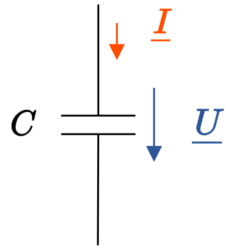
Frequenzbereichsanalyse

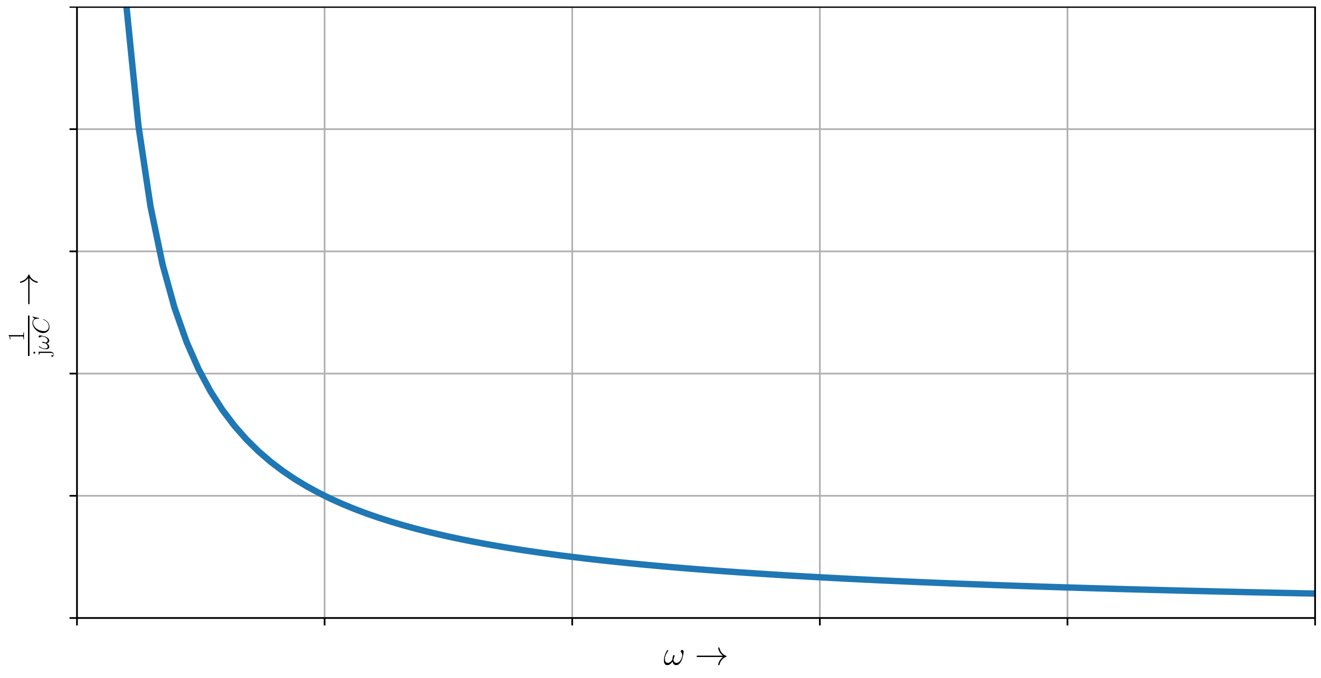
Analyse eines Kondensators im Frequenzbereich

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$



Für $\omega = 0$ (Gleichstrom bzw. -spannung): $\underline{Z} \to \infty$ (Leerlauf)

Für $\omega \to \infty$: $\underline{Z} \to 0$ (Kurzschluss)



Analyse einer komplexen Impedanz

Im Allgemeinen ist der Wert einer Impedanz aus der Menge der komplexen Zahlen:

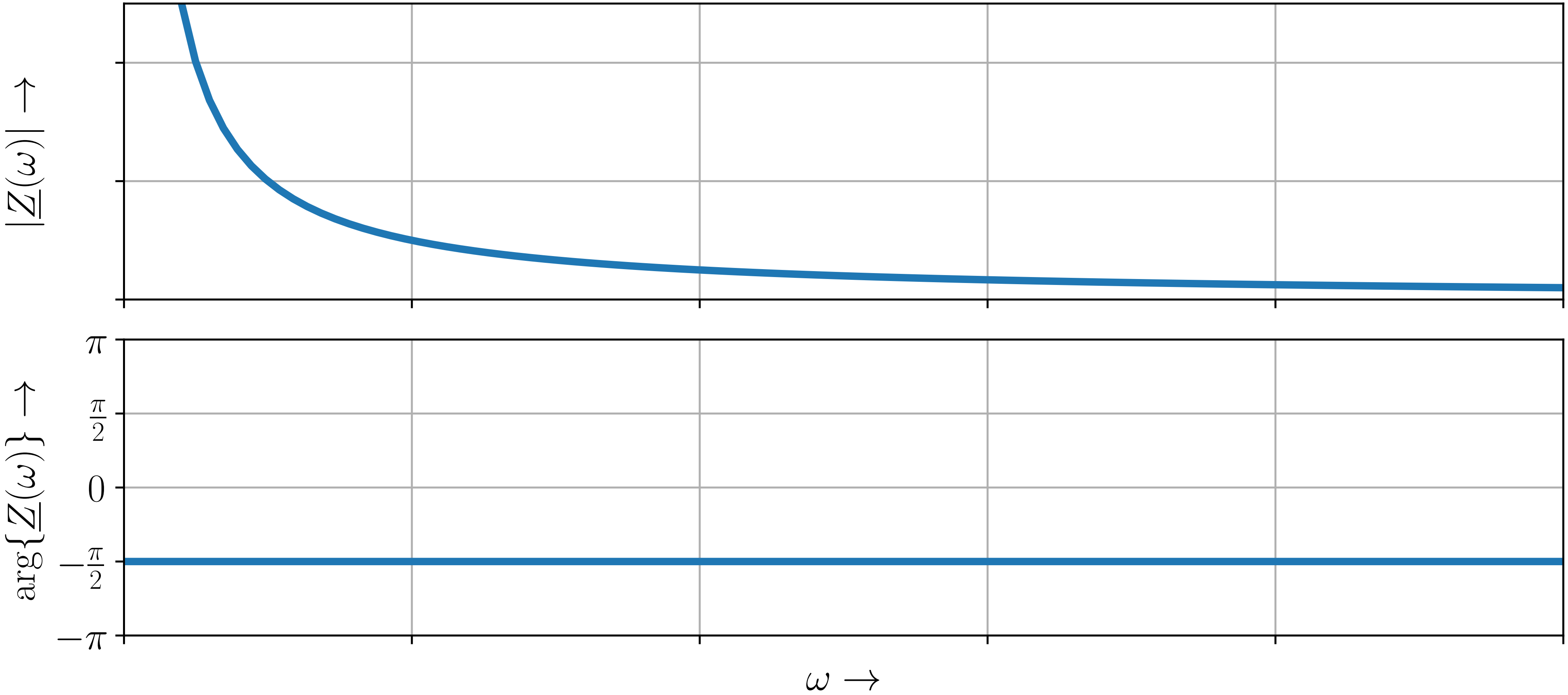
$$\underline{Z}(\omega) \in \mathbb{C}$$

