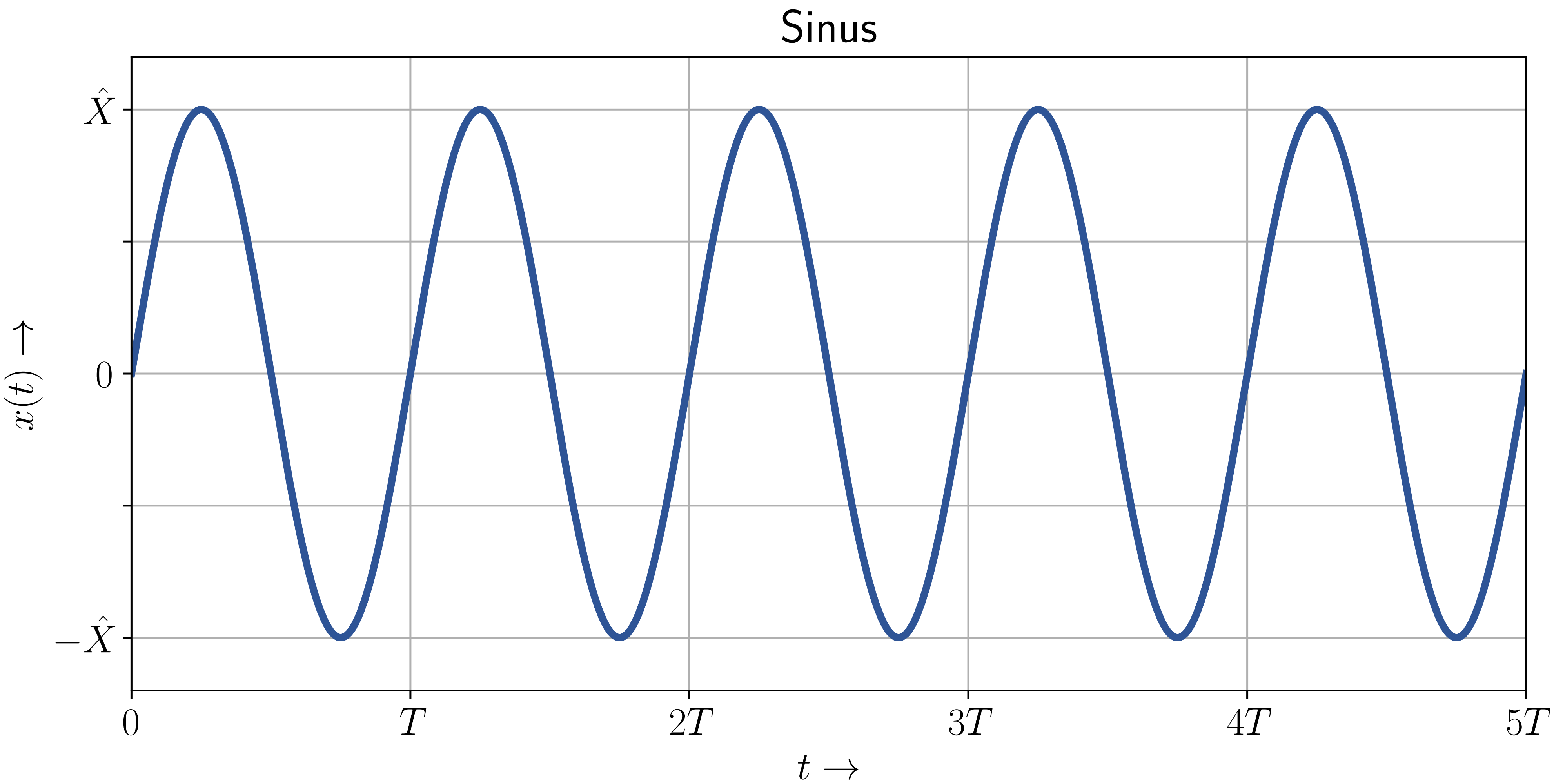
