

RLC-Schwingkreise



Einsatzgebiete von Schwingkreisen:

- Analoge Filter, u.a. auch höherer Ordnung
- EMV-Filter
- Netzfilter
- Blindleistungskompensation
- Sensorik und Messtechnik
- Oszillatoren
- etc.

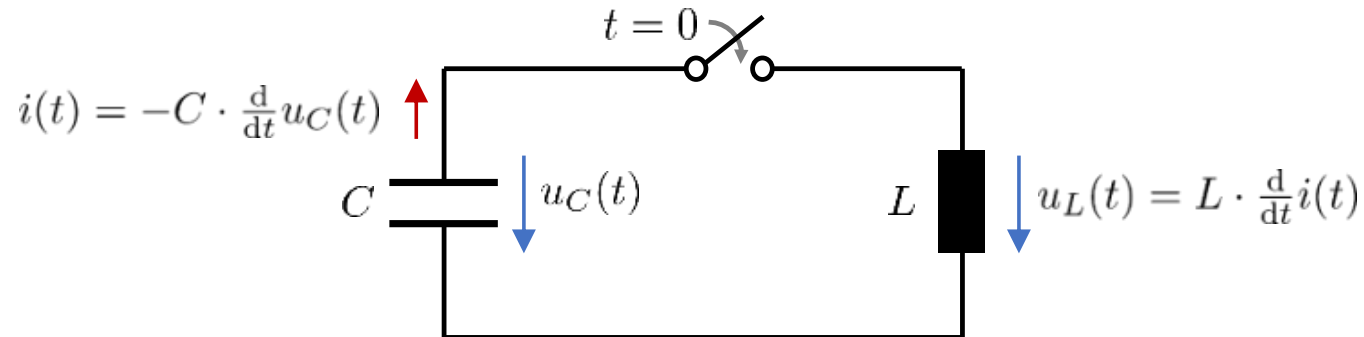
Analyse des Schwingkreises anhand abstrakter Kenngrößen wie

- Resonanzkreisfrequenz ω_0
- Kennwiderstand Z_K
- Dämpfung D
- Güte Q_0
- Bandbreite B

Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an Kondensator und Induktivität

| Kondensator | Induktivität |
|---|---|
|  kondensator.svg |  induktivitaet.svg |
| $i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_C(t)$ | $u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t)$ |

Der ideale LC-Schwingkreis als Anfangswertproblem



Annahmen zum Zeitpunkt $t = 0$:

- Kondensator ist geladen mit der Spannung $u_C(0) = \hat{U}$
- Der Schalter ist offen d.h. es fließt kein Strom $i(0) = 0$

Gesucht: Zeitlicher Verlauf des Stromes $i(t)$ und der Spannung $u_C(t) = u_L(t)$.

Schwingungsdifferentialgleichung:

$$i(t) = -LC \cdot \frac{d^2}{(dt)^2} i(t)$$

Der einfache LC-Schwingkreis: Lösung der Differentialgleichung

$$\text{Ansatz: } i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Einsetzen des Ansatzes in Differentialgleichung:

$$i(t) = -LC \cdot \frac{d^2}{(dt)^2} i(t)$$

$$\hat{I} \cdot \sin(\omega_0 t) = -LC \cdot \frac{d^2}{(dt)^2} \hat{I} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$\sin(\omega_0 t) = LC \cdot \omega_0 \frac{d}{dt} \cos(\omega_0 t)$$

$$\sin(\omega_0 t) = -LC \cdot \omega_0^2 \frac{d}{dt} \sin(\omega_0 t)$$

$$1 = LC \cdot \omega_0^2$$

Der einfache LC-Schwingkreis: Berechnung der Resonanzkreisfrequenz

Resonanzkreisfrequenz des Schwingkreises

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Berechnung der Spannung

$$u_C(t) = L \cdot \frac{d}{dt} \hat{I} \sin(\omega_0 t) = \frac{L}{\sqrt{LC}} \cdot \hat{I} \cos(\omega_0 t) = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \hat{I} \cos(\omega_0 t)$$

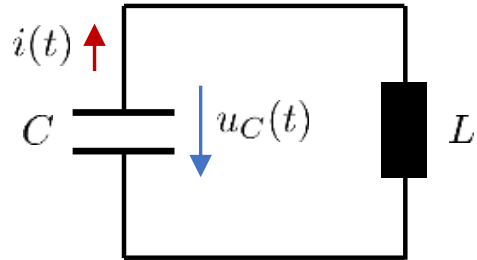
Einsetzen der Anfangswertbedingung

$$u_C(0) = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \hat{I} = \hat{U} \quad \Rightarrow \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{L/C}} = \frac{\hat{U}}{Z_K}$$

Mit Kennwiderstand:

$$Z_K = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Der einfache LC-Schwingkreis: Lösung der Differentialgleichung

