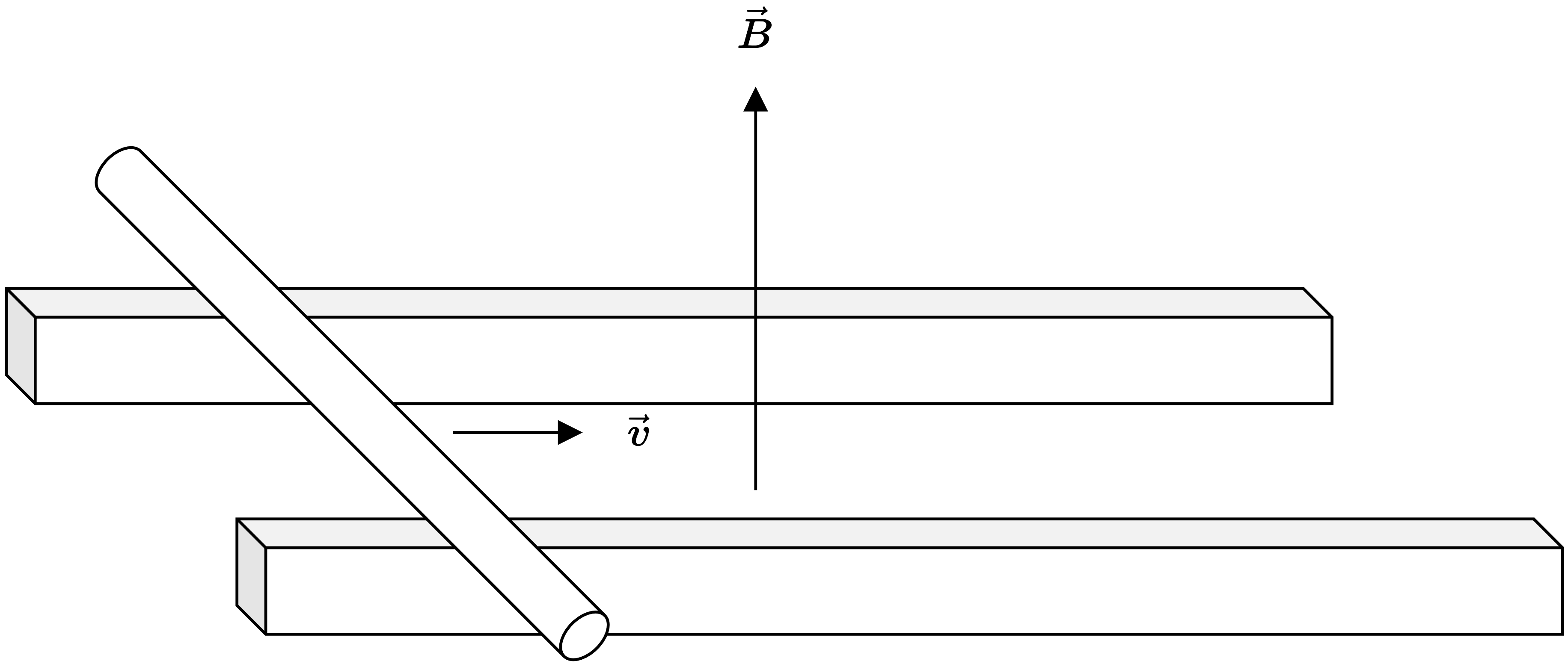
Die Elektromagnetische Induktion

Bewegungs- und Ruheinduktion

Bewegung eines Leiters im Magnetfeld

- Leiter bewegt sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ auf zwei Schienen
- Gesamte Anordnung durchsetzt mit Magnetfeld der konstanten Flussdichte $\vec{B}$



Berechnung der induzierten Spannung an den Leiterenden

Bewegung des Leiters bewirkt eine *magnetische* Kraft auf Ladungsträger

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Verschiebung der Ladungsträger bewirkt *elektrische* Kraft