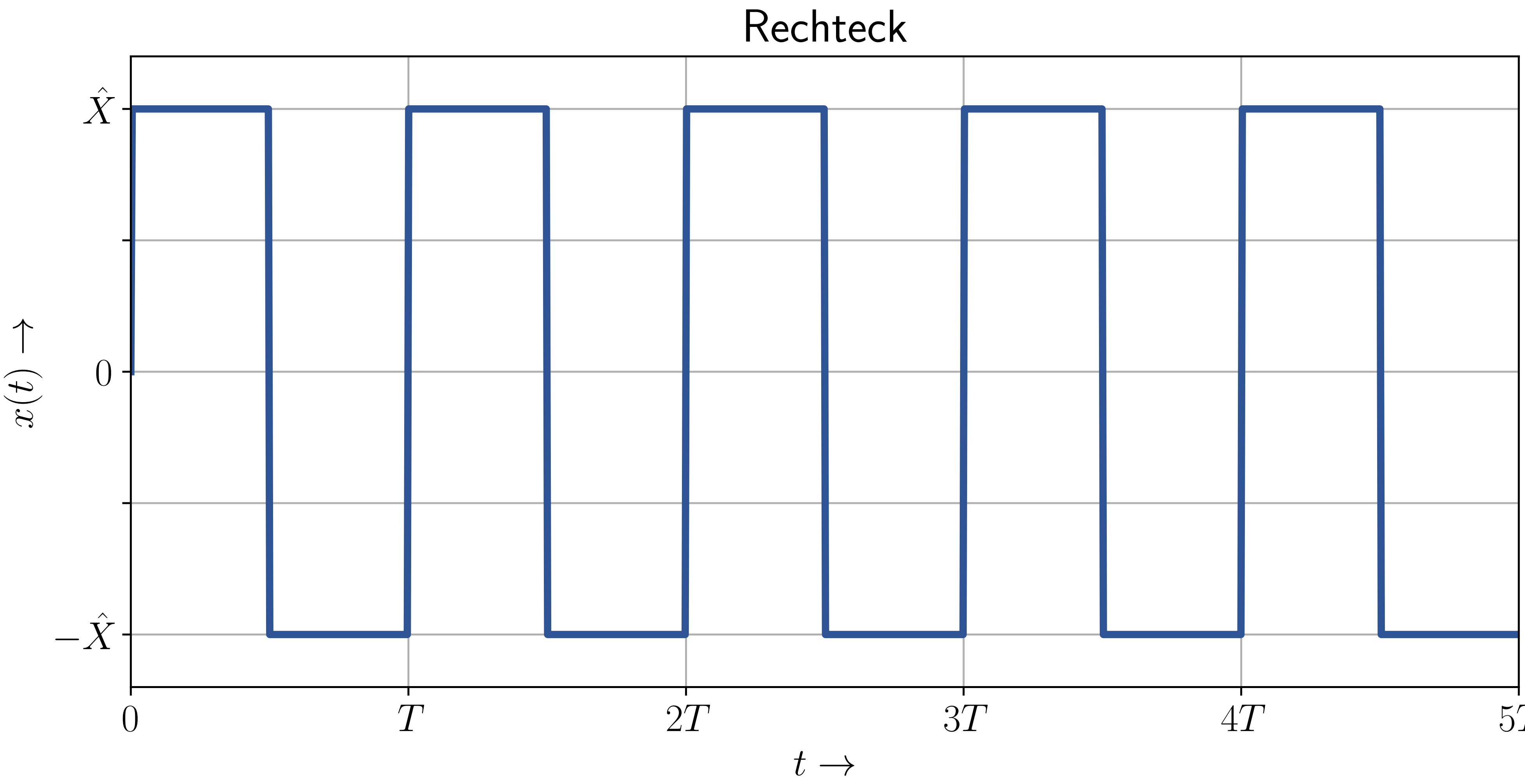
Fourier-Reihenentwicklung