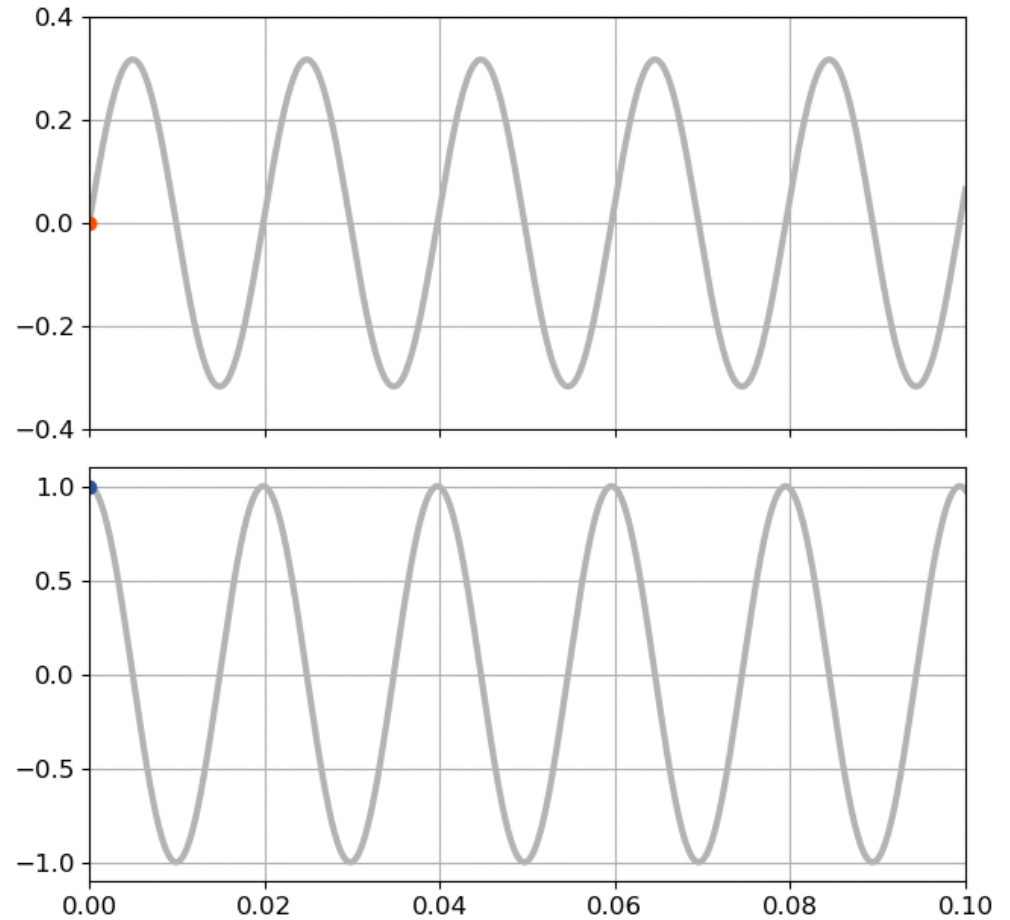


Lösung der Differentialgleichung

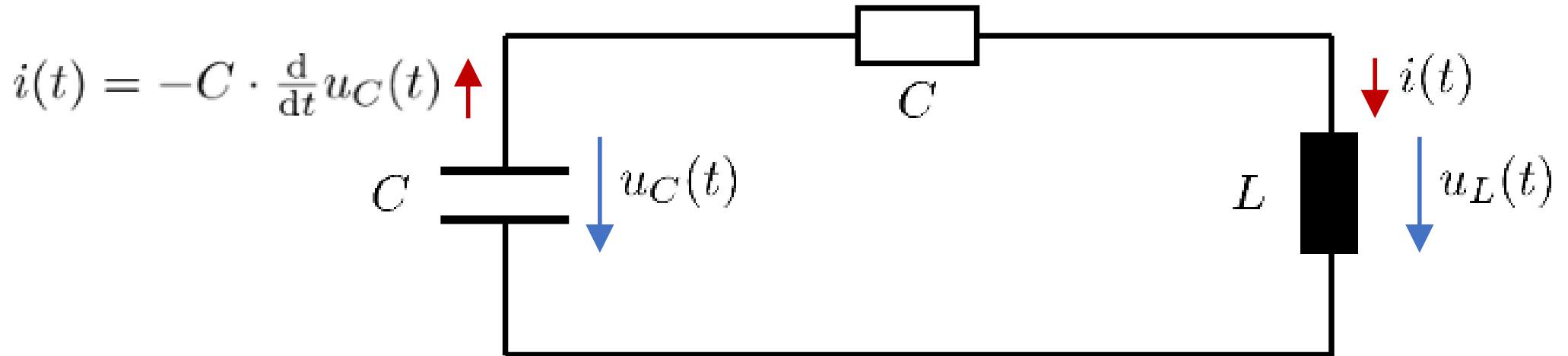
$$i(t) = \frac{\hat{U}}{Z_K} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$u_C(t) = \hat{U} \cos(\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Z_K = \sqrt{\frac{L}{C}}$$



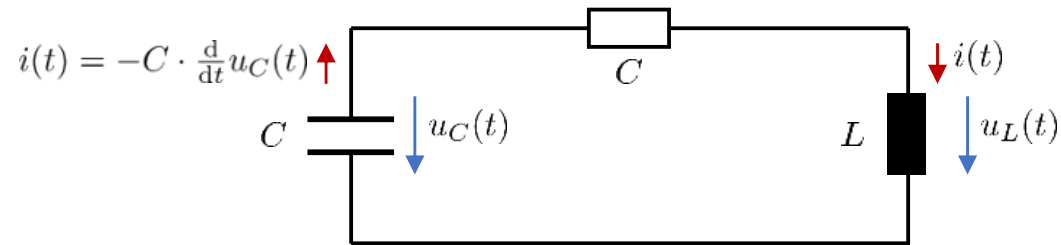
Der reale RLC-Serienschwingkreis als Anfangswertproblem



Reale Eigenschaften von Kondensator und Induktivität: Einführung serieller Verluste durch Widerstand R

- Z.B. Kupferverluste der Induktivität oder Leitungsverluste des Kondensators
- Weitere parasitäre Effekte bzw. Verluste werden zunächst vernachlässigt

Differentialgleichung des RLC-Schwingkreises



Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung (Anfangswertbedingungen $u_C(0) = \hat{U}$ und $i(0) = 0$)

$$u_C(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$$

$$i(t) = -C \cdot \frac{d}{dt} u_C(t) = -LC \cdot \frac{d^2}{(dt)^2} i(t) - RC \cdot \frac{d}{dt} i(t)$$

$$\frac{d^2}{(dt)^2} i(t) + 2D \cdot \frac{d}{dt} i(t) + \omega_0^2 \cdot i(t) = 0$$

