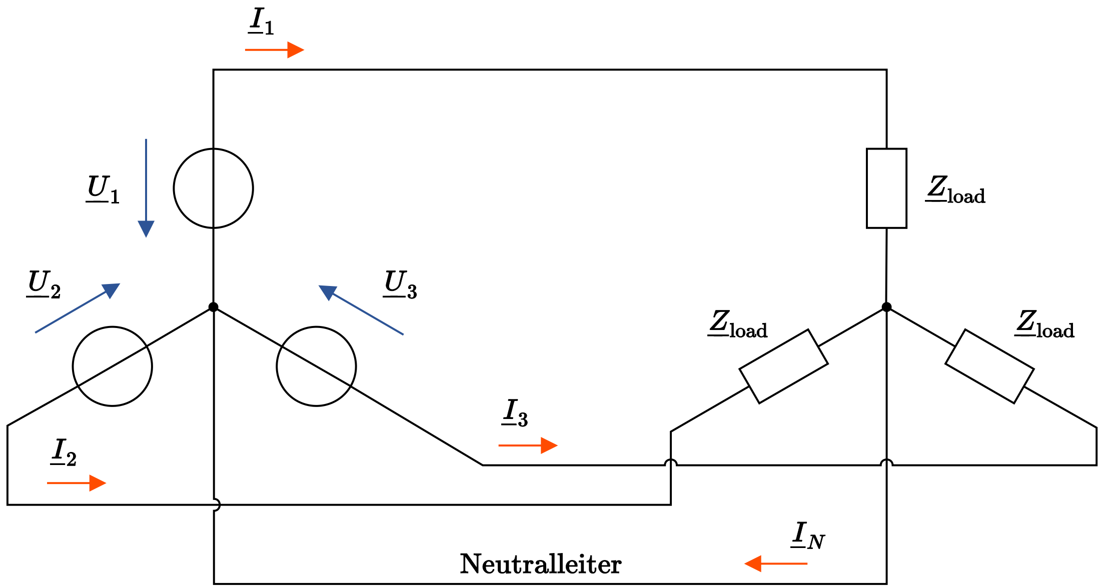
Symmetrisches Dreiphasensystem

- Alle Spannungen sind gleich groß
- Phasendifferenzen jeweils $\frac{2\pi}{3}$
- Nullsystemfrei: $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0$



Betrachtung von Leiter-Leiter-Spannungen I

Umzeichnen der Schaltung offenbart Sternschaltung von Spannungsquellen und Last



Häufig lassen sich die Strangspannungen (gegen den Sternpunkt oder Neutralleiter) nicht messen

Deswegen sind die *verketteten Spannungen* oder Leiter-Leiter-Spannungen von Interesse

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \qquad \underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 \qquad \underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1$$

Betrachtung von Leiter-Leiter-Spannungen II

Aufgrund der Maschenregel gilt immer

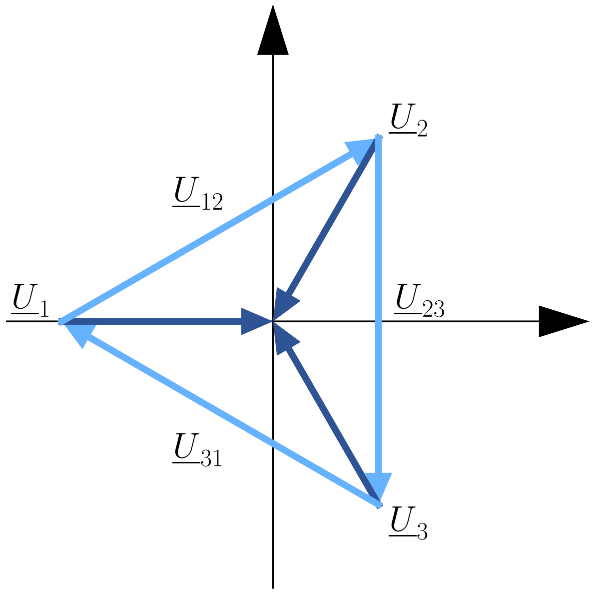
$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$$