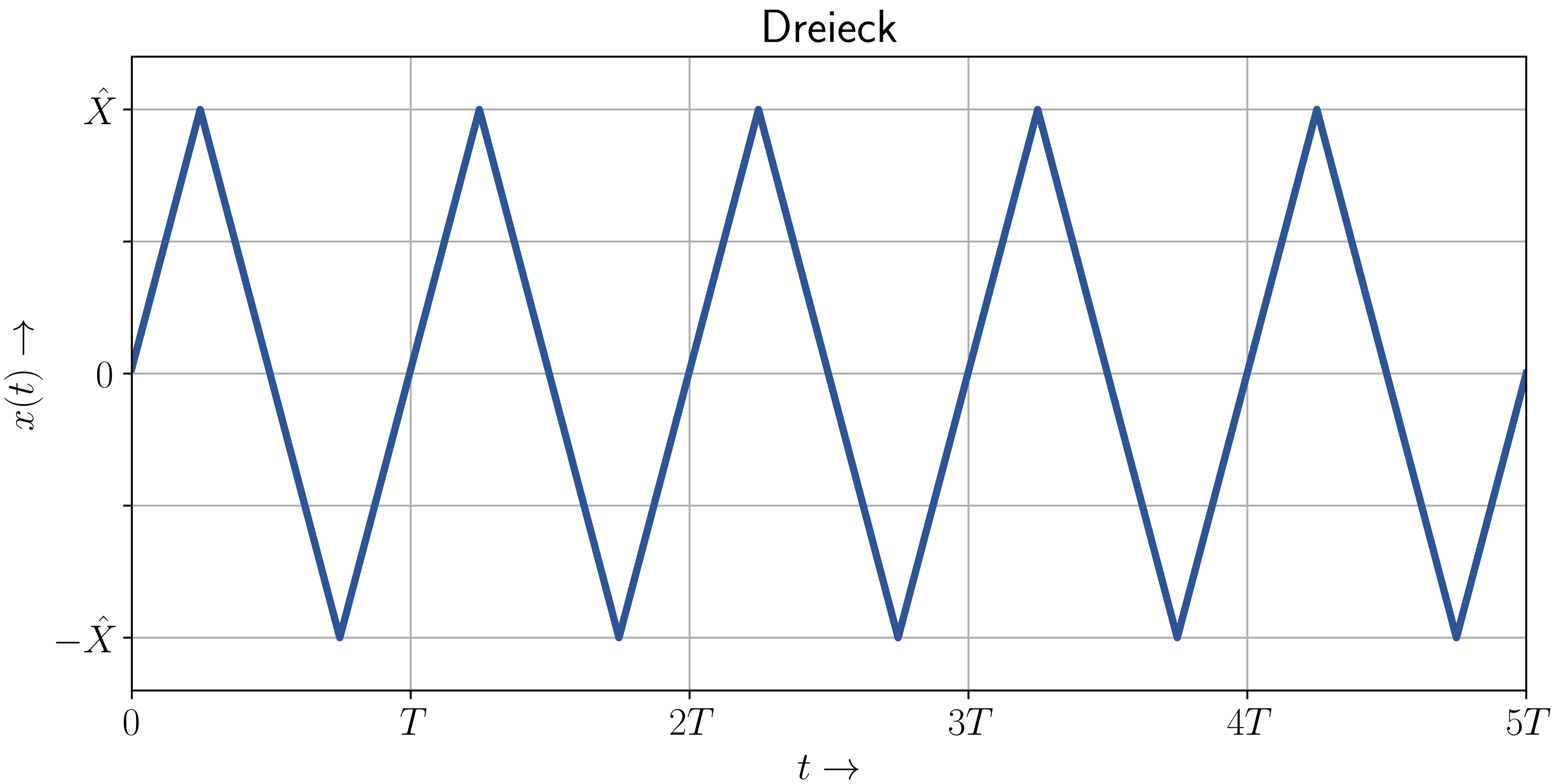
Periodische Signale - Sinus



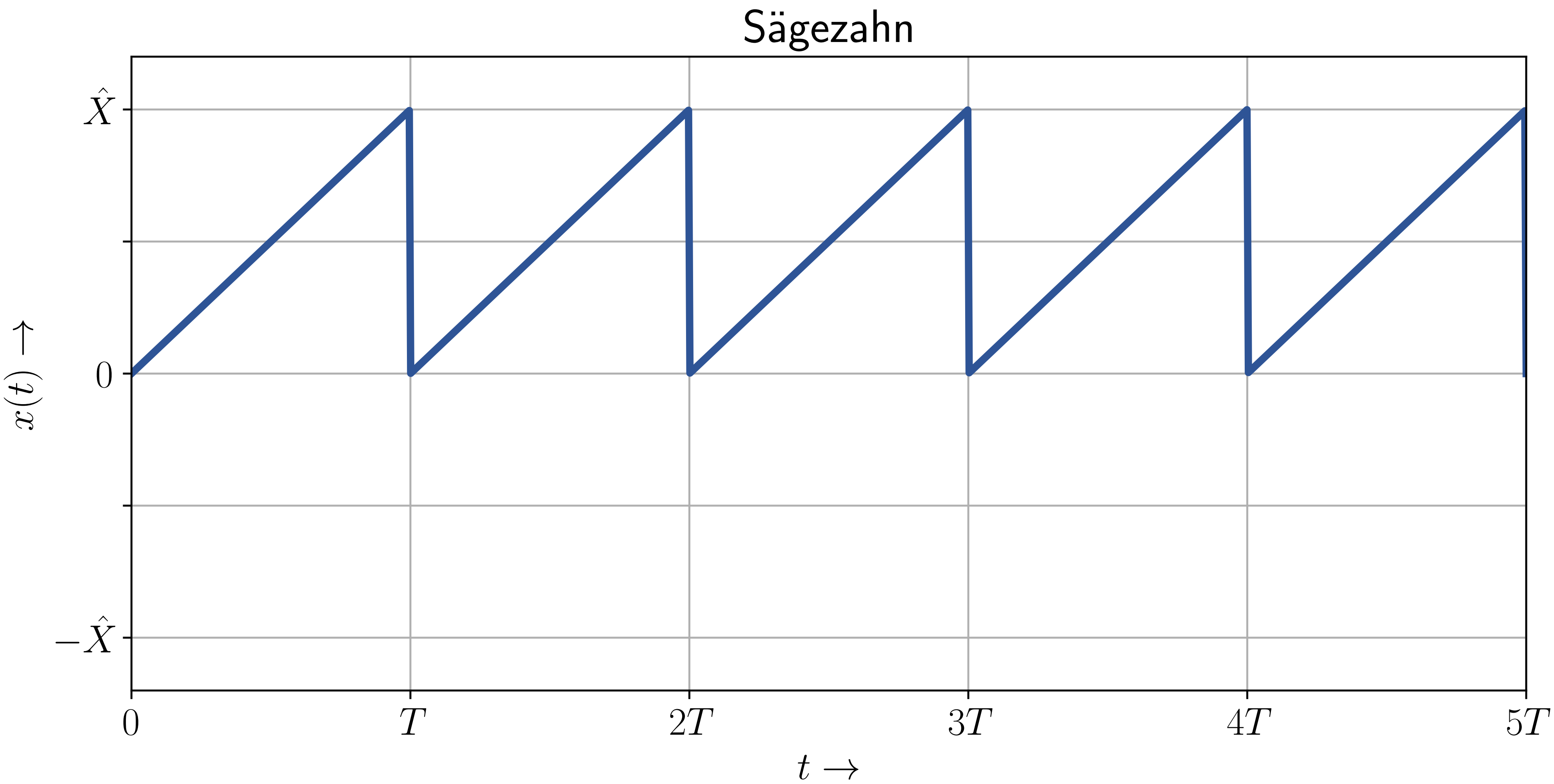
Periodische Signale - Rechteck



Periodische Signale - Dreieck



Periodische Signale - Sägezahn



Fourier-Reihenentwicklung periodischer Signale

Jedes Periodische Signal lässt sich als unendliche Reiche von Sinus- und Cosinus-Funktion beschreiben