Dämpfung $D = \frac{R}{2L}$ und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Allgemeiner Lösungsansatz: $i(t) = A \cdot e^{\lambda \cdot t}$

Der reale RLC-Serienschwingkreis: Lösung der Differentialgleichung

Gedämpfte Schwingung: $D < \omega_0$

Strom:

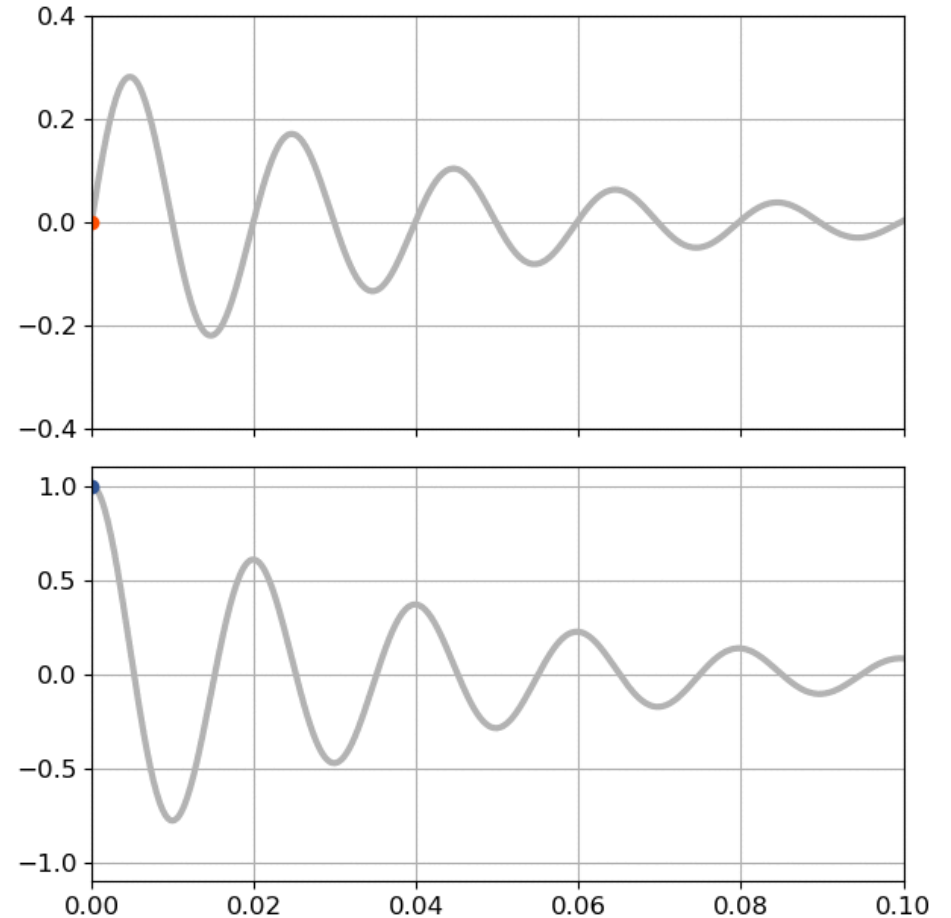
$$i(t) = \frac{U_0}{Z_K} \cdot e^{-Dt} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - D^2} \cdot t\right)$$

Kondensatorspannung:

$$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-Dt} \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - D^2} \cdot t - \varphi\right)$$

$$U_0 = \frac{\hat{U}}{\sqrt{1 - \left(\frac{R}{2Z_K}\right)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{D}{\sqrt{\omega_0^2 - D^2}}\right)$$



Analyse der Dämpfung bei unterschiedlichen Ohm'schen Verlusten

Gedämpfte Schwingung $D < \omega_0$

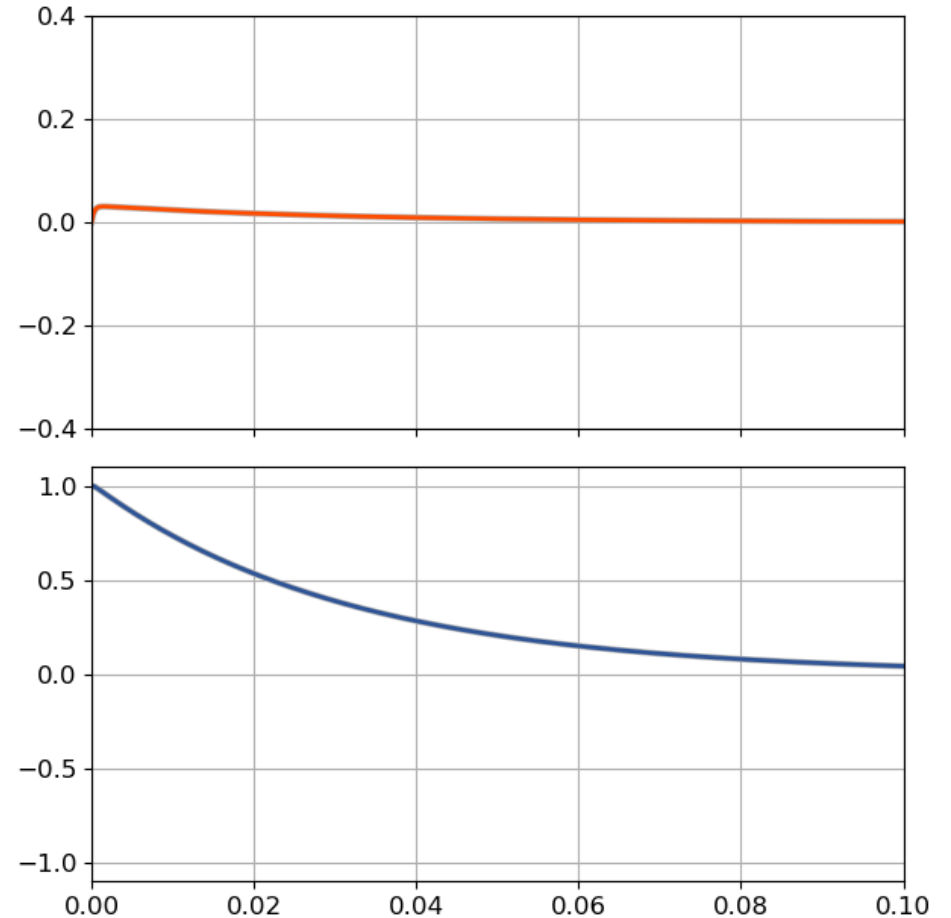
- Exponentielles Abklingen der Amplitude