Im Symmetrischen System gilt

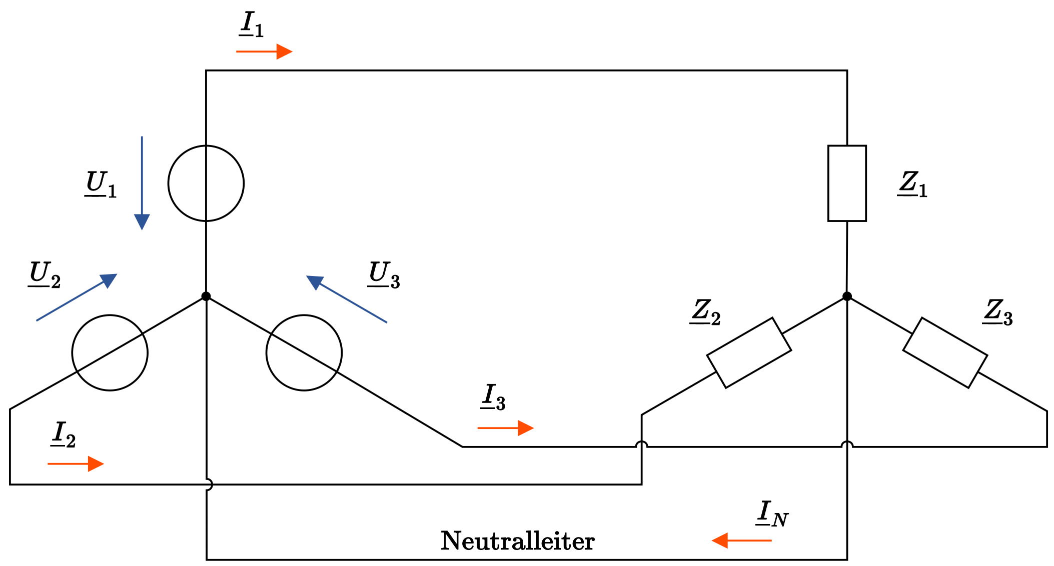
- Die Leiter-Leiter-Spannungen sind um $\frac{\pi}{6}$ oder 30° den Strangspannungen verschoben
- Die Beträge aller Spannungen sind jeweils gleich groß

$$|\underline{U}_1| = |\underline{U}_2| = |\underline{U}_3| \qquad \Rightarrow \qquad |\underline{U}_{12}| = |\underline{U}_{23}| = |\underline{U}_{31}|$$

- Die Leiter-Leiter-Spannungen sind um den Faktor $\sqrt{3}$ größer



Berechnung der Leiterströme bei Sternschaltung des Verbrauchers



Berechnung der Leiterströme

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} \qquad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}$$

Für beliebige $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3$ ergibt sich als Strom im Neutralleiter

$$\underline{I}_\mathrm{N} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \neq 0$$

Symmetrischer Betrieb der 3-phasigen Schaltung

Bei symmetrischer Belastung ($\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$) gilt für die Strangspannungen

$$|\underline{U}_1| = |\underline{U}_2| = |\underline{U}_3| = |\underline{U}| \qquad \text{mit} \qquad \underline{U}_1 = \underline{U} \qquad \underline{U}_2 = \underline{U}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} \qquad \underline{U}_3 = \underline{U}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}$$