Übliche Darstellung des Impedanzverlaufes

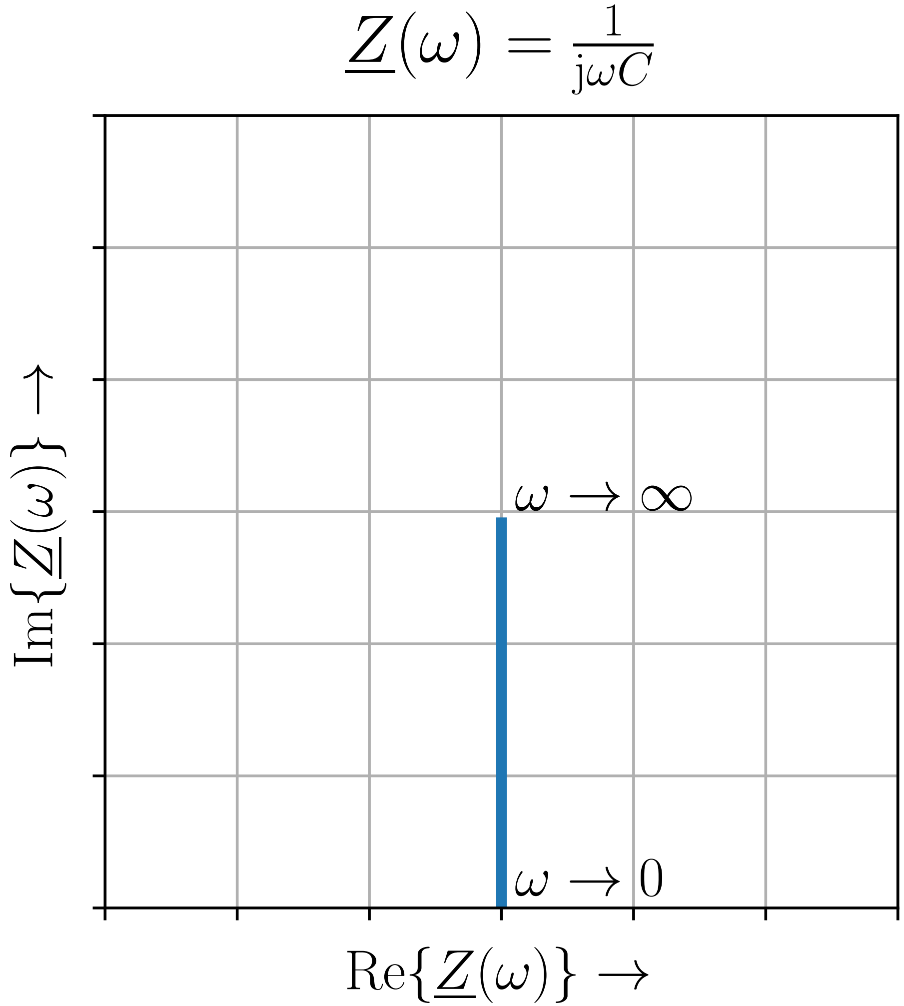
1. Frequenzgang von Betrag $|\underline{Z}(w)|$ und Phase $\arg\{\underline{Z}(w)\}$
2. Ortskurve, d.h. sämtliche Werte des Real- und Imaginärteils von $\underline{Z}(w)$ in der Gauß'schen Zahlenebene

Frequenzgang der Impedanz des Kondensators

$$\underline{Z}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

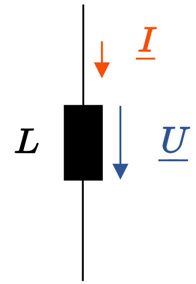


Ortskurve der Impedanz des Kondensators



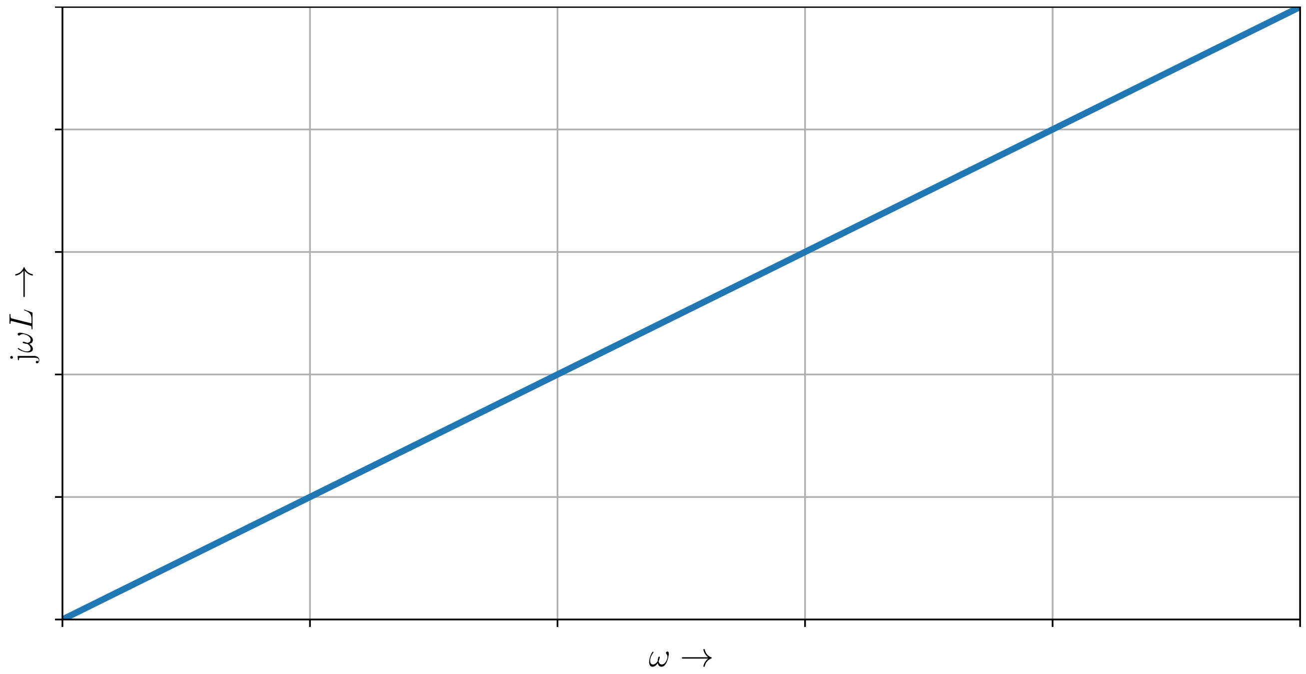
Analyse einer Induktivität im Frequenzbereich

