

# Wechselstromnetzwerke

## Serien- und Parallelumrechnung I

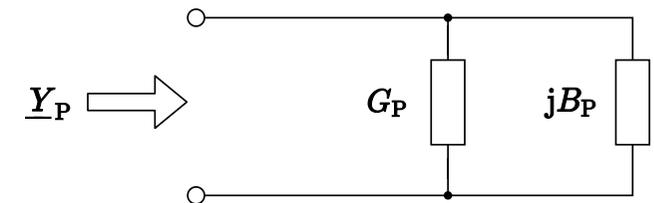
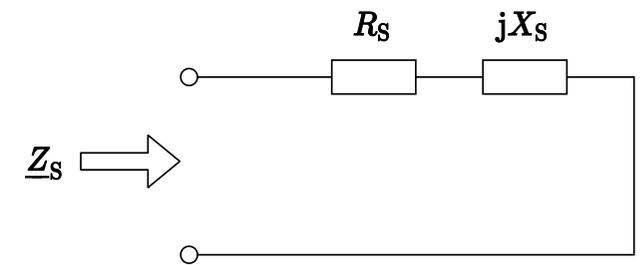
Gegeben Impedanz  $\underline{Z}_S = R_S + jX_S$

- $R_S$ : Resistanz bzw. Wirkwiderstand oder Ohm'scher Widerstand
- $X_S$ : Reaktanz bzw. Blindwiderstand

Umrechnung in komplexen Leitwert  $\underline{Y}_P$  (Admittanz), d.h. einer Parallelschaltung aus

- $G_P$ : Konduktanz bzw. Wirkleitwert
- $B_P$ : Suszeptanz bzw. Blindleitwert

mit  $\underline{Y}_P = G_P + jB_P$



## Serien- und Parallelumrechnung II

Die Admittanz der parallelen Anordnung berechnet sich nun mittels

$$\begin{aligned}\underline{Y}_P &= G_P + jB_P = \frac{1}{\underline{Z}_S} = \frac{1}{R_S + jX_S} = \frac{1}{R_S + jX_S} \cdot \frac{R_S - jX_S}{R_S - jX_S} = \frac{R_S - jX_S}{R_S^2 + X_S^2} = \\ &= \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2} + j \frac{-X_S}{R_S^2 + X_S^2}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich eine äquivalente Parallelschaltung mit

$$\begin{aligned}G_P &= \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2} && \text{bzw.} && R_P = \frac{R_S^2 + X_S^2}{R_S} \\ B_P &= \frac{-X_S}{R_S^2 + X_S^2} && \text{bzw.} && X_P = \frac{R_S^2 + X_S^2}{X_S}\end{aligned}$$

## Serien- und Parallelumrechnung III

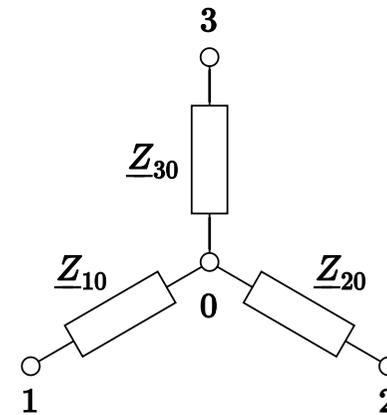
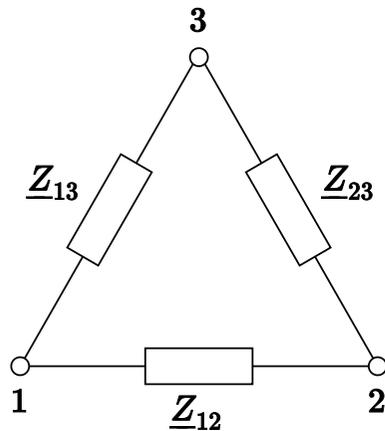
Im umgekehrten Fall ergibt sich die äquivalente Impedanz der Serienschaltung

$$\begin{aligned}\underline{Z}_S = R_S + jX_S &= \frac{1}{\underline{Y}_P} = \frac{1}{G_P + jB_P} = \frac{1}{G_P + jB_P} \cdot \frac{G_P - jB_P}{G_P - jB_P} = \frac{G_P - jB_P}{G_P^2 + B_P^2} = \\ &= \frac{G_P}{G_P^2 + B_P^2} + j \frac{-B_P}{G_P^2 + B_P^2}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich eine äquivalente Parallelschaltung mit

$$\begin{aligned}R_S &= \frac{G_P}{G_P^2 + B_P^2} = \frac{R_P X_P^2}{R_P^2 + X_P^2} \\ X_S &= \frac{-B_P}{G_P^2 + B_P^2} = \frac{R_P^2 X_P}{R_P^2 + X_P^2}\end{aligned}$$

# Stern-Dreieck-Transformation



Dreieck nach Stern

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{13}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{Z}_{20} = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{Z}_{30} = \frac{\underline{Z}_{13} \cdot \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$

Stern nach Dreieck

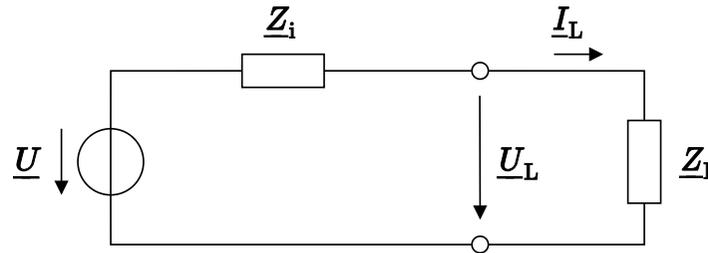
$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_{10} \cdot \underline{Z}_{20} + \underline{Z}_{20} \cdot \underline{Z}_{30} + \underline{Z}_{30} \cdot \underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{30}}$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_{10} \cdot \underline{Z}_{20} + \underline{Z}_{20} \cdot \underline{Z}_{30} + \underline{Z}_{30} \cdot \underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{10}}$$

$$\underline{Z}_{13} = \frac{\underline{Z}_{10} \cdot \underline{Z}_{20} + \underline{Z}_{20} \cdot \underline{Z}_{30} + \underline{Z}_{30} \cdot \underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20}}$$

## Leistungsanpassung I

Gegeben: Spannungsquelle  $\underline{U}$  mit Innenimpedanz  $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$



Gesucht: Wie ist Lastimpedanz  $\underline{Z}_L$  zu wählen, damit Last die maximale Wirkleistung aufnimmt?