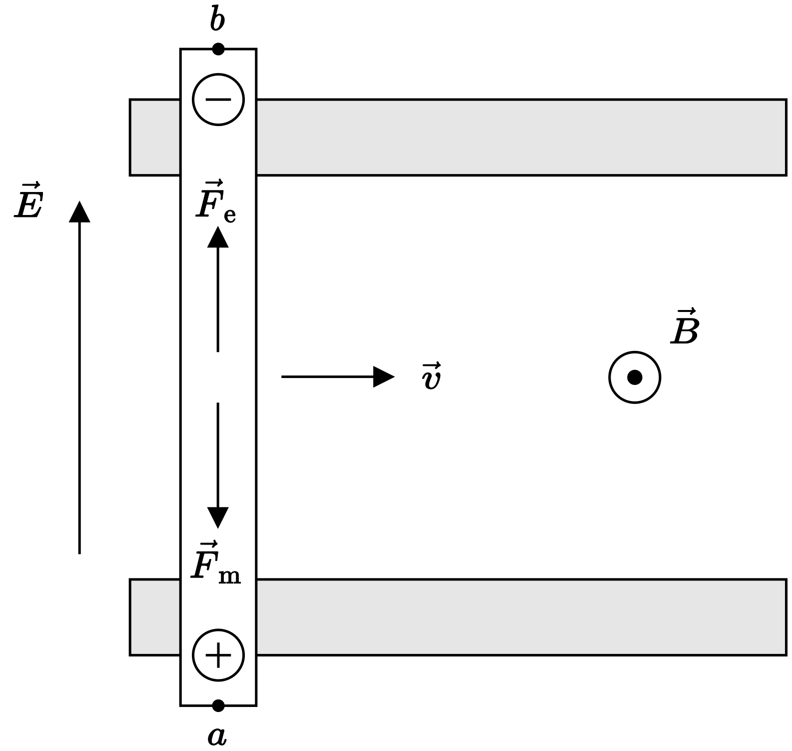
$$\vec{F}_{\mathrm{e}} = Q \cdot \vec{E}$$

Im Gleichgewicht gilt: $\vec{F}_{\mathrm{e}} = -\vec{F}_{\mathrm{m}}$

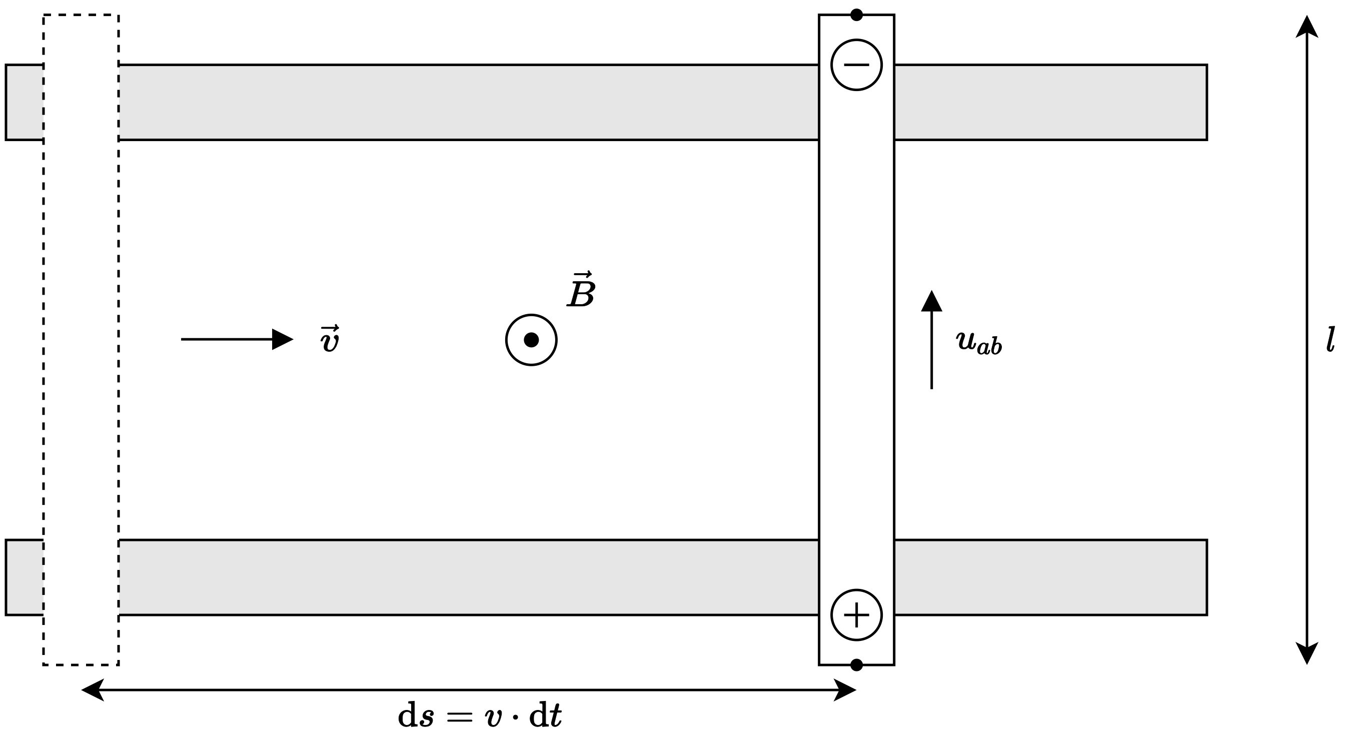
$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