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}(\omega) = \mathrm{j}\omega L$$

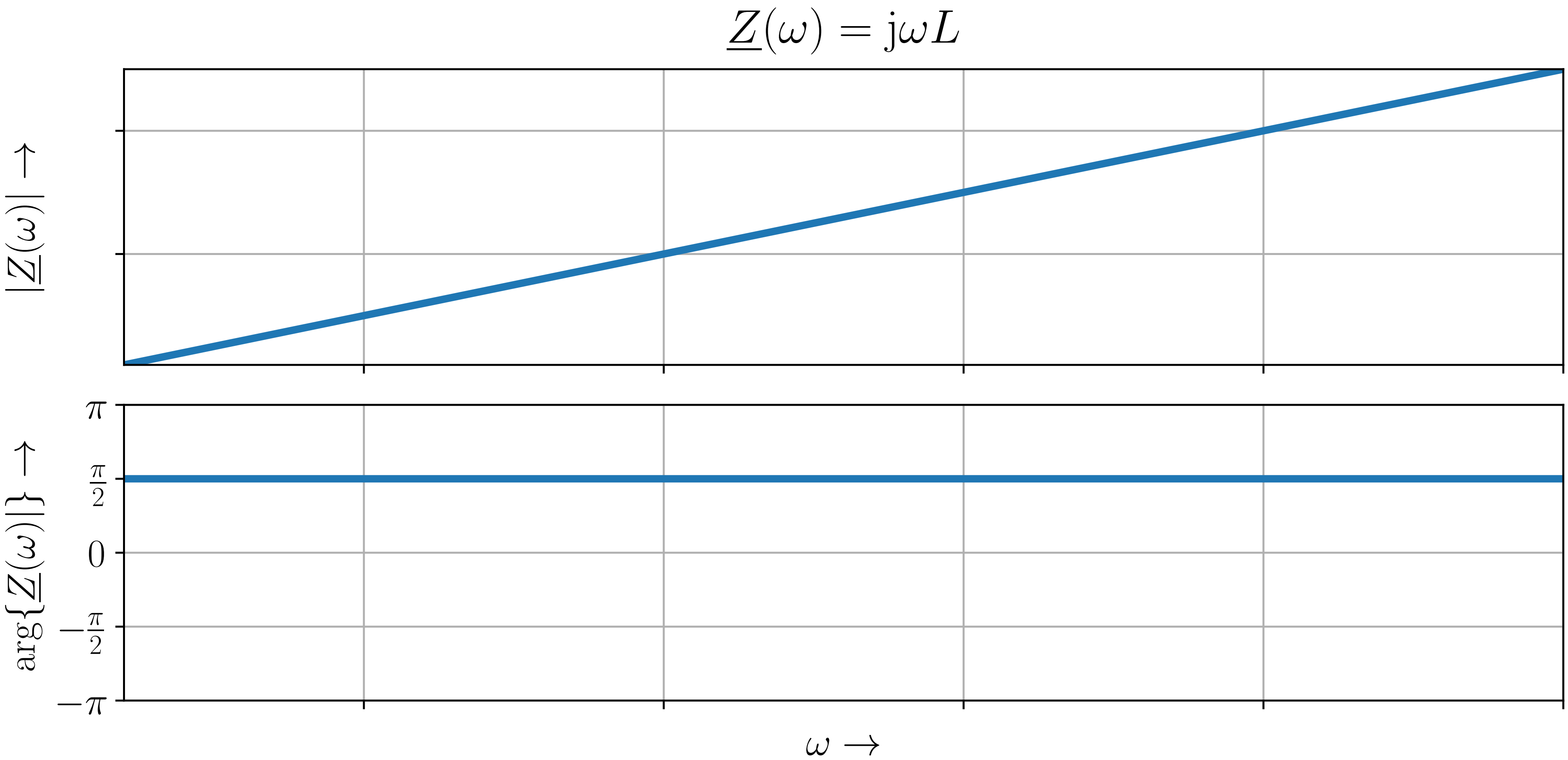


Für $\omega = 0$ (Gleichstrom bzw. -spannung): $\underline{Z} = 0$ (Kurzschluss)