Die Scheinleistung über der Lastimpedanz berechnet sich zu

$$\underline{S}_L = \underline{U}_L \cdot \underline{I}_L^* = \frac{|\underline{U}_L|^2}{\underline{Z}_L^*} = |\underline{U}|^2 \cdot \frac{\underline{Z}_L \cdot \underline{Z}_L^*}{|\underline{Z}_L + \underline{Z}_i|^2} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_L^*} = |\underline{U}|^2 \cdot \frac{\underline{Z}_L}{|\underline{Z}_L + \underline{Z}_i|^2} = P_L + jQ_L$$

Damit gilt für die Wirkleistung

$$P_L = |\underline{U}|^2 \cdot \frac{\operatorname{Re}\{\underline{Z}_L\}}{|\underline{Z}_L + \underline{Z}_i|^2}$$

## Leistungsanpassung II

Gesucht ist die maximale Wirkleistung in Abhängigkeit von  $\underline{Z}_L = R_L + jX_L$

Bilden der ersten Ableitung getrennt über Real- und Imaginärteil von  $\underline{Z}_L$

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = \frac{\partial}{\partial X_L} |\underline{U}|^2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_i)^2 + (X_L + X_i)^2} = |\underline{U}|^2 \cdot \frac{-2R_L(X_L + X_i)}{\left((R_L + R_i)^2 + (X_L + X_i)^2\right)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

Damit gilt für die Reaktanz der Last

$$X_L = -X_i$$

## Leistungsanpassung III

Damit ergibt sich für die Ableitung der Wirkleistung nach dem Realteil von  $\underline{Z}_L$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{\partial}{\partial R_L} |\underline{U}|^2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_i)^2} = |\underline{U}|^2 \cdot \frac{(R_L + R_i)^2 \cdot 1 - 2R_L(R_L + R_i)}{(R_L + R_i)^4} \stackrel{!}{=} 0$$

$$R_L^2 + 2R_L R_i + R_i^2 - 2R_L^2 - 2R_L R_i = 0$$

$$R_i^2 - R_L^2 = 0$$

Damit gilt für den Ohm'schen Anteil

$$R_L = R_i$$

Somit ergibt sich für die gesamte Impedanz der Last bei maximaler Wirkleistung

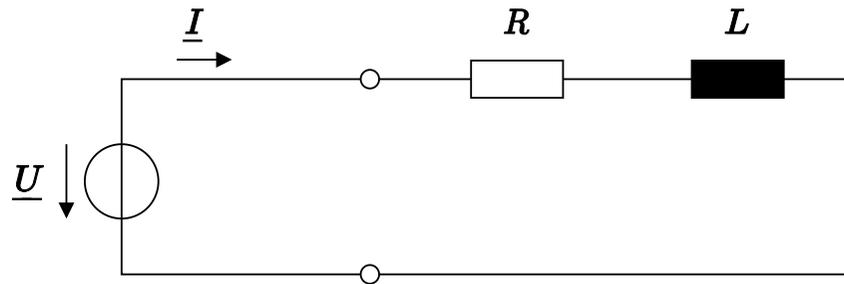
$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_i^*$$

In diesem Fall ergibt sich nun für Wirk- und Blindleistung

$$P_L = \frac{|\underline{U}|^2}{4R_L} \quad Q_L = \frac{|\underline{U}|^2 \cdot X_L}{4R_L^2}$$

## Blindleistungskompensation I

Gegeben: Spannungsquelle mit einem Ohm'schen und induktiven Last  $\underline{Z}_L = R + j\omega L$



Scheinleistungsaufnahme des Verbrauchers

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U} \cdot \frac{\underline{U}^*}{\underline{Z}_L^*} = |\underline{U}|^2 \cdot \frac{R + j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{|\underline{U}|^2 R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \frac{|\underline{U}|^2 \omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = P + jQ$$

Lastimpedanz nimmt neben Wirkleistung auch Blindleistung auf

Häufig werden die Wirk- und Blindanteile des resultierenden Stromes betrachtet

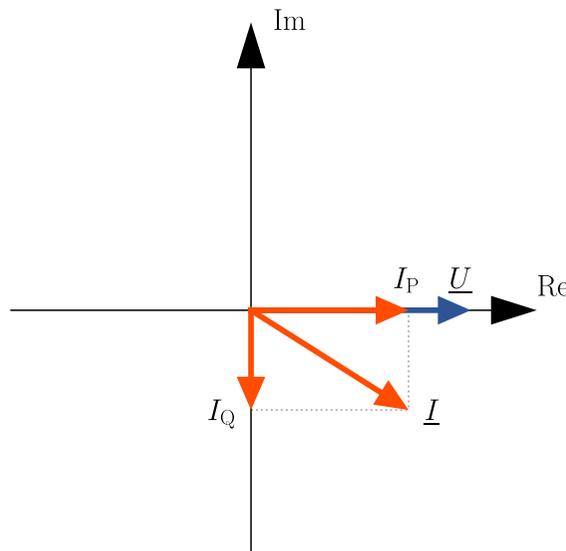
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_L} = \frac{\underline{U} \cdot R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \frac{-\underline{U} \omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = I_P + jI_Q$$