Aperiodischer Grenzfall $D = \omega_0$

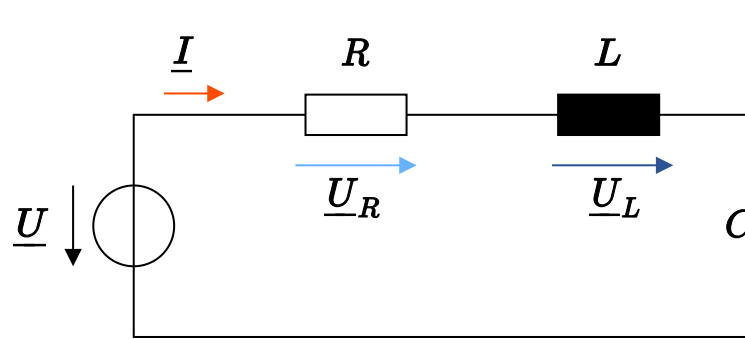
- Es tritt gerade keine Schwinung mehr auf.

Aperiodischer Fall $D > \omega_0$

- Langsames nicht-periodisches Abklingen von Strom und :



Analyse des realen RLC-Schwingkreises im Frequenzbereich I



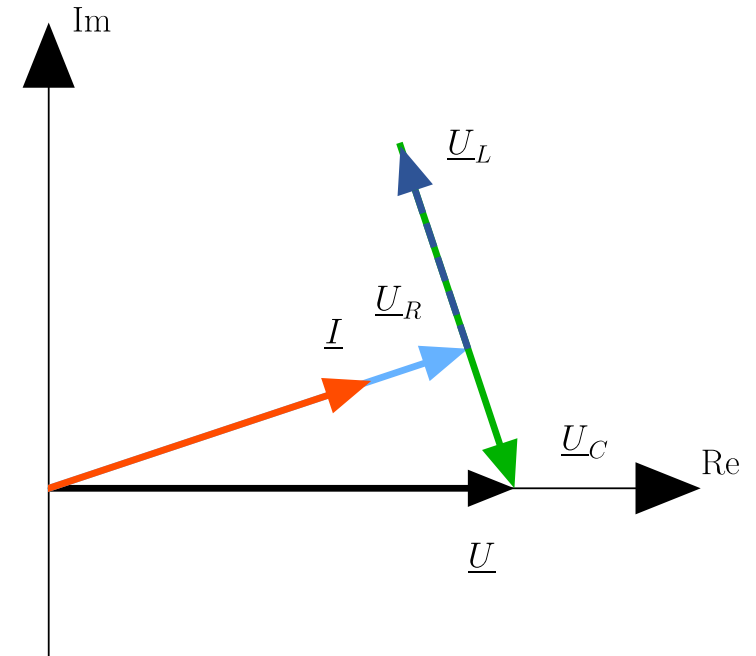
Berechnung der Spannungen:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

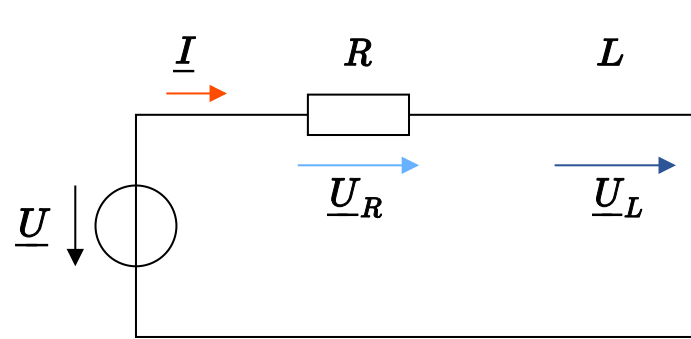
$$\underline{U}_R = \underline{U} \cdot \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

$$\underline{U}_L = \underline{U} \cdot \frac{-\omega^2 LC}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

$$\underline{U}_C = \underline{U} \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