Die Leiter-Leiter-Spannungen an der Last ergeben sich zu

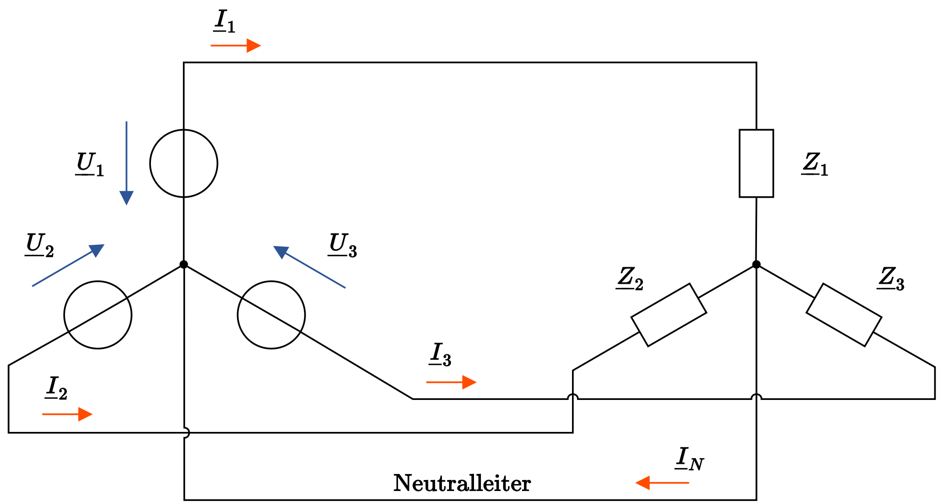
$$|\underline{U}_{12}| = |\underline{U}_{23}| = |\underline{U}_{31}| = |\underline{U}_\Delta| \qquad \text{mit} \qquad \underline{U}_{12} = \underline{U}_\Delta \qquad \underline{U}_{23} = \underline{U}_\Delta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} \qquad \underline{U}_{31} = \underline{U}_\Delta\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}$$

Der Strom im Neutralleiter ist in diesem Fall

$$\underline{I}_\mathrm{N} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3}{\underline{Z}} = 0 \qquad \text{(Nullsystemfrei)}$$

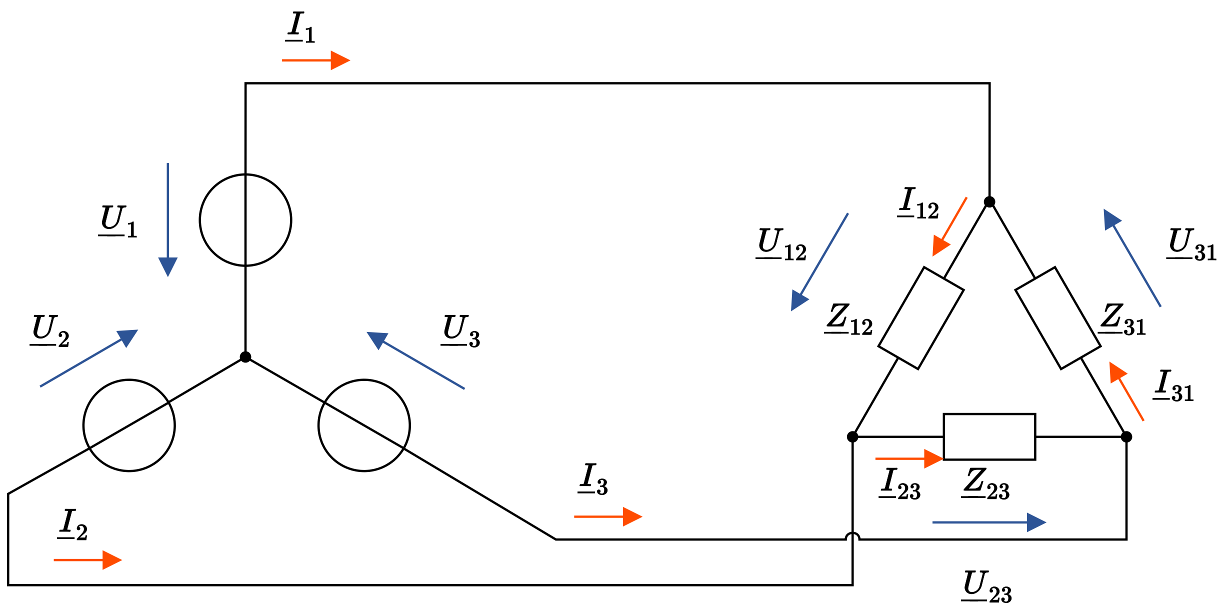
Für die Beträge aller Leiter-Leiter-Spannungen gilt

$$|\underline{U}_\Delta| = \sqrt{3}|\underline{U}|$$



Dreieckschaltung des Verbrauchers I

Dreieckschaltung einer Last ohne Mittelpunkts- oder Neutralleiter



Berechnung Strangströme der Last

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} \qquad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} \qquad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}$$