## Blindleistungskompensation II

Blindleistung  $Q$  bzw. Blindströme  $I_Q$  sind zu vermeiden da

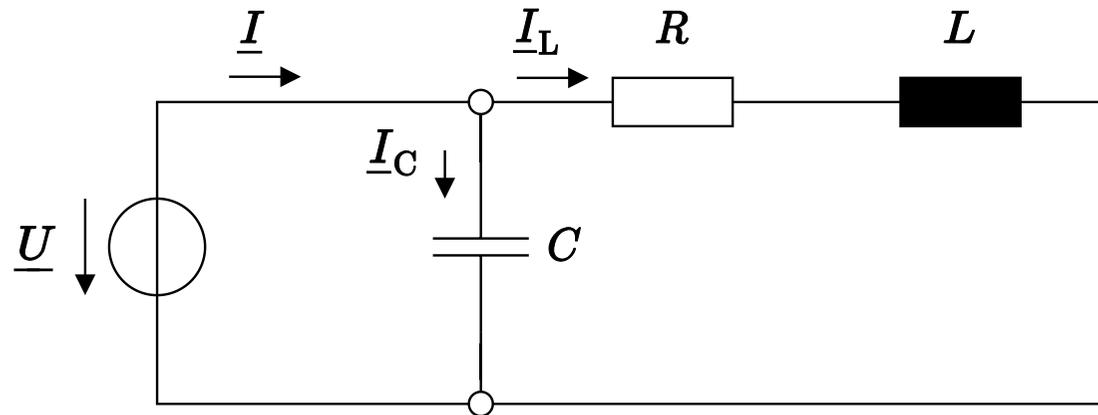
- keine nutzbare Leistung zur Umwandlung in Wärme, mechanische Arbeit oder Informationsübertragung
- Blindströme fließen tatsächlich im elektrischen Netzwerk und Komponenten sind darauf auszulegen

Zeigerdiagramm von Strom und Spannung



## Blindleistungskompensation III

Blindleistungskompensation: Einfügen eines Kompensationselementes (*hier Kondensator*) damit abgegebener Strom der Spannungsquelle keinen Blindanteil mehr hat



$$\underline{I} = \underline{I}_L + \underline{I}_C = \frac{\underline{U} \cdot R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \frac{-\underline{U} \omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + \underline{I}_C = I_P + jI_Q$$

Bei idealer Kompensation (d.h.  $I_Q = 0$ ) muss gelten

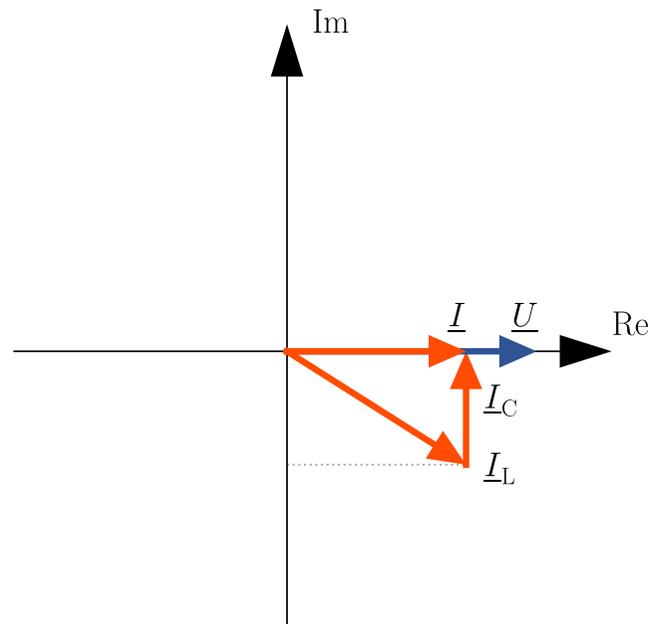
$$\underline{I}_C = j \frac{\underline{U} \omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \underline{U} \cdot j\omega C$$

## Blindleistungskompensation IV

Somit ergibt sich für die Kapazität

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

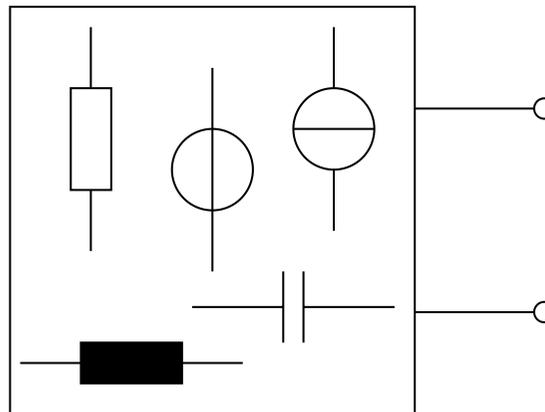
Zeigerdiagramm für den kompensierten Fall



## Ersatzquellen I

Gegeben: Aktiver elektrischer Zweipol, d.h. elektrisches Netzwerk bestehend aus

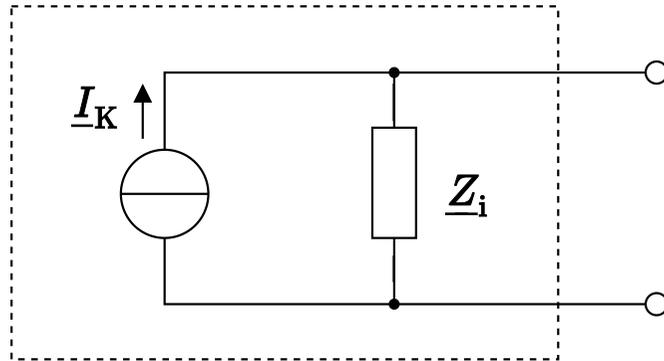
- Widerständen, Kondensatoren und Induktivitäten
- mindestens einer Strom- oder Spannungsquelle