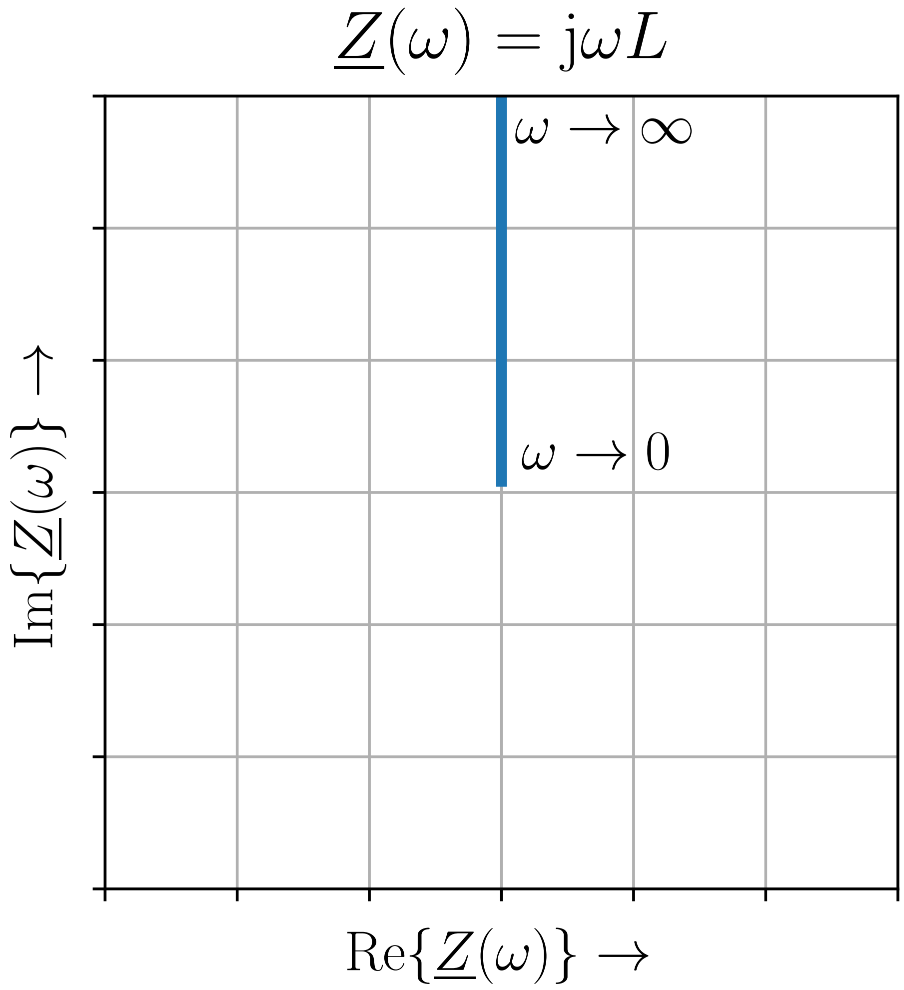
Für $\omega \to \infty$: $\underline{Z} \to \infty$ (Leerlauf)



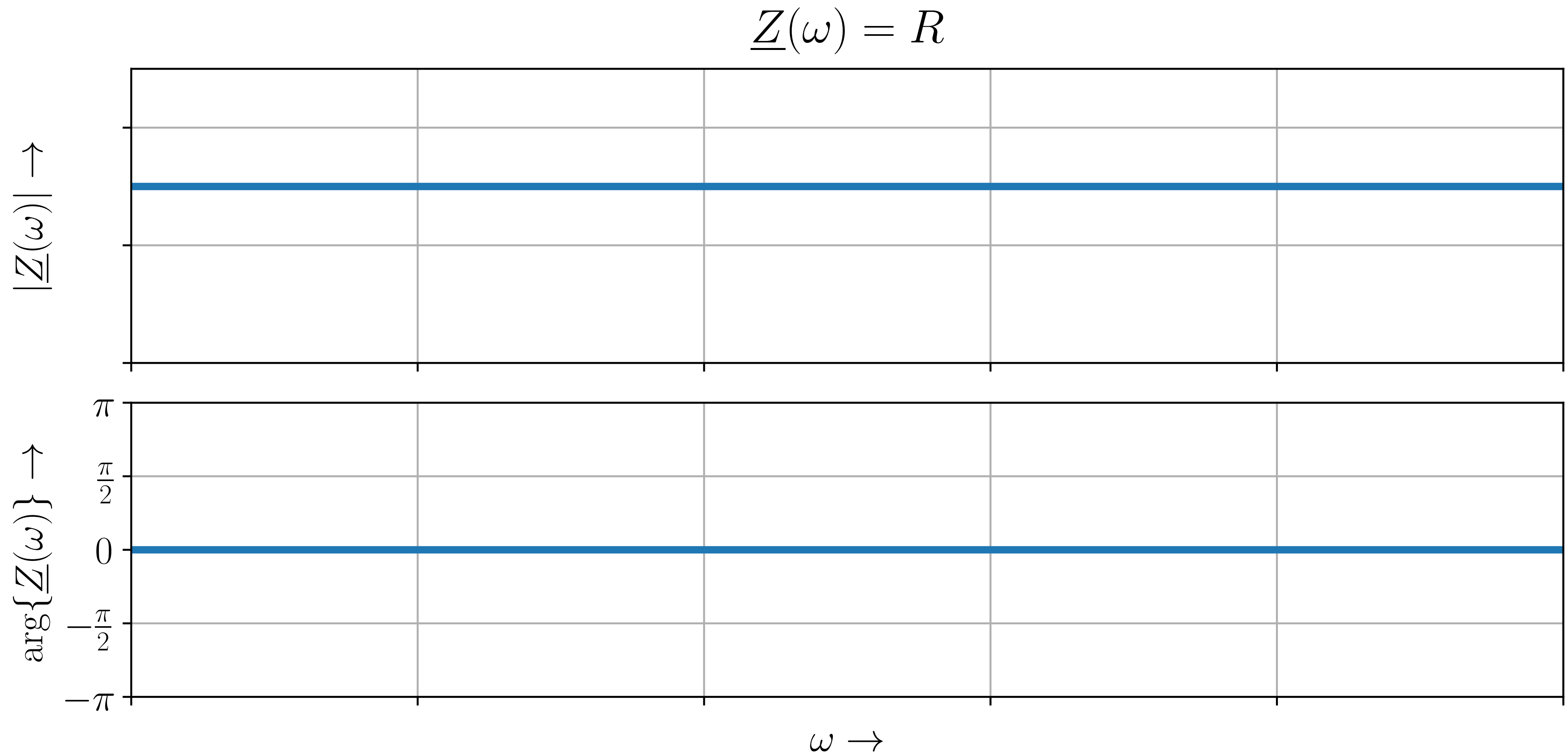
Frequenzgang der Impedanz einer Induktivität