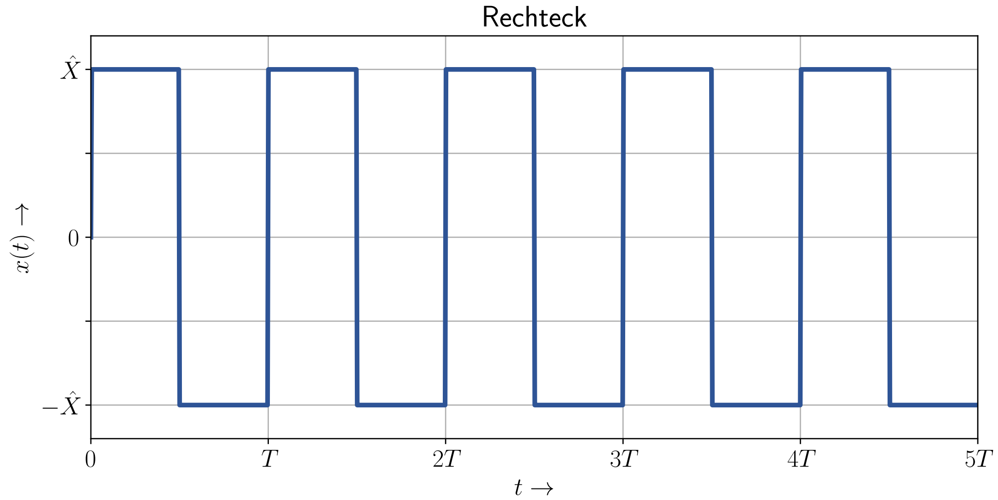
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Die Koeffizienten der einzelnen Summanden lassen sich ermitteln durch

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \cos(n\omega \cdot t) \mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \sin(n\omega \cdot t) \mathrm{d}t$$

Beispiel: Fourier-Reihenenticklung eines Rechtecksignals I



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\hat{X}\mathrm{d}t - \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T}\hat{X}\mathrm{d}t0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot\cos(n\omega\cdot t)\mathrm{d}t = \frac{2\hat{X}}{T}\int_0^{T/2}\cos(n\omega\cdot t)\mathrm{d}t - \frac{2\hat{X}}{T}\int_{T/2}^{T}\cos(n\omega\cdot t)\mathrm{d}t = 0$$