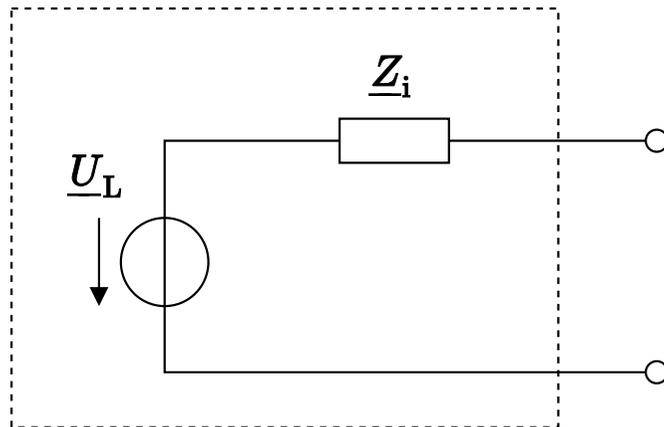
Gesucht: Äquivalente Ersatzquelle (Stromquelle oder Spannungsquelle) mit Innenimpedanz  $\underline{Z}_i$ .

## Ersatzquellen II

### Ersatzstromquelle



### Ersatzspannungsquelle



## Ersatzquellen III

Berechnung der drei Parameter des aktiven Zweipols:

1. Berechnen der Innenimpedanz  $\underline{Z}_i$ :

- Ersetzen aller Stromquellen durch Leerläufe und aller Spannungsquellen durch Kurzschlüsse
- Berechnen der Impedanz an den Klemmen des Zweipols

1. Kurzschlussstrom  $\underline{I}_K$

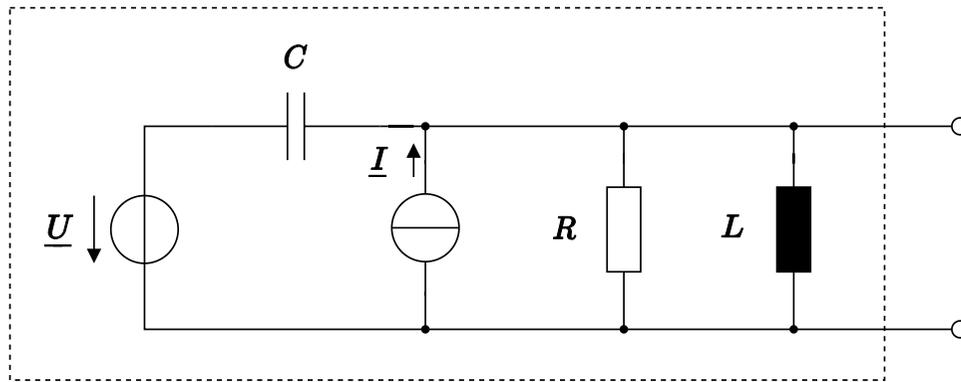
2. Leerlaufspannung  $\underline{U}_L$

Zusammenhang der drei Parameter, d.h. einer der drei Parameter ergibt sich mittels

$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_K}$$

## Ersatzquellen IV - Beispiel

Gegeben: Aktiver Zwei-Pol mit Spannungs- und Stromquelle



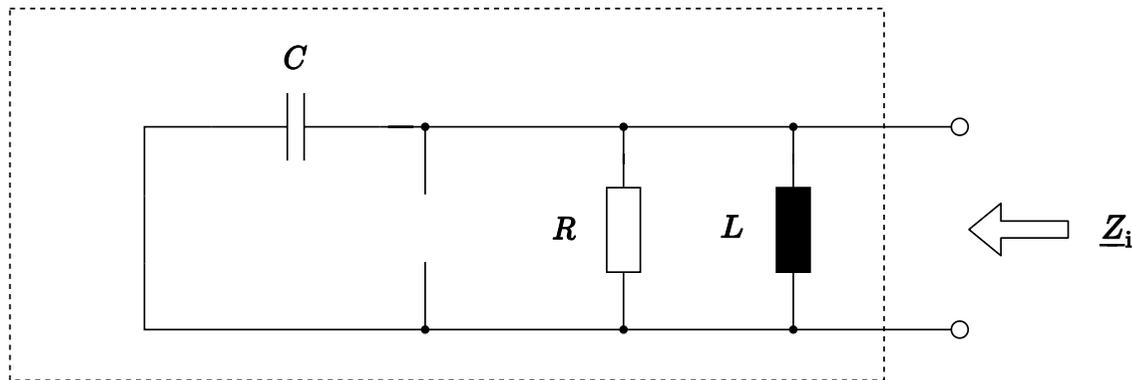
Gesucht:

- Ersatzstromquelle
- Ersatzspannungsquelle

## Ersatzquellen IV - Berechnung der Innenimpedanz

Ersetzen der Spannungsquelle durch Kurzschluss.

Ersetzen der Stromquelle durch Leerlauf.

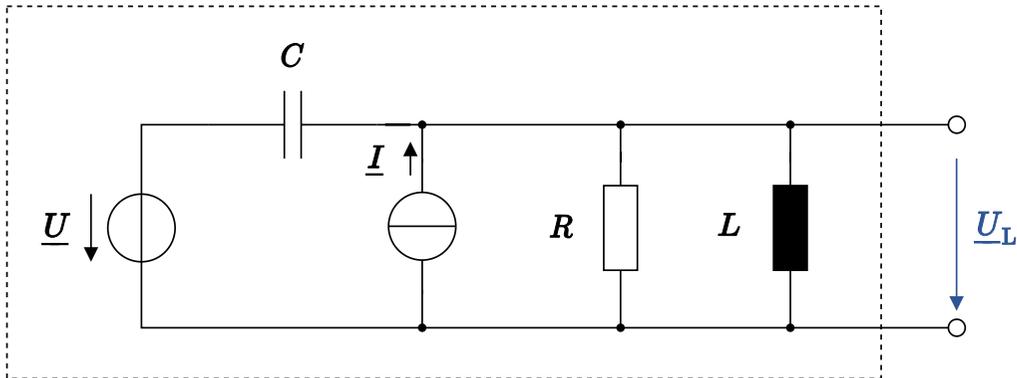


Innenimpedanz der Ersatzquelle

$$\underline{Z}_i = \frac{1}{j\omega C} \parallel R \parallel j\omega L = \left( j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \right)^{-1} = \left( \frac{-\omega^2 RLC + j\omega L + R}{j\omega RL} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{j\omega RL}{R + j\omega L - \omega^2 RLC}$$