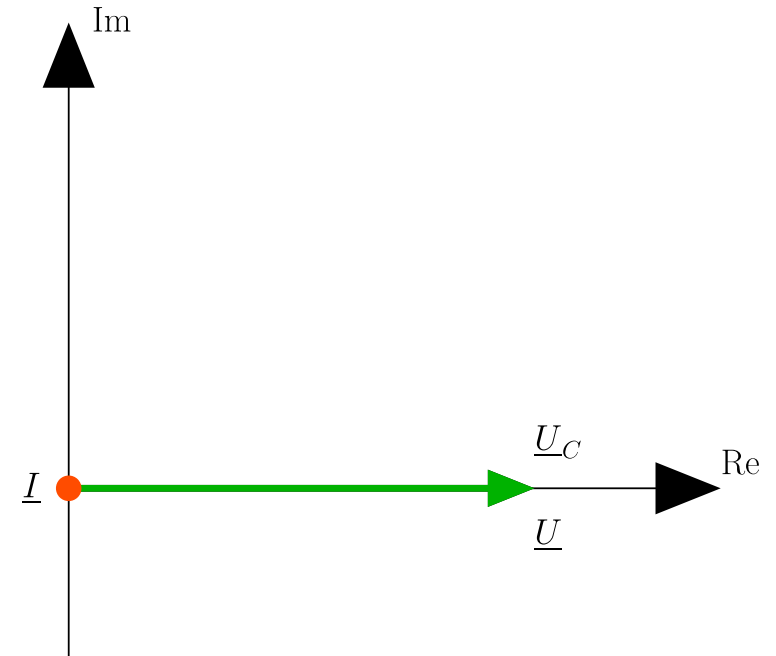


Analyse des realen RLC-Schwingkreises im Frequenzbereich II

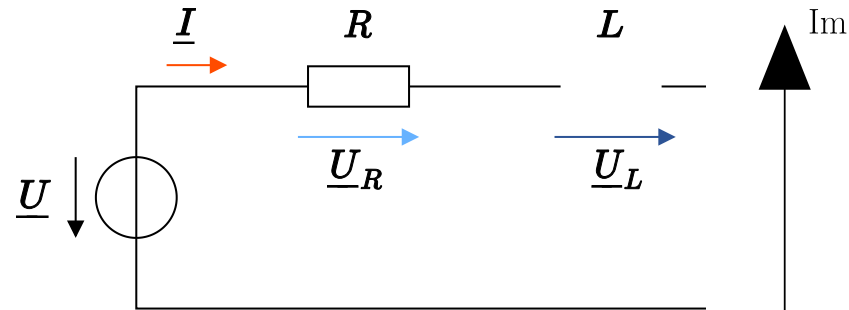


Bei Gleichstrom ($\omega = 0$) gilt:

- Impedanz der Induktivität: $\underline{Z}_L = 0$
- Impedanz des Kondensators: $\underline{Z}_C = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{j\omega C} = \infty$
- Kein Stromfluss im Kreis: $\underline{I} = 0 \Rightarrow \underline{U}_R = 0$
- Kondensatorspannung $\underline{U}_C = \underline{U}$

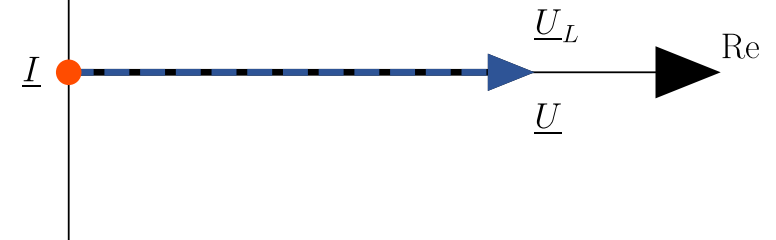


Analyse des realen RLC-Schwingkreises im Frequenzbereich III

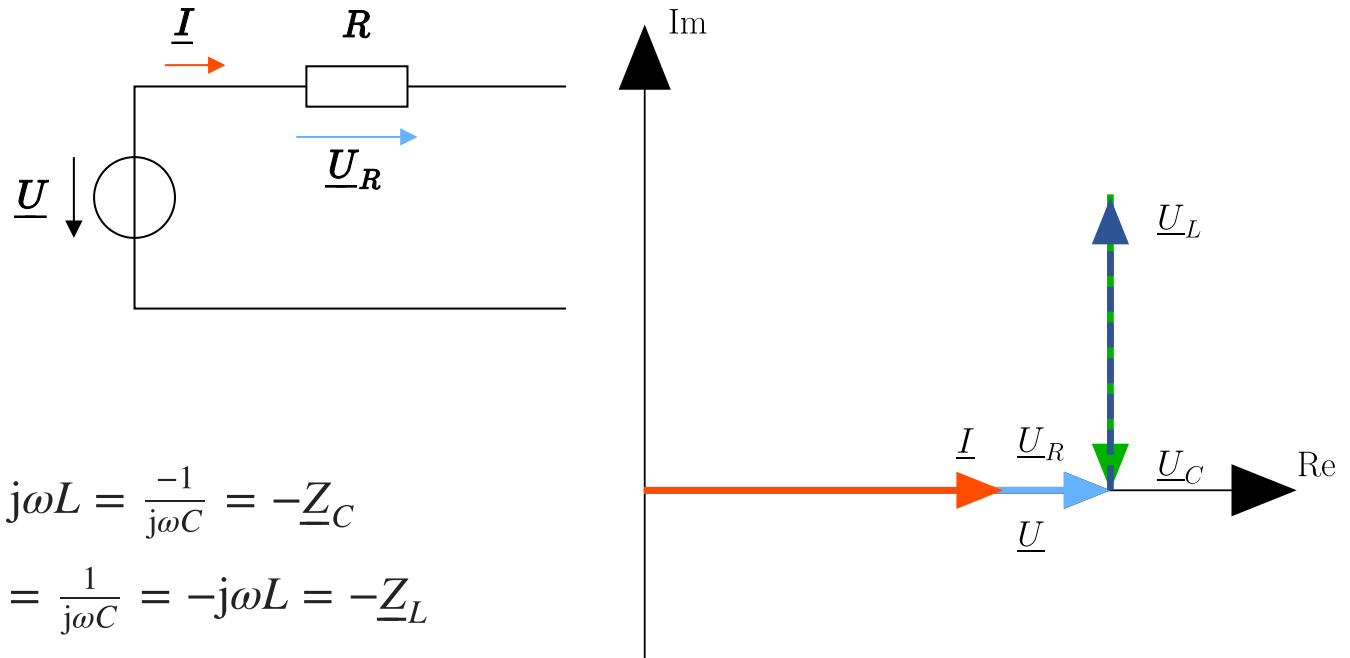


Bei sehr hohen Frequenzen (d.h. $\omega \rightarrow \infty$) gilt:

- Impedanz der Induktivität: $\underline{Z}_L \rightarrow \infty$
- Impedanz des Kondensators: $\underline{Z}_C = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{j\omega C} = 0$
- Kein Stromfluss im Kreis: $\underline{I} = 0 \Rightarrow \underline{U}_R = 0$
- Spannung über Induktivität $\underline{U}_L = \underline{U}$