Induzierte Spannung zwischen den Punkten a und b

$$u_{ab} = \int\limits_a^b \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} = -l \cdot v \cdot B$$



Bewegungsinduktion



Induzierte Spannung

$$u_{ab} = -l \cdot v \cdot B = -l \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot B = -\frac{l \cdot \mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot B = -\frac{\mathrm{d}A \cdot B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

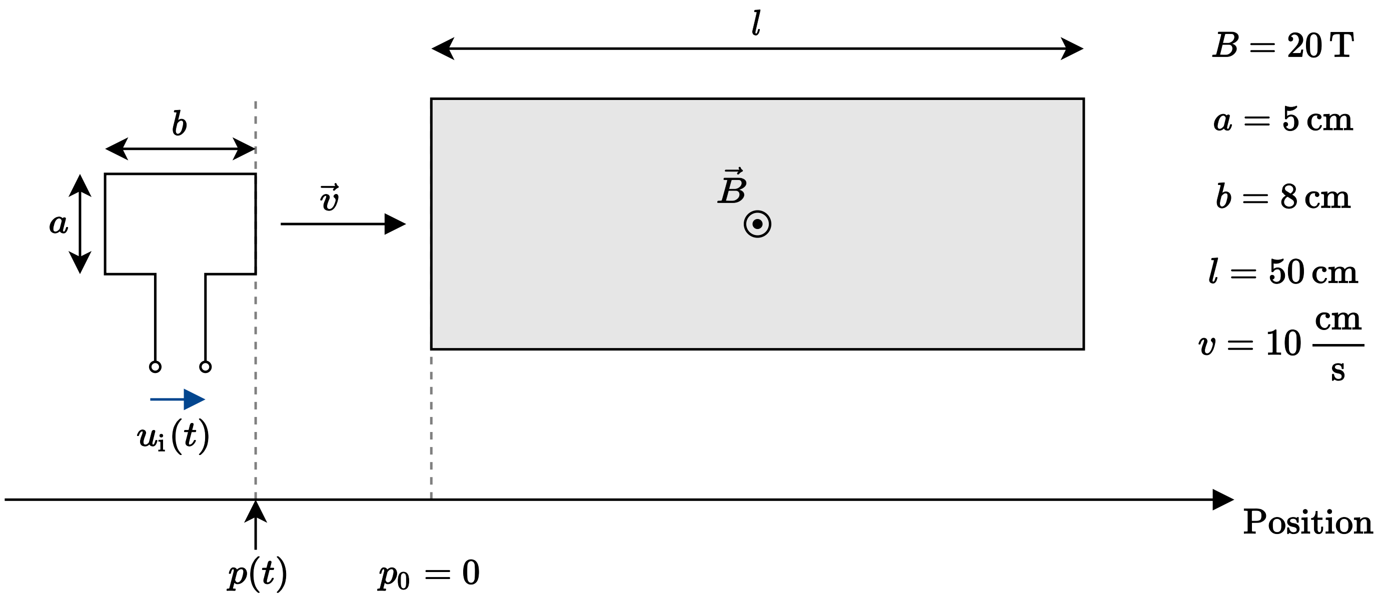
Beispiel: Lineare Bewegung einer Leiterschleife im Magnetfeld I

Eine Leiterschleife bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ über ein Magnetfeld mit Flussdichte $\vec{B}$

Gesucht: Zeitliche Verlauf der induzierten Spannung $u_\mathrm{i}(t)$.