Dreieckschaltung des Verbrauchers II

Aus der Kontenregel ergibt sich für die Strangströme

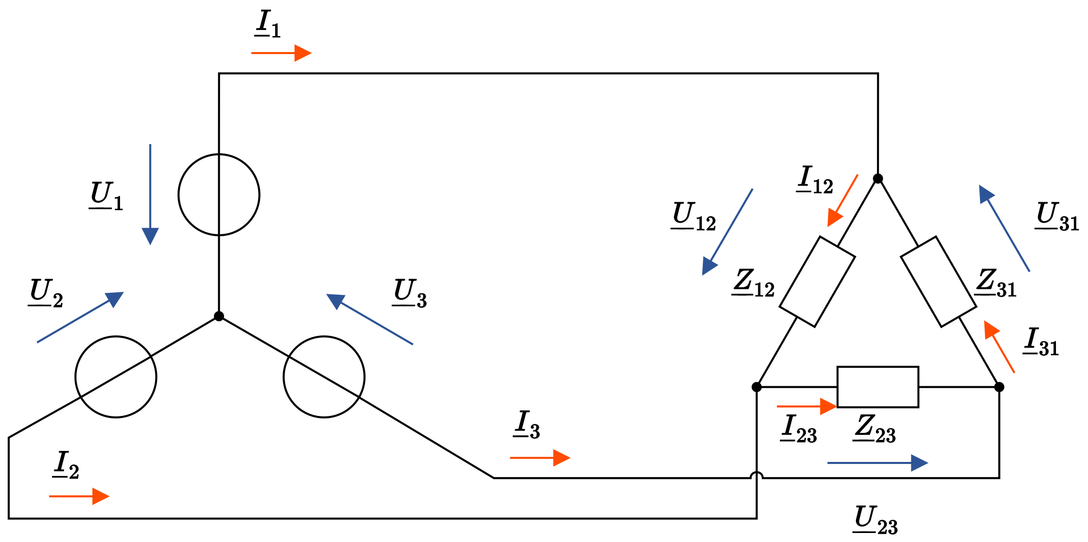
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} \qquad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

Für die Leiter-Leiter-Ströme muss gelten:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

Aus der Maschenregel folgt für die Leiter-Leiter-Spannungen:

$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$$



Dreieckschaltung bei symmetrischer Last

Bei symmetrischer Belastung ($\ul{Z}*{12}* = \ul{Z}*{23} = \ul{Z}_{31} = \ul{Z}$) gilt für die Strangspannungen

$$|\underline{U}_1| = |\underline{U}_2| = |\underline{U}_3| = |\underline{U}| \qquad \text{mit} \qquad \underline{U}_1 = \underline{U} \qquad \underline{U}_2 = \underline{U}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} \qquad \underline{U}_3 = \underline{U}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}$$

Die Strangströme sind betragsmäßig gleich groß und Nullsystem-frei:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \qquad \text{mit} \qquad \underline{I}_1 = \underline{I} \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} \qquad \underline{I}_3 = \underline{I}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}$$

Die Leiter-Leiter-Spannungen an der Last ergeben sich zu

$$|\underline{U}_{12}| = |\underline{U}_{23}| = |\underline{U}_{31}| = |\underline{U}_\Delta| \qquad \text{mit} \qquad \underline{U}_{12} = \underline{U}_\Delta \qquad \underline{U}_{23} = \underline{U}_\Delta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} \qquad \underline{U}_{31} = \underline{U}_\Delta\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}$$

Für die Ströme gilt somit

$$\underline{I}_\Delta = \frac{\underline{U}_\Delta}{\underline{Z}}$$

Die Beträge von Spannung und Strom unterscheiden sich um den Faktor $\sqrt{3}$

$$\underline{U}_\Delta = \sqrt{3} \cdot \underline{U} \qquad \text{und} \qquad \underline{I}_\Delta = \frac{\underline{I}}{\sqrt{3}}$$