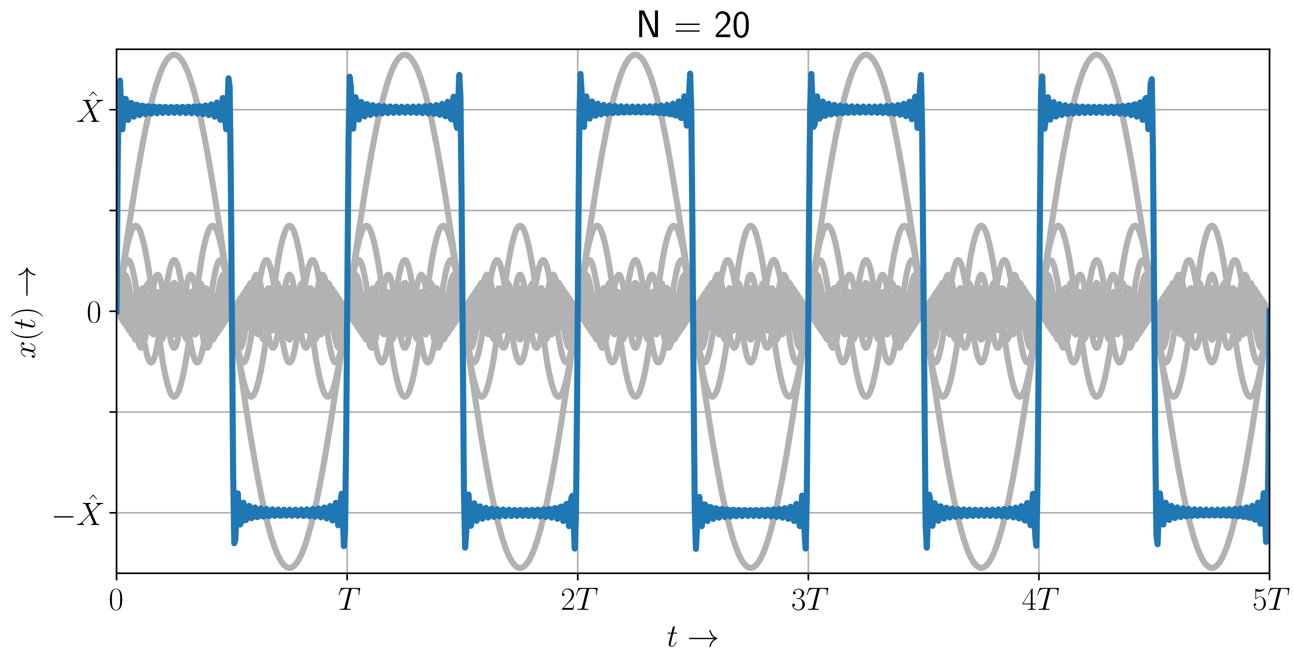
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot\sin(n\omega\cdot t)\mathrm{d}t = \ldots = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beispiel: Fourier-Reihenenticklung eines Rechtecksignals II

Damit lässt sich die Fourier-Reihe des Rechtecksignals allgemein formulieren:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2k-1) \cdot \omega t\right)}{2k-1}$$

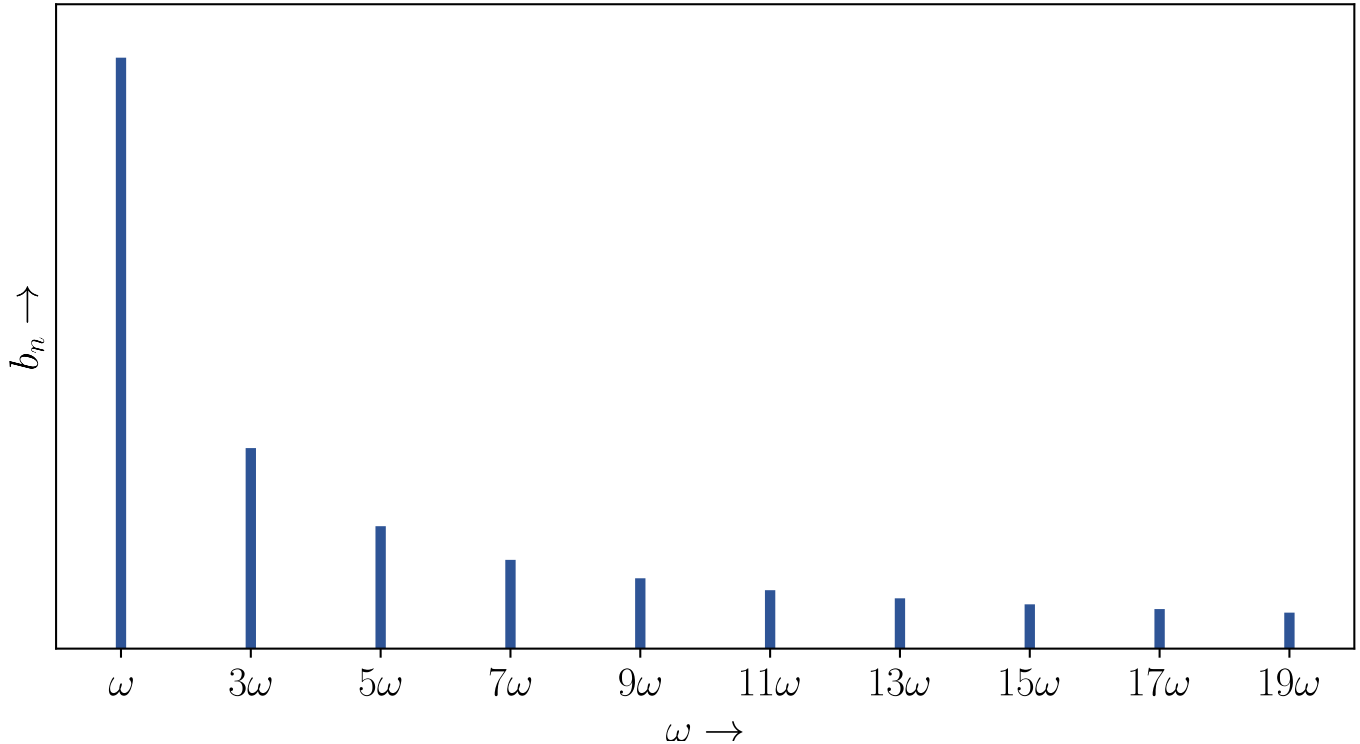
Die endliche Fourier-Reihe beschreibt eine Näherung des periodischen Signals