## Ersatzquellen V - Berechnung der Leerlaufspannung



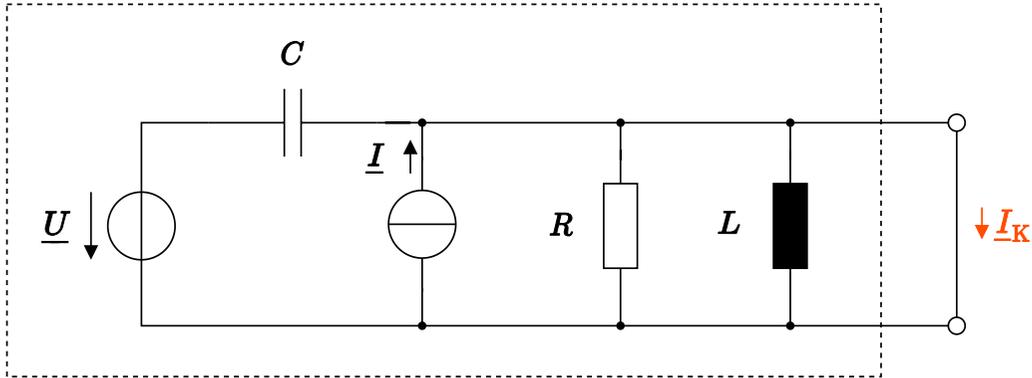
$$\underline{U}_L = \left( \frac{\underline{U} - \underline{U}_L}{\frac{1}{j\omega C}} + \underline{I} \right) \cdot \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} = (\underline{U} \cdot j\omega C + \underline{I}) \cdot \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} + \underline{U}_L \cdot \frac{\omega^2 RLC}{R + j\omega L}$$

$$\underline{U}_L \left( 1 - \frac{\omega^2 RLC}{R + j\omega L} \right) = (\underline{U} \cdot j\omega C + \underline{I}) \cdot \frac{j\omega RL}{R + j\omega L}$$

$$\underline{U}_L = (\underline{U} \cdot j\omega C + \underline{I}) \cdot \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} \cdot \left( 1 - \frac{\omega^2 RLC}{R + j\omega L} \right)^{-1} =$$

$$= (\underline{U} \cdot j\omega C + \underline{I}) \frac{j\omega RL}{R + j\omega L - \omega^2 RLC}$$

## Ersatzquellen V - Berechnung des Kurzschlussstromes



$$\underline{I}_K = \underline{I} + \frac{\underline{U}}{\frac{1}{j\omega C}} = \underline{U} \cdot j\omega C + \underline{I}$$

Kontrolle:

$$\frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_K} = \frac{(\underline{U} \cdot j\omega C + \underline{I}) \frac{j\omega RL}{R + j\omega L - \omega^2 RLC}}{\underline{U} \cdot j\omega C + \underline{I}} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L - \omega^2 RLC} = \underline{Z}_i$$

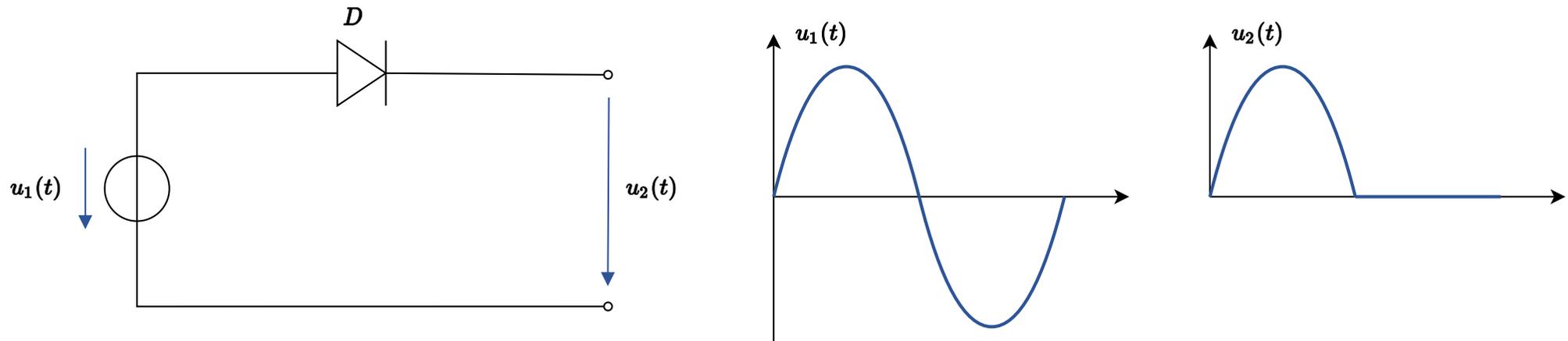
## Gleichrichten von Wechselspannungen

Wandlung Sinus-förmige Wechselspannungen in Gleichspannungen mittels Gleichrichter (*engl. rectifier*)

Hierzu werden nicht-lineare Bauteile wie Dioden oder Transistoren eingesetzt.