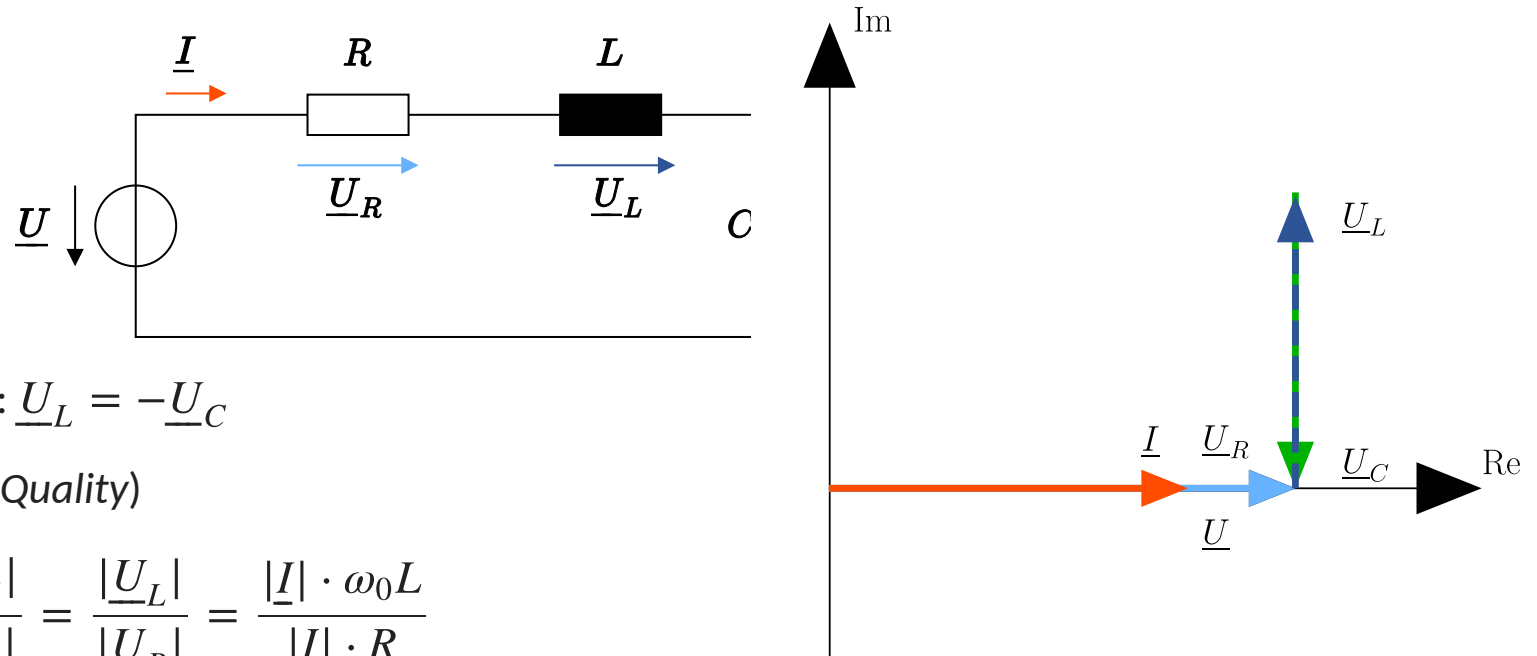
Analyse des realen RLC-Schwingkreises im Frequenzbereich IV



Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$:

- Impedanz der Induktivität: $\underline{Z}_L = j\omega L = \frac{-1}{j\omega C} = -\underline{Z}_C$
- Impedanz des Kondensators: $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\omega L = -\underline{Z}_L$
- Gesamtimpedanz aus Kondensator und Induktivität: $\underline{Z}_L + \underline{Z}_C = 0$
- Spannungen über Induktivität und Kapazität heben sich gegenseitig auf
- Maximaler Stromfluss im Kreis: $\underline{I} = \frac{U}{R}$

Güte eines Schwingkreises



Bei Resonanzfrequenz gilt: $\underline{U}_L = -\underline{U}_C$

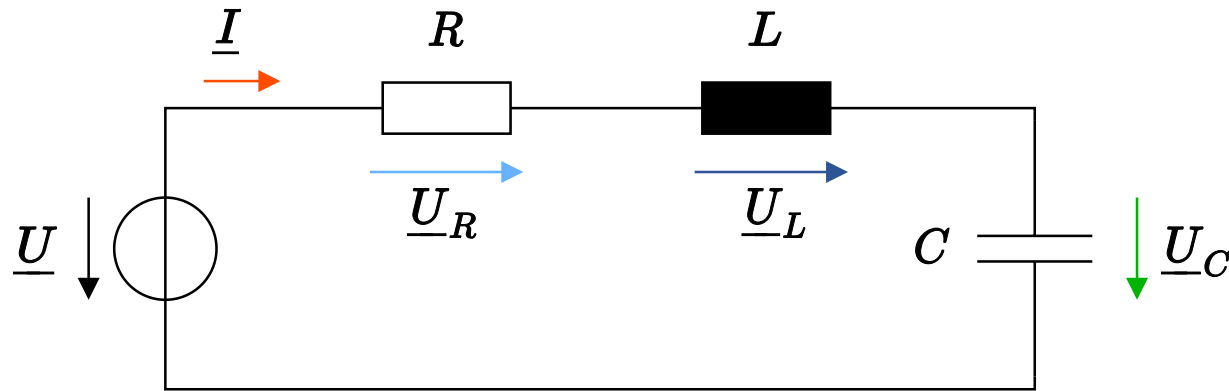
Definition der Güte (*engl. Quality*)

$$Q_0 = \frac{|\underline{U}_L|}{|\underline{U}_R|} = \frac{|\underline{U}_C|}{|\underline{U}_R|} = \frac{|\underline{U}_L|}{|\underline{U}_R|} = \frac{|\underline{I}| \cdot \omega_0 L}{|\underline{I}| \cdot R}$$