Interpretation der der Fourier Reihe als Linienspektrum

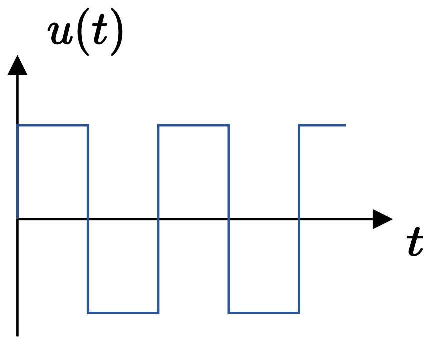
n-ter Koeffizient der Fourier-Reihe beschreibt Sinus-Funktion der Frequenz $n \cdot \omega$.

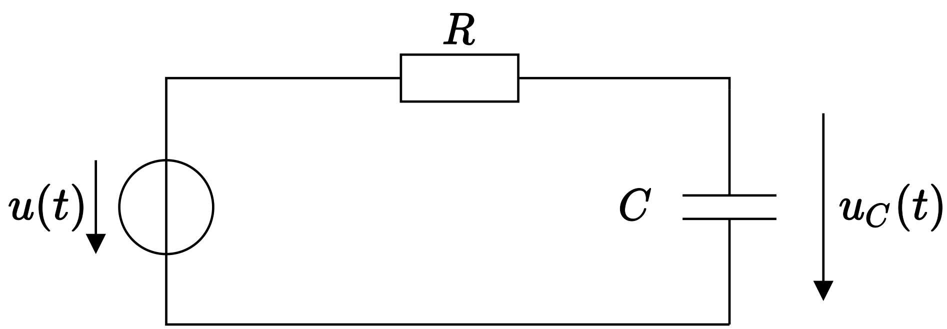
Darstellung der einzelnen Koeffizienten als *Linienspektrum* über die Frequenz ω



Tiefpass-Filterung einer rechteckförmigen Spannungsquelle I

Gegeben: Rechteck-förmige Spannungsquelle mit Frequenz ω_0 an einer Tiefpass Schaltung