Leistung im Dreiphasensystem bei symmetrischem Betrieb

In jedem Strang wird die Scheinleistung $\underline{U} \cdot \underline{I}^*$ übertragen, somit ergibt sich als gesamte Scheinleistung

$$\underline{S} = 3 \cdot \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

Bei der Verwendung von Strangspannungen werden häufig Spitzenwertzeiger eingesetzt:

$$\underline{S} = \frac{3}{2} \cdot \underline{\hat{U}} \cdot \underline{\hat{I}}^* \qquad \text{(mit den Spitzenwertzeigern } \underline{\hat{U}} = \sqrt{2}\underline{U} \text{ und } \underline{\hat{I}} = \sqrt{2}\underline{I}\text{)}$$

Bei der Verwendung von Leiter-Leiter-Größen werden häufig Effektivwerte betrachtet:

$$\underline{S} = 3 \cdot \underline{U}_\Delta \underline{I}_\Delta^* \qquad \text{(mit den Leiter-Leiter-Größen } \underline{U}_\Delta = \sqrt{3}\underline{U} \text{ und } \underline{I}_\Delta = \underline{I}/\sqrt{3}\text{)}$$

Die übertragene Wirk- und Blindleistung berechnet sich zu

$$P = \mathrm{Re}\{\underline{S}\} \qquad Q = \mathrm{Im}\{\underline{S}\}$$

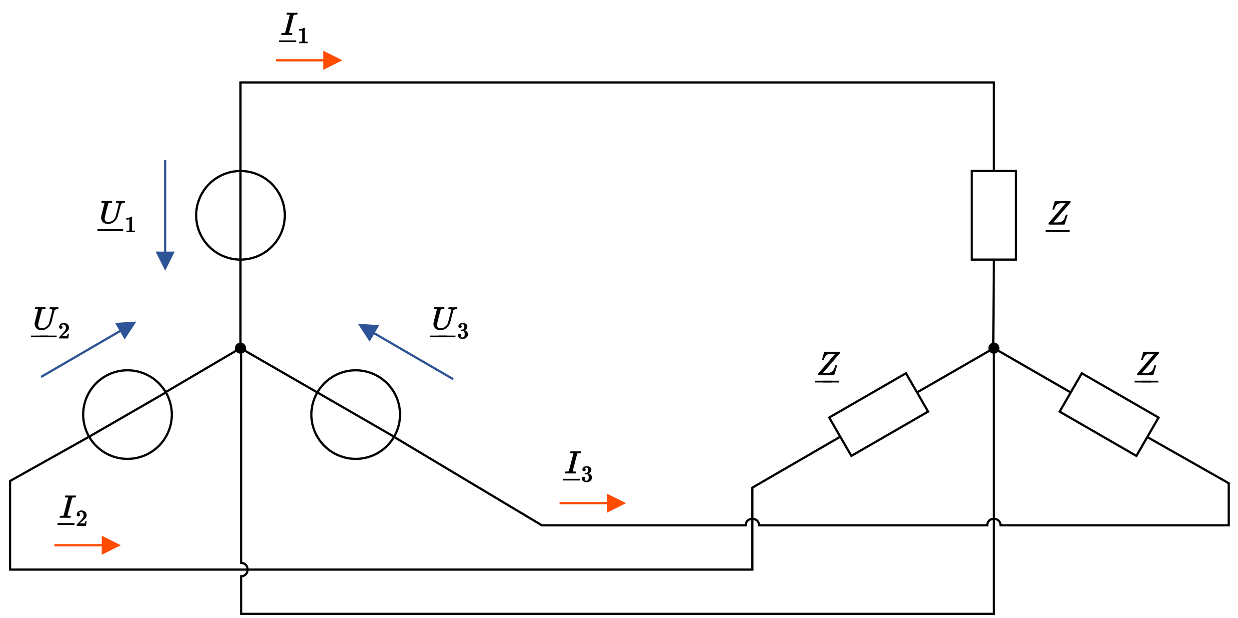
Beispiel: Strom, Spannung und Leistung bei symmetrischer Last im Stern I

Gegeben: Spannungsquelle in Stern-Schaltung ($f = 50\mathrm{Hz}$) mit Effektivwertzeigern:

$$\underline{U}_1 = 230\mathrm{V} = \underline{U} \qquad \underline{U}_2 = 230\mathrm{V}e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} \qquad \underline{U}_3 = 230\mathrm{V}e^{+\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}$$