Ortskurve der Impedanz einer Induktivität

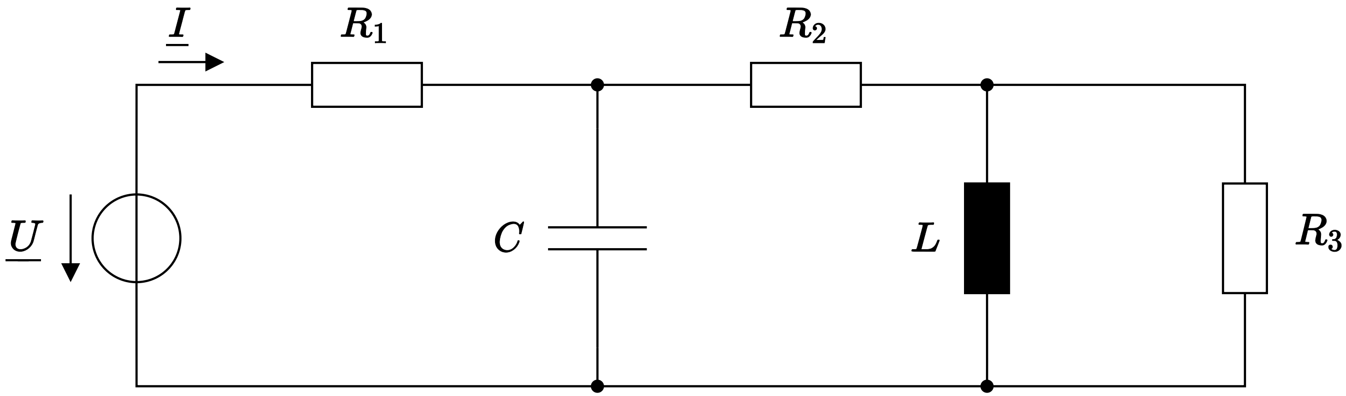


Frequenzgang eines Ohm'schen Widerstandes



Beispiel: Impedanz eines elektrischen Netzwerkes

Betrachtung eines elektrischen Netzwerkes

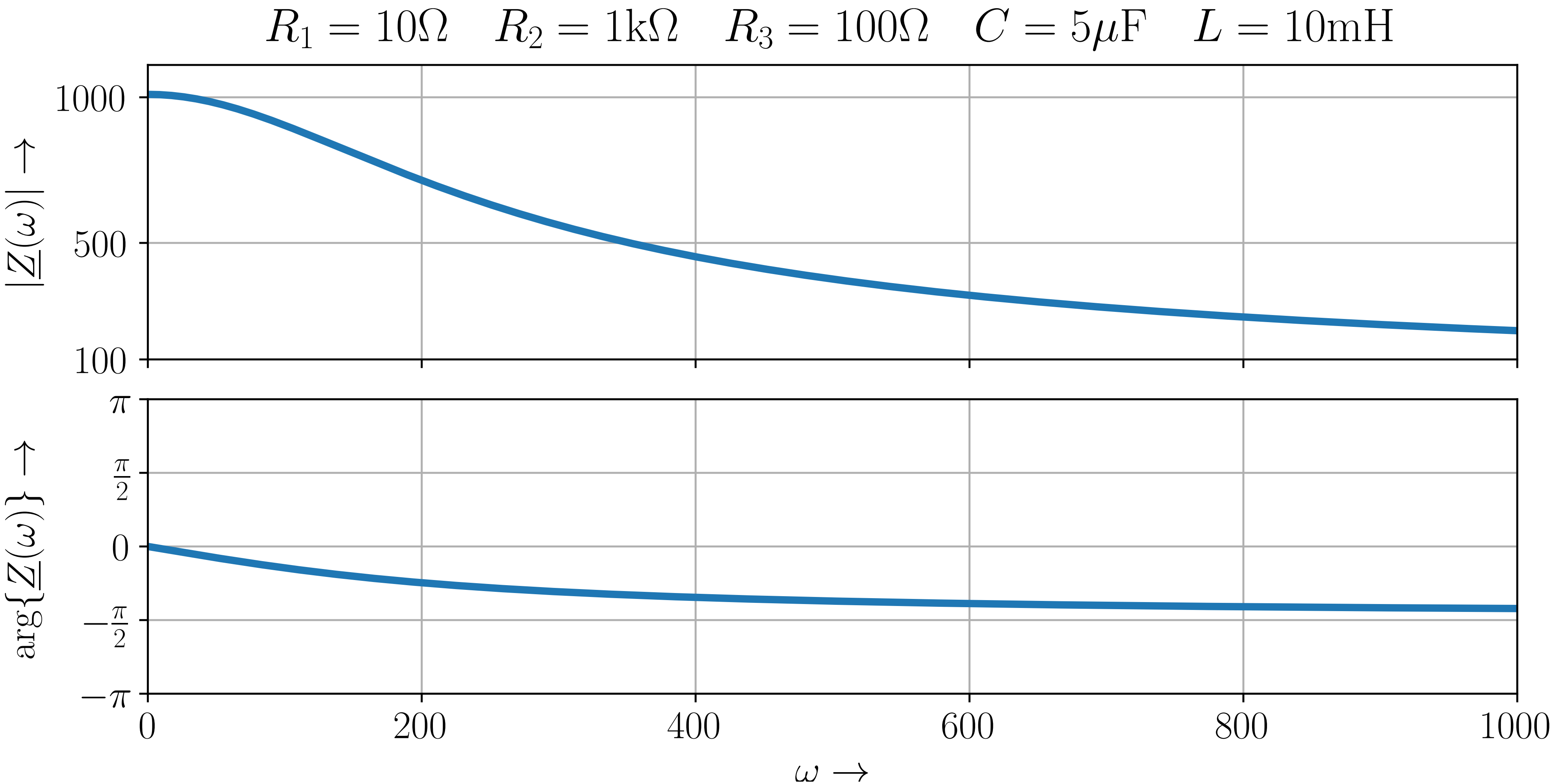


Berechnung der Impedanz an den Klemmen der Spannungsquelle

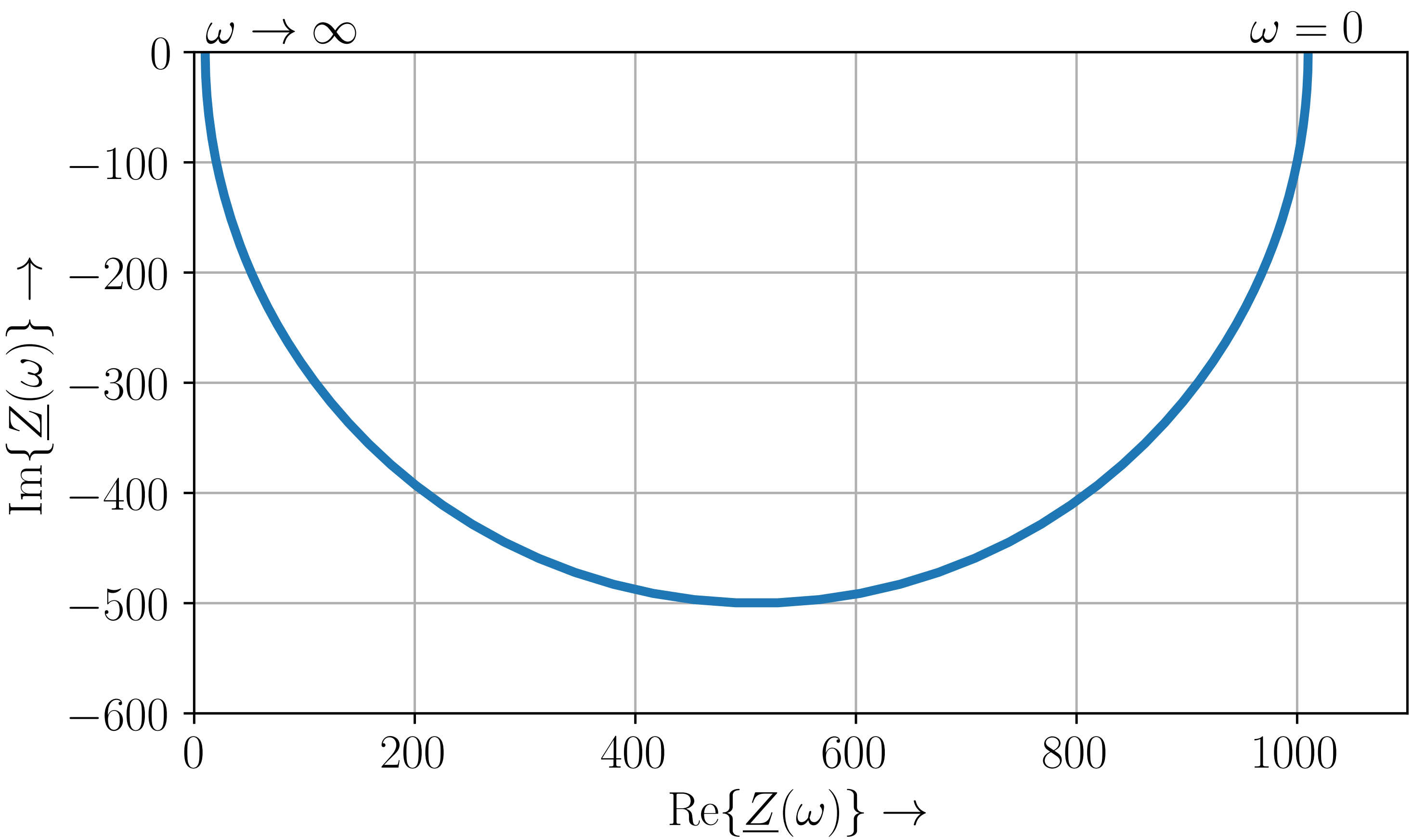
$$\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R_1 + \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \cdot \left(R_2 + \frac{\mathrm{j}\omega L R_3}{\mathrm{j}\omega L + R_3} \right)}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + R_2 + \frac{\mathrm{j}\omega L R_3}{\mathrm{j}\omega L + R_3}} =$$