Position der rechten Kante der Leiterschleife $p(t) = v \cdot t$

Zeitpunkt des Eintretens der Leiterschleife in Magnetfeld: $t_0 = \frac{p_0}{v} = 0\,\mathrm{s}$



$B = 20\,\mathrm{T}$

$a = 5\,\mathrm{cm}$

$b = 8\,\mathrm{cm}$

$l = 50\,\mathrm{cm}$

$v = 10\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$

Beispiel: Lineare Bewegung einer Leiterschleife im Magnetfeld II

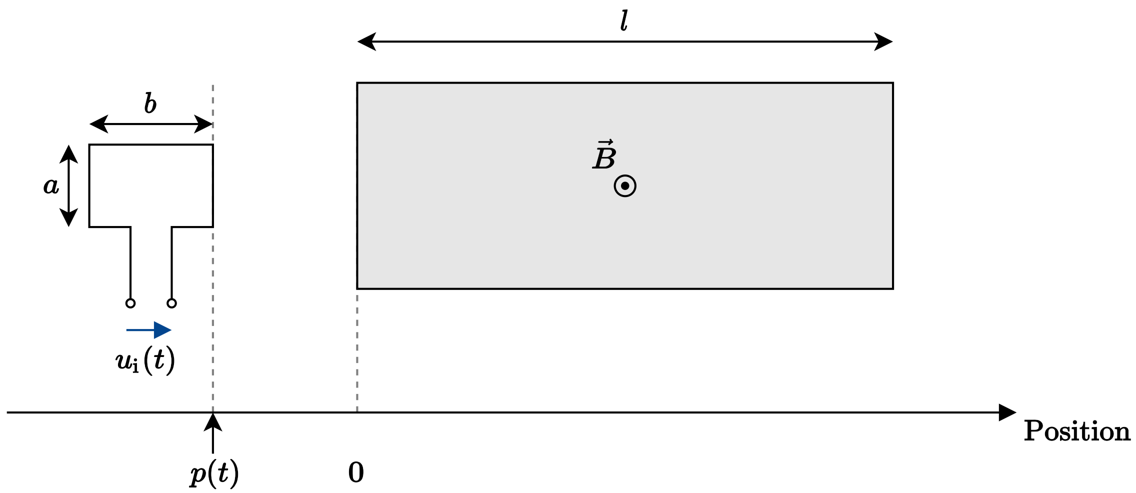
Leiterschleife befindet sich außerhalb des Magnetfeldes:

$$p(t) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad t < 0\,\mathrm{s}$$