Gesucht: Kondensatorspannung $u_C(t)$

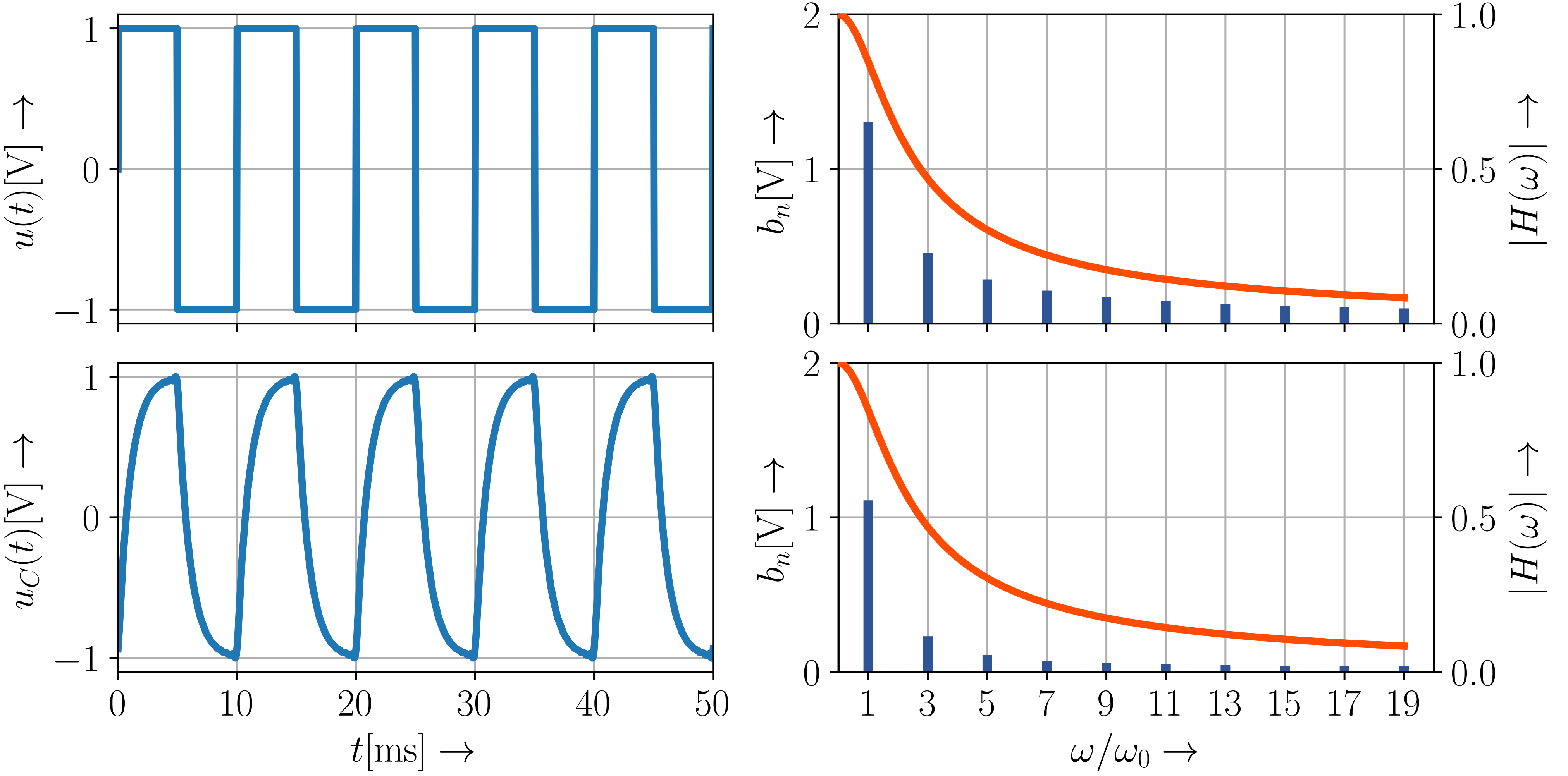
Vorgehen:

Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung für alle Sinus-förmigen Bestandteile der Rechteckspannung

Berechnung des Zeigers der Kondensatorspannung für die jeweiligen Frequenzen

$$\underline{U}_C = \underline{U} \cdot \underline{H}(\omega) \qquad \text{mit} \qquad \underline{H}(w) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega CR} \qquad \omega = \omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \ldots$$

Tiefpass-Filterung einer rechteckförmigen Spannungsquelle II



Referenzen

[1] T. Rießinger, *Mathematik für Ingenieure*, Springer Verlag.