$$= \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3 - \omega^2 L C R_1 (R_2 + R_3) + \mathrm{j}\omega L (R_1 + R_2 + R_3) + \mathrm{j}\omega C R_1 R_2 R_3}{R_3 - \omega^2 L C (R_2 + R_3) + \mathrm{j}\omega L + \mathrm{j}\omega C R_2 R_3}$$

Beispiel: Frequenzgang der Impedanz eines elektrischen Netzwerkes

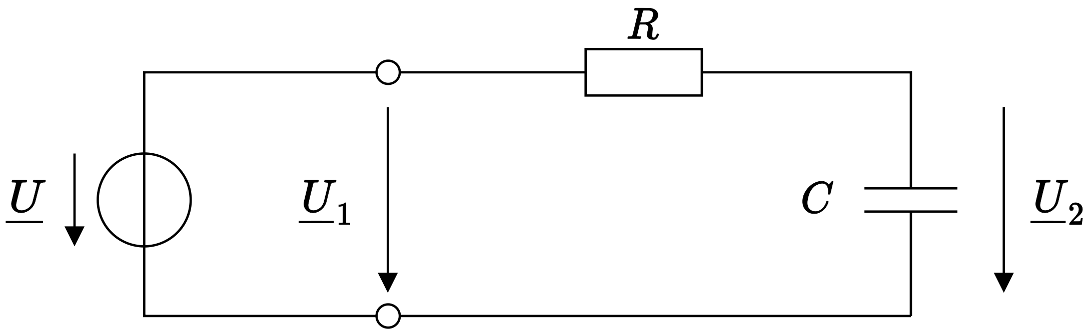


Beispiel: Ortskurve der Impedanz eines elektrischen Netzwerkes



Die Übertragungsfunktion

Gegeben: RC-Glied mit Spannungsquelle



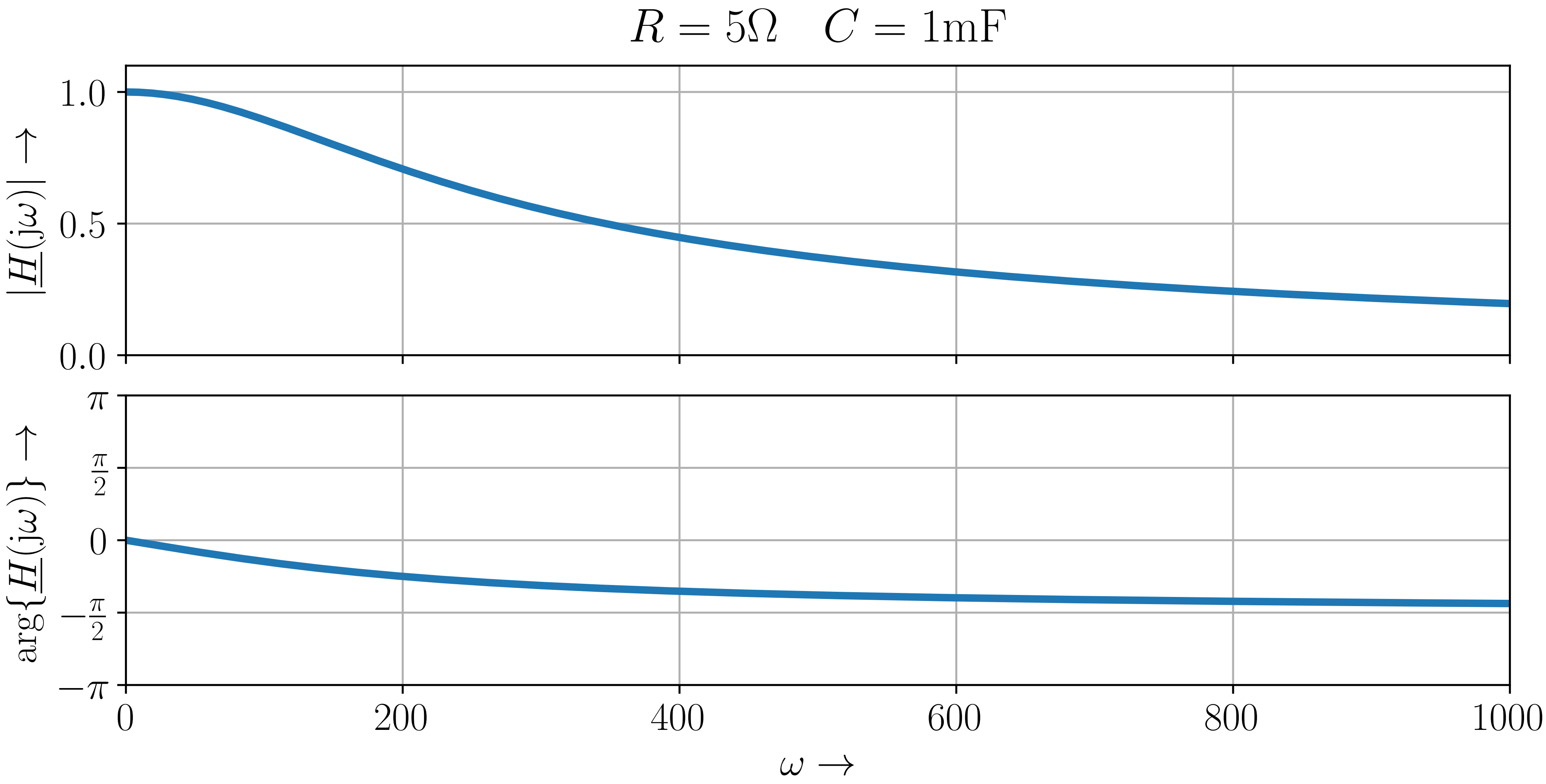
Betrachtung der Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Spannungsquelle