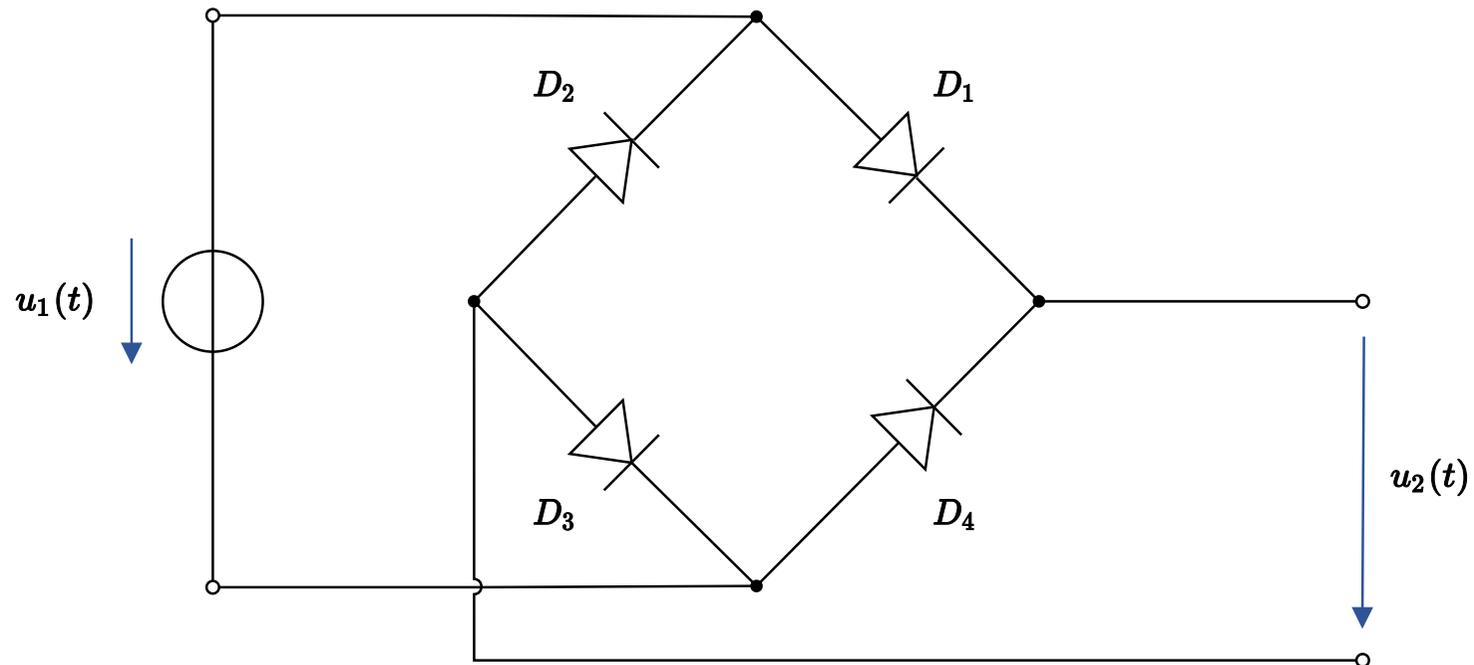
Eine Diode  $D$

- leitet (Kurzschluss), wenn  $u_1(t) > 0$
- sperrt (Leerlauf), wenn  $u_1(t) < 0$



## Brückengleichrichter

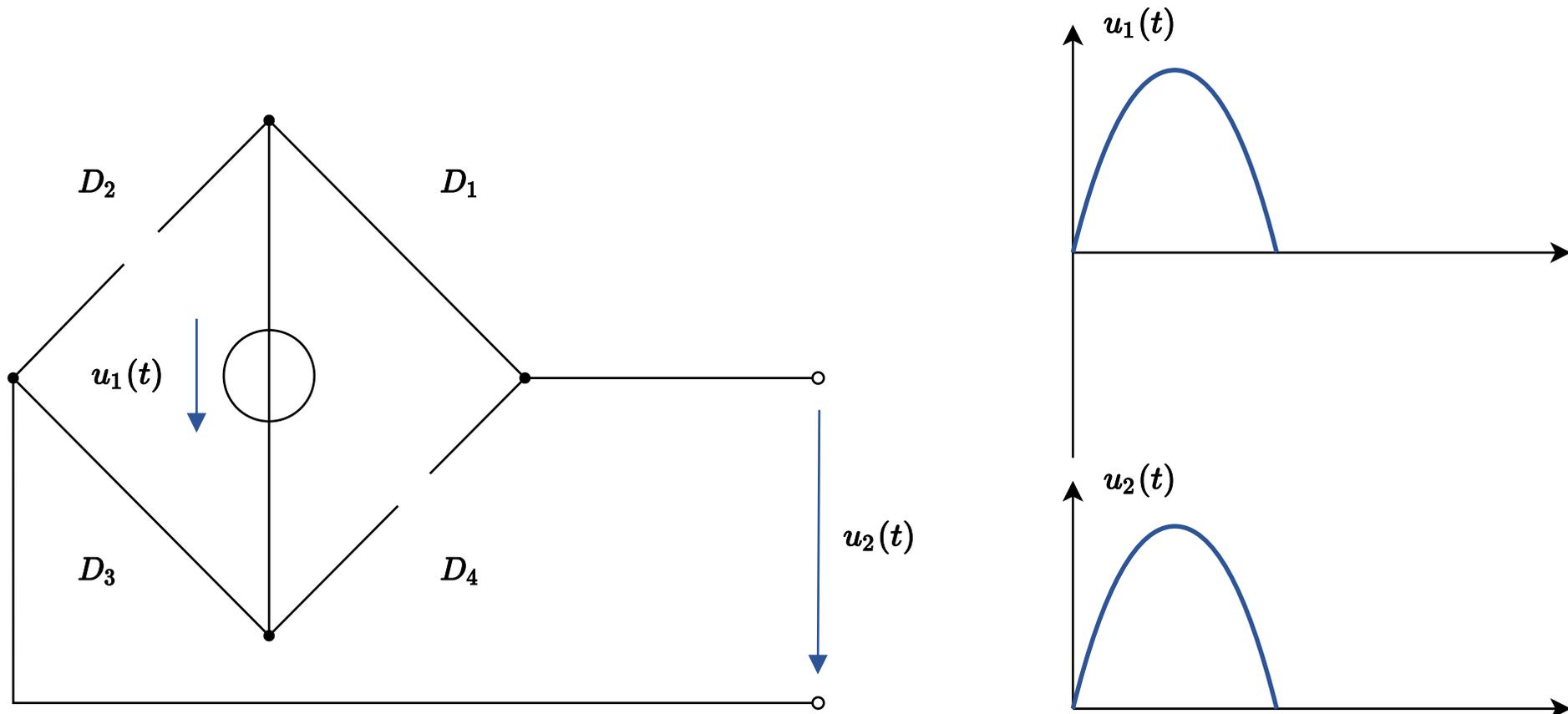
Prinzipieller Aufbau eines Brückengleichrichters bestehend aus vier Dioden  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  und  $D_4$