Bei Resonanzfrequenz gilt für die Blindwiderstände $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_K$

$$Q_0 = \frac{Z_K}{R} = \frac{\omega_0}{2D}$$

Bandbreite des realen RLC-Schwingkreises



Abgegebene Scheinleistung der Spannungsquelle:

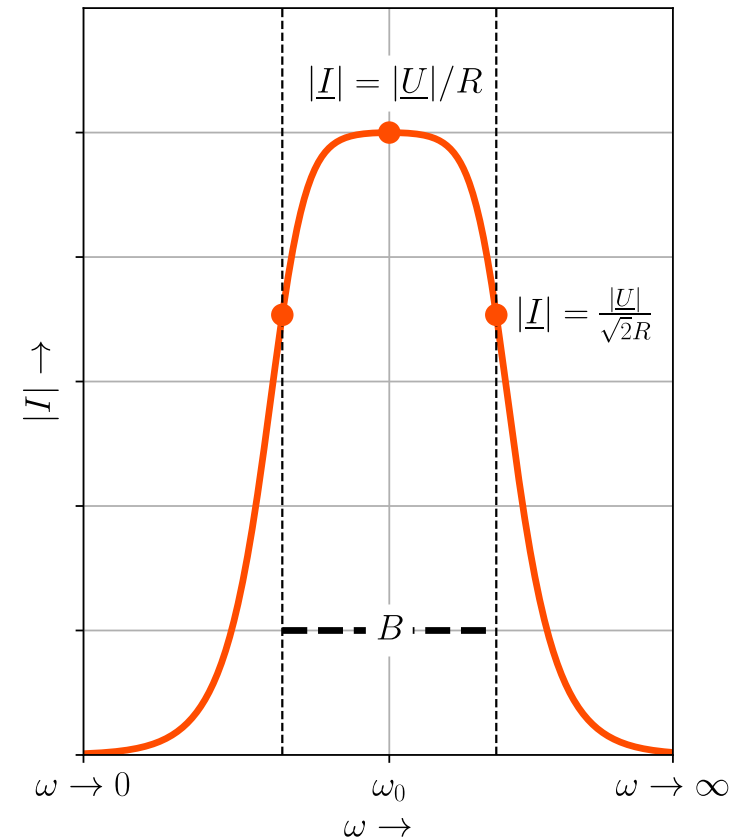
$$S = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = |S|(\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))$$

Maximale Wirkleistung im Kreis für $\cos(\varphi) = 1$, d.h. $\omega = \omega_0$

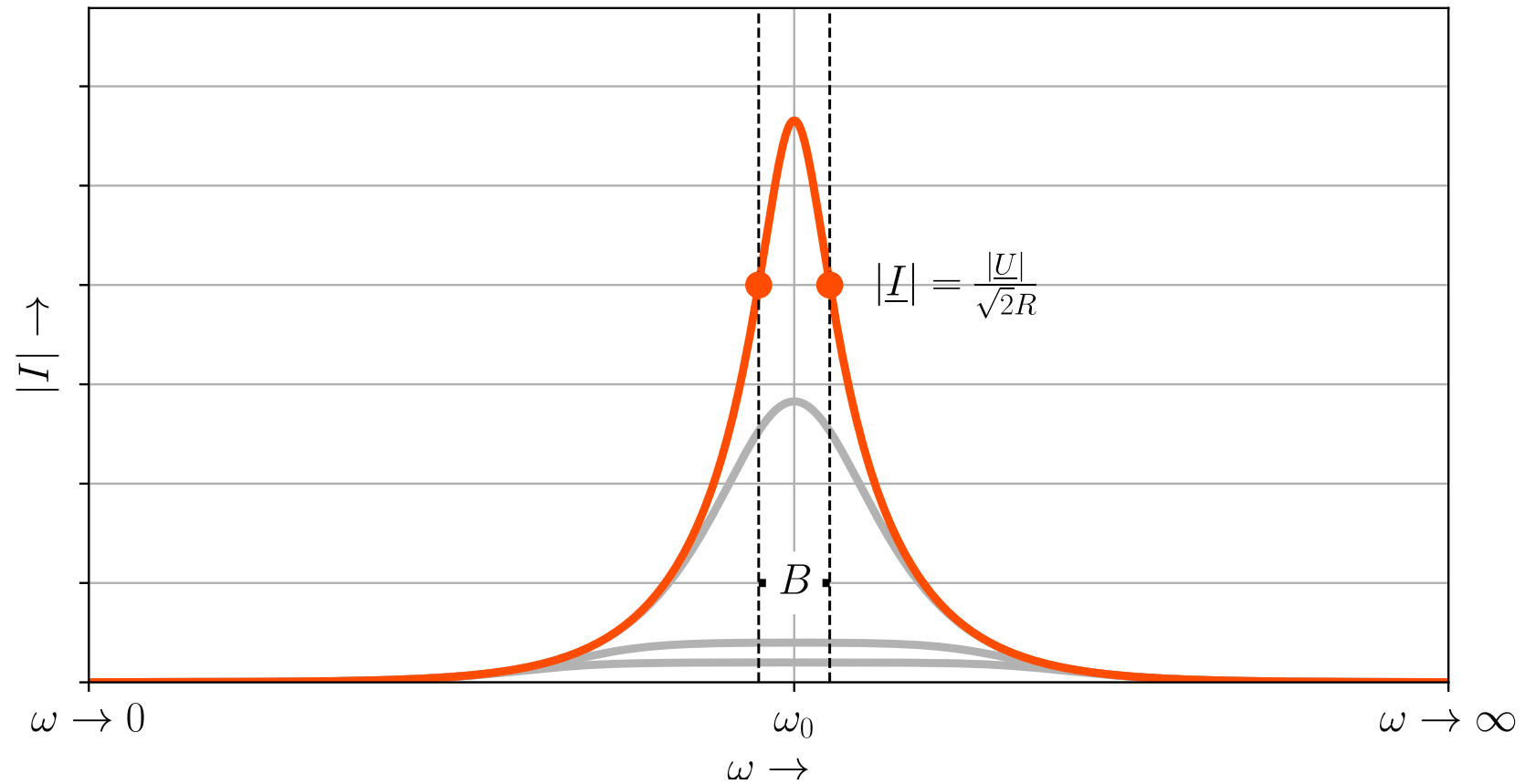
Definition der Bandbreite B :