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \underline{U}_1 \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC}$$

Das Verhältnis aus Ausgangs- und Eingangsspannung wird *Übertragungsfunktion* genannt

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC}$$

Frequenzgang der Übertragungsfunktion eines RC Gliedes



Frequenzverhalten eines RC Gliedes

Niedrigen Frequenzen: gute Übertragung (niedrige Dämpfung)

Hohe Frequenzen: geringe Übertragung (hohe Dämpfung)

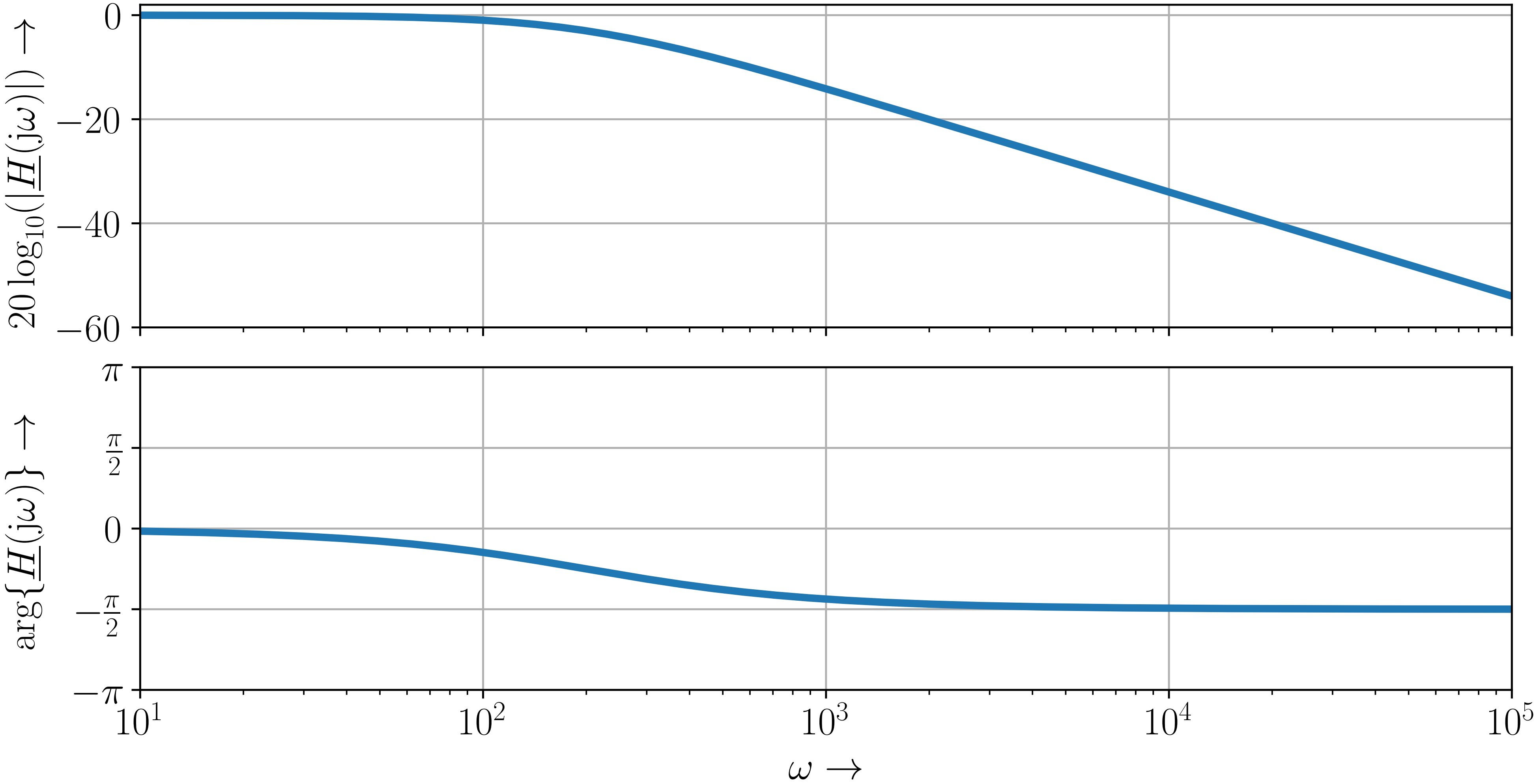
> *Deswegen wird diese RC-Schaltung auch Tiefpass genannt bzw. die Übertragungsfunktion zeigt Tiefpass Verhalten*

Die Darstellung des Frequenzganges der Übertragungsfunktion bei vielen Anwendungsfällen unübersichtlich.