Damit ergibt sich für den magnetischen Fluss und die induzierte Spannung

$$\Phi(t) = B \cdot A(t) = B \cdot 0 = 0$$

$$u_\mathrm{i}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = 0$$



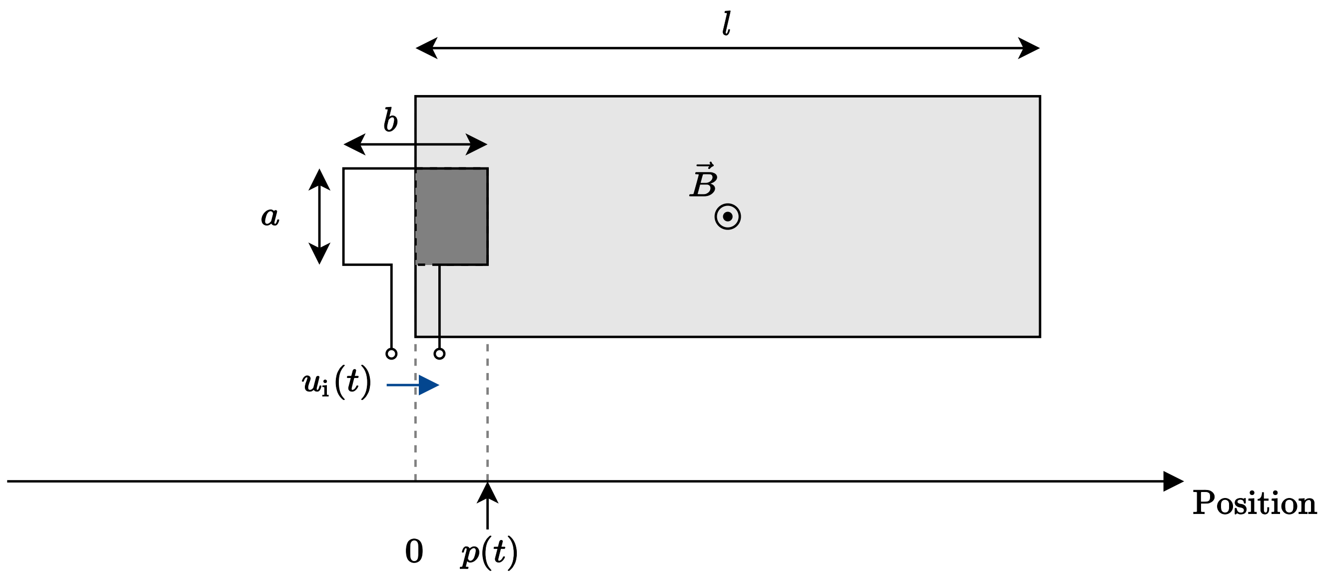
Beispiel: Lineare Bewegung einer Leiterschleife im Magnetfeld III

Leiterschleife tritt in das Magnetfeld ein:

$$0 < p(t) < b \qquad \Rightarrow \qquad 0 < t < b/v = 0{,}8\,\mathrm{s}$$

$$\Phi(t) = B \cdot A(t) = B \cdot a \cdot \Delta b = B \cdot a \cdot p(t) = B \cdot a \cdot v \cdot t$$

$$u_\mathrm{i}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = -B \cdot a \cdot v = -100\mathrm{mV}$$



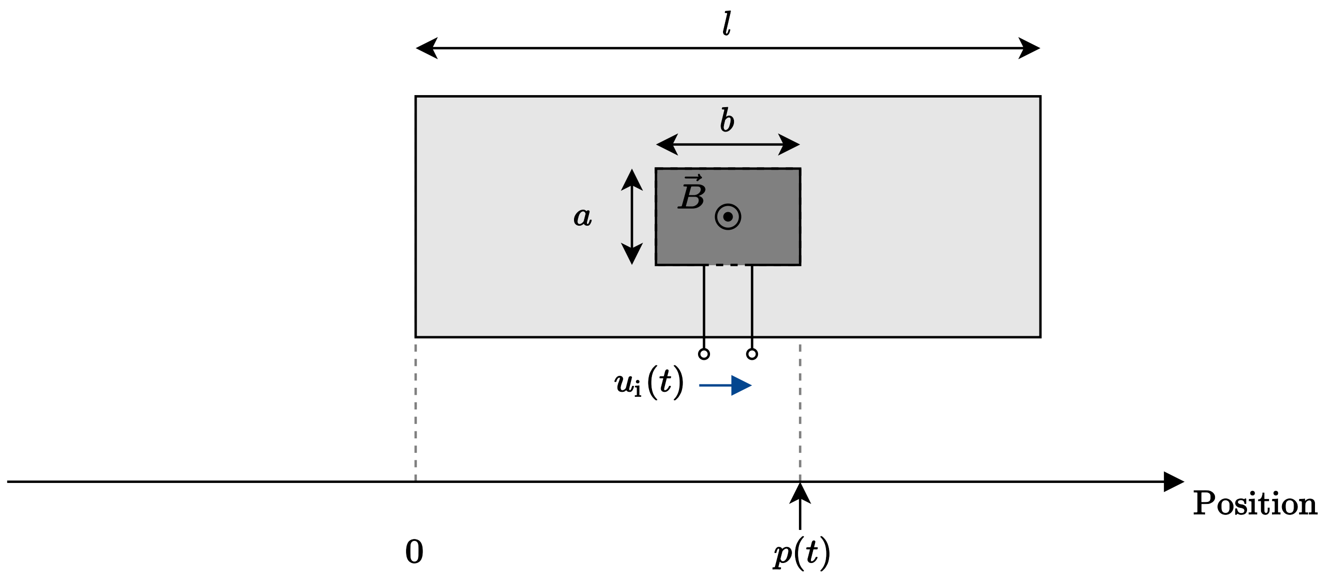
Beispiel: Lineare Bewegung einer Leiterschleife im Magnetfeld IV