Sinus-förmige Eingangsspannung

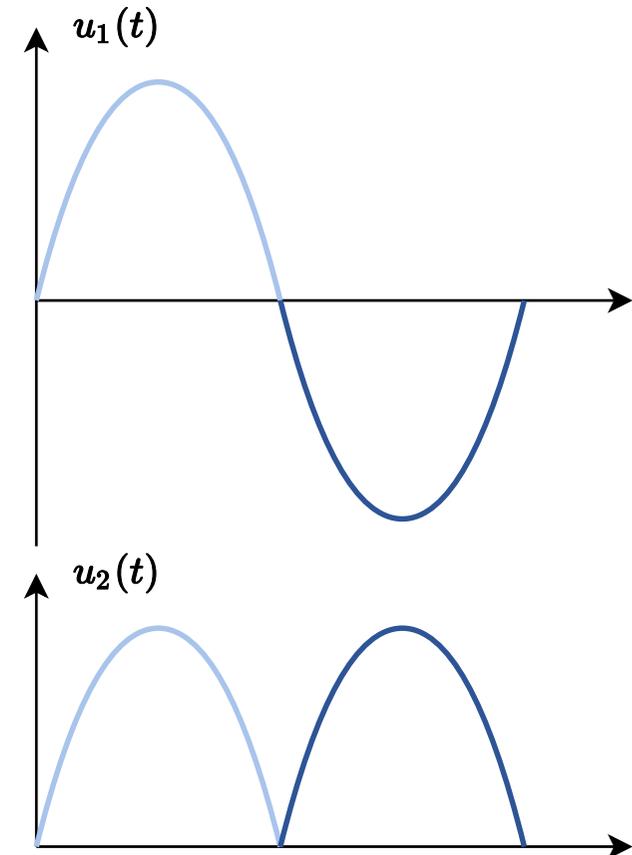
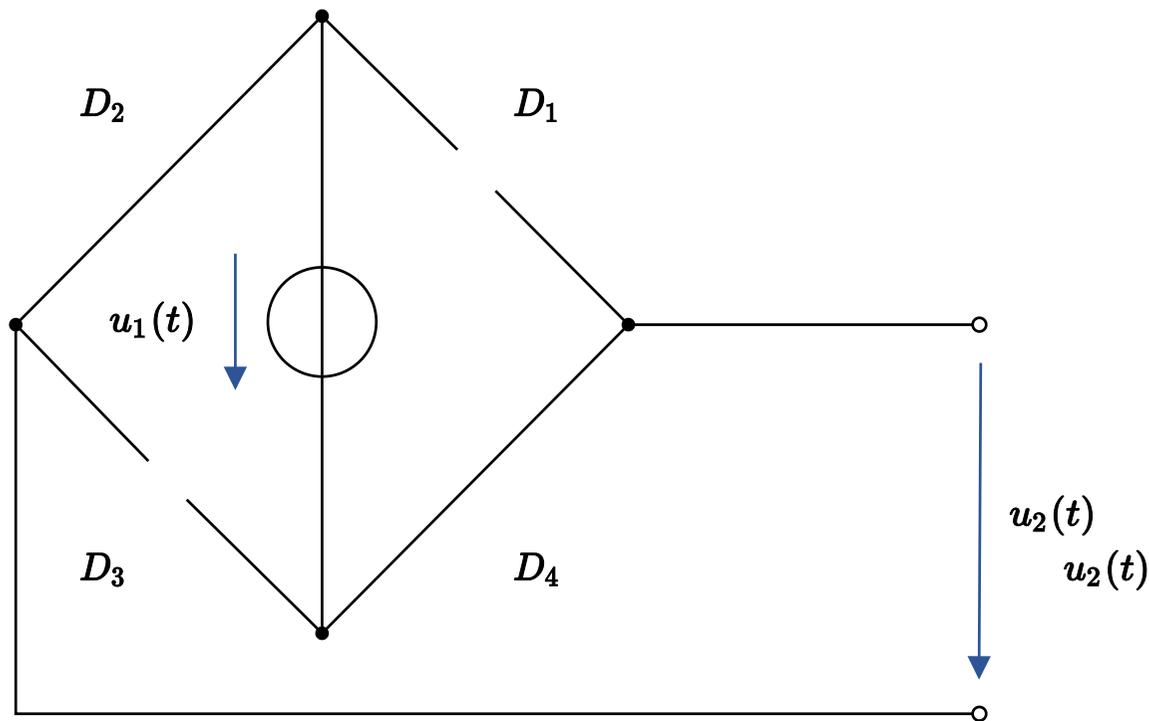
$$u_1(t) = \hat{U}_1 \sin(\omega t)$$

## Brückengleichrichter - Positive Halbwelle



Bei der positiven Halbwelle der Spannung leiten Dioden  $D_1$  und  $D_3$  und Dioden  $D_2$  und  $D_4$  sperren (Leerlauf).