- Frequenzbereich um ω_0 mit mind. 50% der max. Wirkleistung

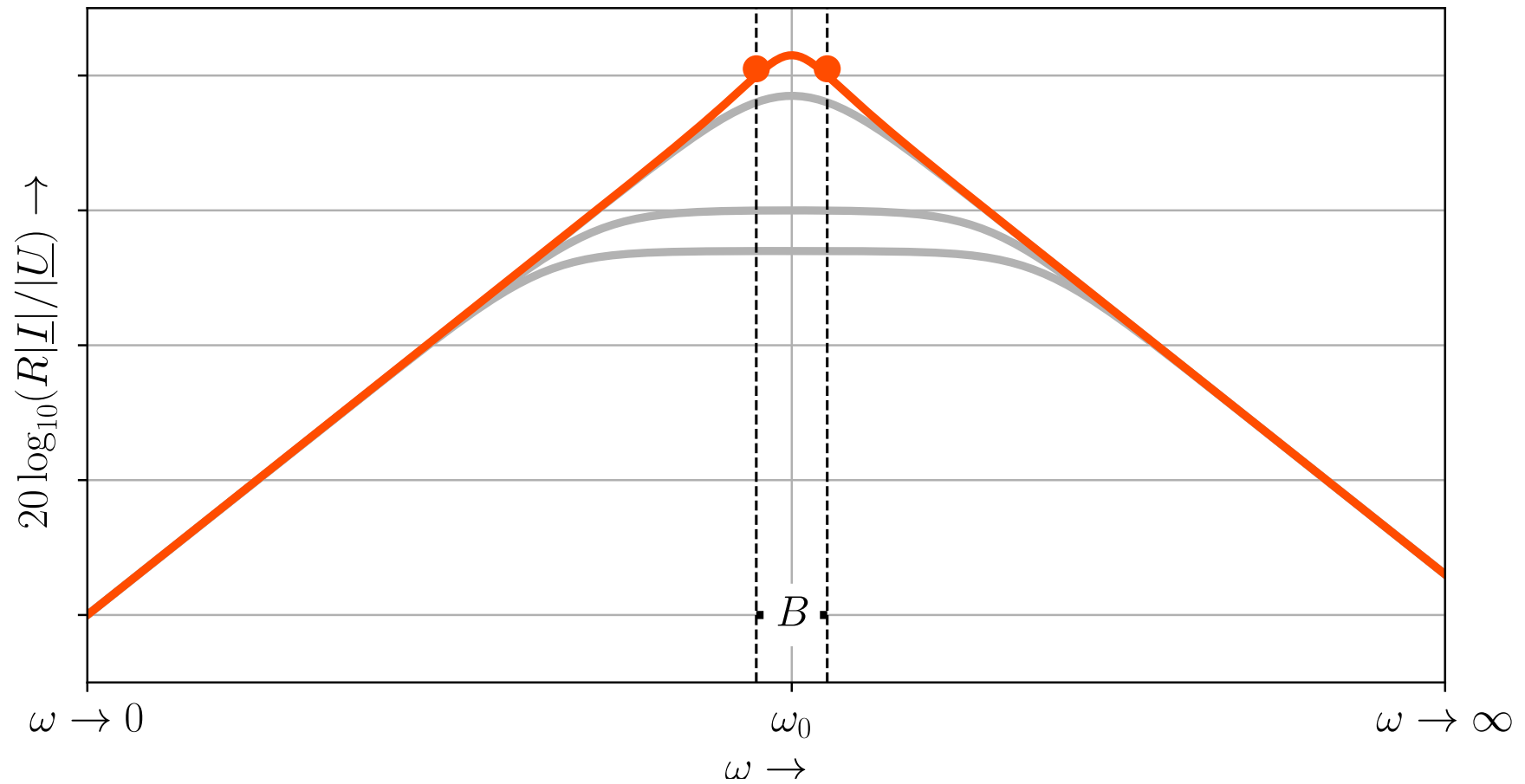
- Bandbreite $B = \frac{\omega_0}{Q_0}$





Bandbreite des realen RLC-Schwingkreises bei höherer Güte



Bandbreite des realen RLC-Schwingkreises in dB



Kenngrößen des Reihen- und Parallelschwingkreises

| Kenngröße | Reihenschwingkreis | Parallelschwingkreis |
|-----------------------|--|--|
| |  rlc_serial.svg |  rlc_parallel.svg |
| Erregung | Spannungsquelle | Stromquelle |
| Resonanzkreisfrequenz | $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ | $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ |
| Kennwiderstand | $Z_K = \sqrt{\frac{L}{C}}$ | $Z_K = \sqrt{\frac{L}{C}}$ |
| Dämpfung | $D = \frac{R}{2L}$ | $D = \frac{1}{2RC}$ |
| Güte | $Q_0 = \frac{Z_K}{R} = \frac{\omega_0}{2D}$ | $Q_0 = \frac{R}{Z_K} = \frac{\omega_0}{2D}$ |
| Bandbreite | $B = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{R}{L}$ (Strom) | $B = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{1}{RC}$ (Spannung) |