Darstellung im *Bode-Diagramm*

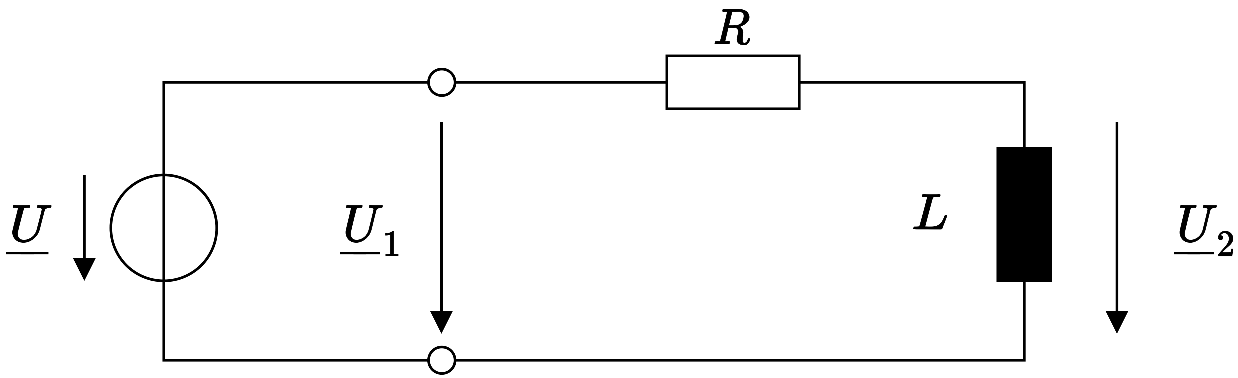
- Abszisse (Frequenz-Achse) im logarithmischen Maßstab (Darstellung eines weiten Frequenzbereiches möglich)
- Betrachung des Betragsfrequenzganges als Verhältnis der Leistungen, d.h. $|H(\mathrm{j}\omega)|^2$.
- Darstellung des Betragsfrequenzganges in *Dezibel*, d.h. $10\log_{10}(|H(\mathrm{j}\omega)|^2) = 20\log_{10}(|H(\mathrm{j}\omega)|)$.

RC-Tiefpass im Bode-Diagramm



RL-Glied als Hochpass

Gegeben: RL-Glied mit Spannungsquelle



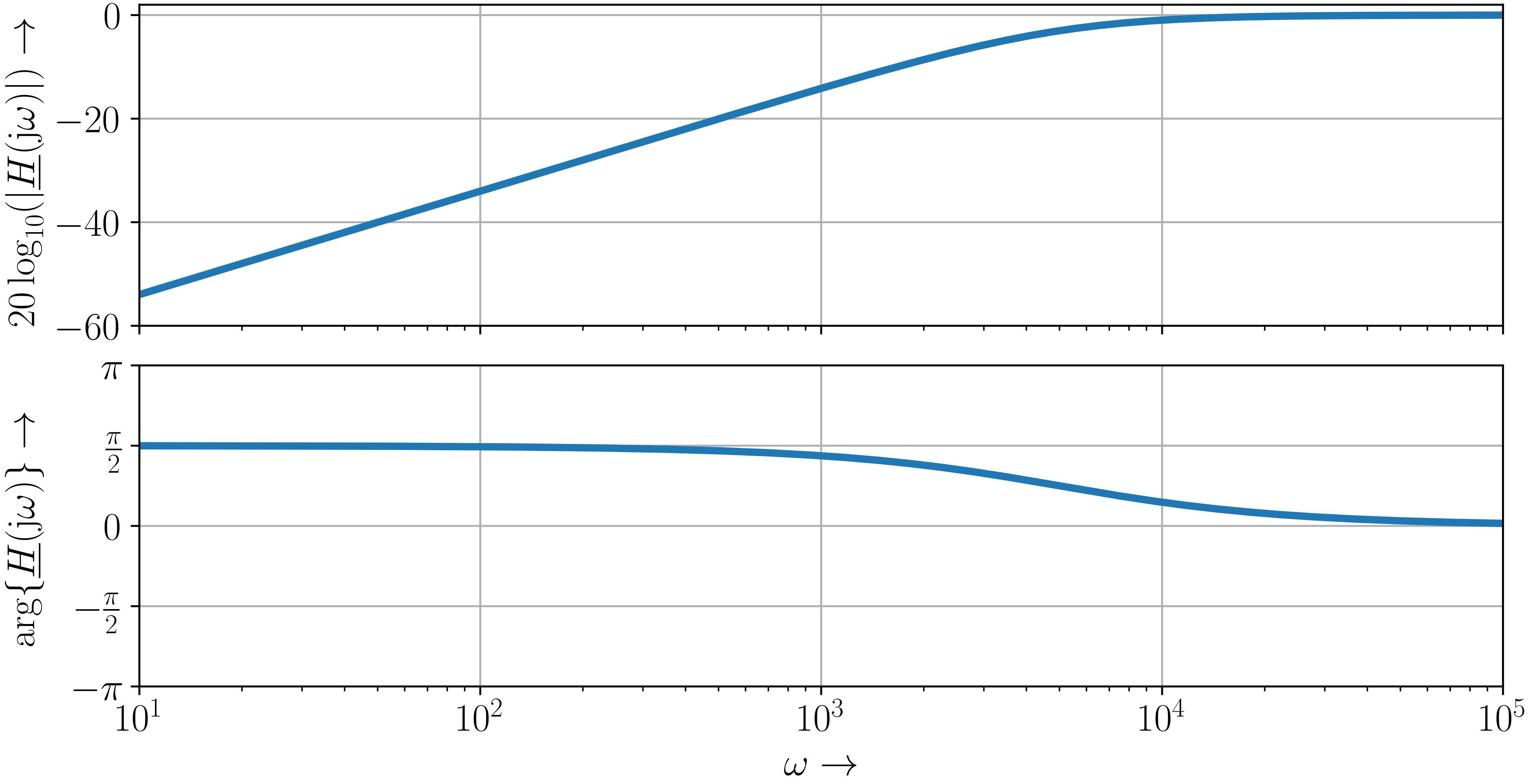
Spannungsteiler

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L}$$

Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\mathrm{j}\omega L}{1 + \mathrm{j}\omega L}$$

RL-Hochpass im Bode-Diagramm



Referenzen

[1] A. Stenger R. Rabenstein B. Girod, *Signals and Systems*, John Wiley & Sons, Ltd.

[2] G. Hagmann, *Grundlagen der Elektrotechnik*, Aula Verlag.

[3] R. Unbehauen, *Grundlagen der Elektrotechnik 1*, Springer Verlag.