## Brückengleichrichter - Negative Halbwelle



Bei der negativen Halbwelle der Spannung leiten Dioden  $D_2$  und  $D_4$  und Dioden  $D_1$  und  $D_3$  sperren (Leerlauf).

## Reale Eigenschaften von Bauelementen

Beschreibung der Bauelemente Widerstand, Kondensator und Induktivität beruht auf idealen Randbedingungen

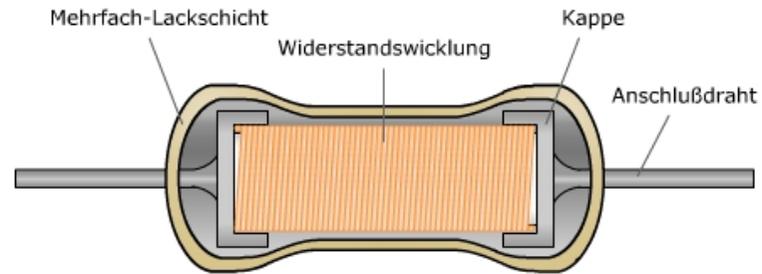
Parasitäre Effekte haben auch Einfluss auf das Frequenzverhalten der Bauteile

Solche Effekte treten beispielsweise auf durch

- Zuleitungen
- Materialeigenschaften
- Geometrische Eigenschaften

Das Ausmaß der parasitären Effekte ist abhängig von der jeweiligen Bauart.

## Reales Verhalten eines Ohm'schen Widerstandes

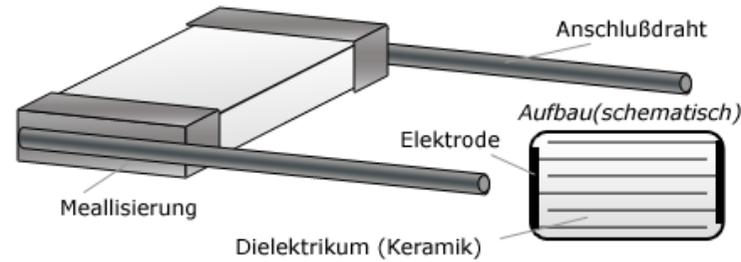


### Parasitäre Effekte

- Induktives Verhalten durch Anschlüsse  $L_s$
- Kapazitives Verhalten der Anschlusskappen  $C_p$
- Skineneffekt (Ungleichmäßige Verteilung der Stromdichte über dem Querschnitt bei höheren Frequenzen)

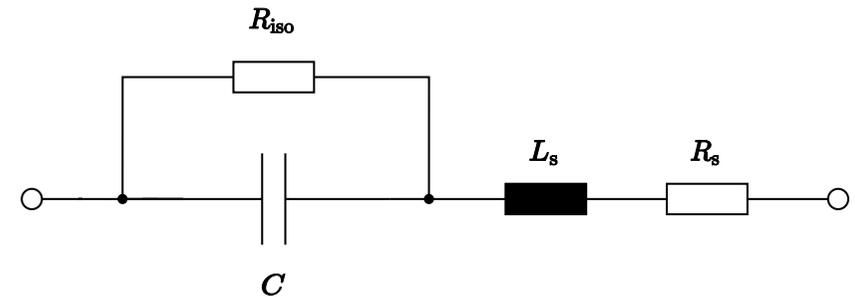
# Reales Verhalten eines Kondensators

## Schematischer Aufbau eines Kondensators



## Parasitäre Effekte

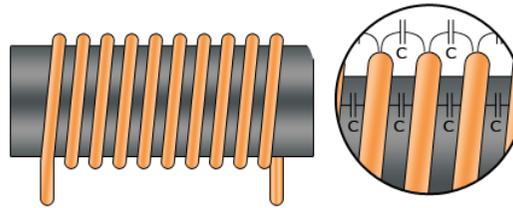
- Ohm'sche Verluste der Zuleitung  $R_s$
- Induktives Verhalten der Zuleitung  $L_s$
- Isolationsverluste des Dielektrikums  $R_{iso}$



*Bei sehr hohen Frequenzen kann induktives Verhalten  $L_s$  dominieren und das eigentlich gewünschte kapazitive Verhalten überdecken.*

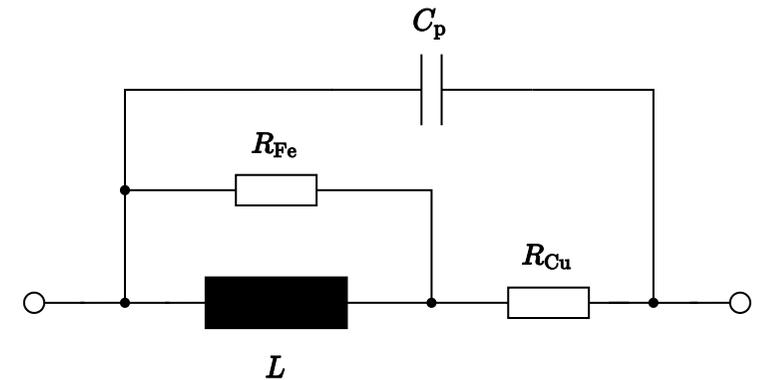
## Reales Verhalten einer Induktivität

Schematischer Aufbau einer Spule



Parasitäre Effekte

- Ohm'sche Kupferverluste der Wicklung der Zuleitung  $R_{Cu}$
- Kapazitives Verhalten zwischen den Wicklungen  $C_p$
- Eisenverluste des Spulenkernes  $R_{Fe}$
- Skineffekt (Ungleichmäßige Verteilung der Stromdichte über dem Querschnitt bei höheren Frequenzen)



*Bei sehr hohen Frequenzen kann kapazitives Verhalten  $C_p$  dominieren und das eigentlich gewünschte induktive Verhalten überdecken.*