Lastimpedanz in Sternschaltung: Ohm'scher Anteil ($R = 100\Omega$) in Serie zu Induktivität ($L = 400\mathrm{mH}$)

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = 100\Omega + \mathrm{j}126\Omega = 161\Omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0.899}$$



Beispiel: Strom, Spannung und Leistung bei symmetrischer Last im Stern II

Berechnung der Strangströme:

$$\underline{I}_1 = \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{230\mathrm{V}}{161\Omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0.899}} = 1.43\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.899}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} = 1.43\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2.99}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} = 1.43\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}1.20}$$

Berechnung von Schein-, Wirk- und Blindleistung aus den Effektivwertzeigern:

$$\underline{S} = 3 \cdot \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 3 \cdot 230\mathrm{V} \cdot 1.43\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0.899} = 988\mathrm{VA} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0.899} = 615\mathrm{W} + \mathrm{j}773\mathrm{VAR}$$

$$P = 615\mathrm{W}$$

$$Q = 773\mathrm{VAR}$$

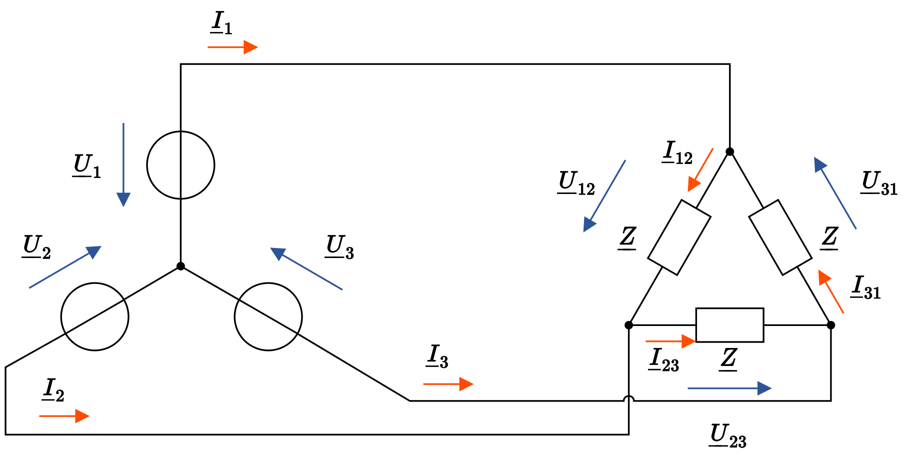
Beispiel: Strom, Spannung und Leistung bei symmetrischer Last im Dreieck I

Verkettete Spannungen ergeben sich zu

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{\Delta} = \sqrt{3}\underline{U}e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\underline{U}_{23} = \sqrt{3}\underline{U}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{U}_{12} = \sqrt{3}\underline{U}e^{j\frac{5\pi}{6}}$$



Leiter-Leiter-Ströme

$$\underline{I}_{12} = \underline{I}_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}\underline{U}e^{j\frac{\pi}{6}}}{\underline{Z}} = \frac{398\text{V}}{161\Omega \cdot e^{j0.899}} = 2.48\text{A} \cdot e^{-j0.375}$$

$$\underline{I}_{23} = \underline{I}_{\Delta} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 2.48\text{A} \cdot e^{-j2.47}$$

$$\underline{I}_{31} = \underline{I}_{\Delta} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} = 2.48\text{A} \cdot e^{j1.72}$$

Beispiel: Strom, Spannung und Leistung bei symmetrischer Last im Dreieck II

Berechnung von Schein-, Wirk- und Blindleistung aus den Effektivwertzeigern:

$$\underline{S} = 3 \cdot \underline{U}_{\Delta} \cdot \underline{I}^{*}_{\Delta} = 3 \cdot 398\mathrm{V}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{6}} \cdot 2.48\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0.375} = 2.96\mathrm{kVA} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0.899} = 1.85\mathrm{kW} + \mathrm{j}2.32\mathrm{kVAR}$$

$$P = 1.85\mathrm{kW}$$

$$Q = 2.32\mathrm{kVAR}$$

Im Vergleich zur sternförmigen Lastimpedanz wird hier die 3-fache Scheinleistung übertragen.