Leiterschleife befindet sich innerhalb des Magnetfeldes

$$b < p(t) < l \qquad \Rightarrow \qquad 0{,}8\,\mathrm{s} < t < l/v = 5{,}0\,\mathrm{s}$$

$$\Phi(t) = B \cdot A(t) = B \cdot a \cdot b$$

$$u_\mathrm{i}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = 0$$



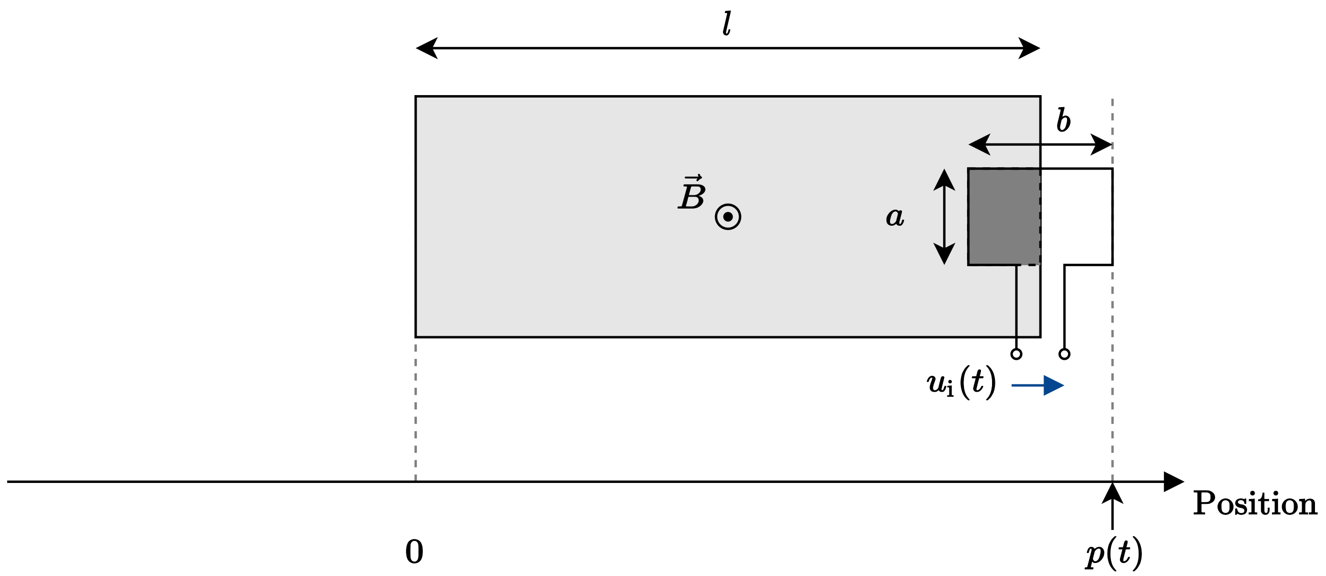
Beispiel: Lineare Bewegung einer Leiterschleife im Magnetfeld V

Leiterschleife tritt aus dem Magnetfeld aus

$$l < p(t) < l + b \qquad \Rightarrow \qquad 5{,}0\,\mathrm{s} < t < (l+b)/v = 5{,}8\,\mathrm{s}$$

$$\Phi(t) = B \cdot A(t) = B \cdot a \cdot (b - (p(t) - l)) = B \cdot a \cdot (b - v \cdot t + l) = B \cdot a \cdot b - B \cdot a \cdot v \cdot t + B \cdot a \cdot l$$

$$u_\mathrm{i}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = B \cdot a \cdot v = 100\mathrm{mV}$$



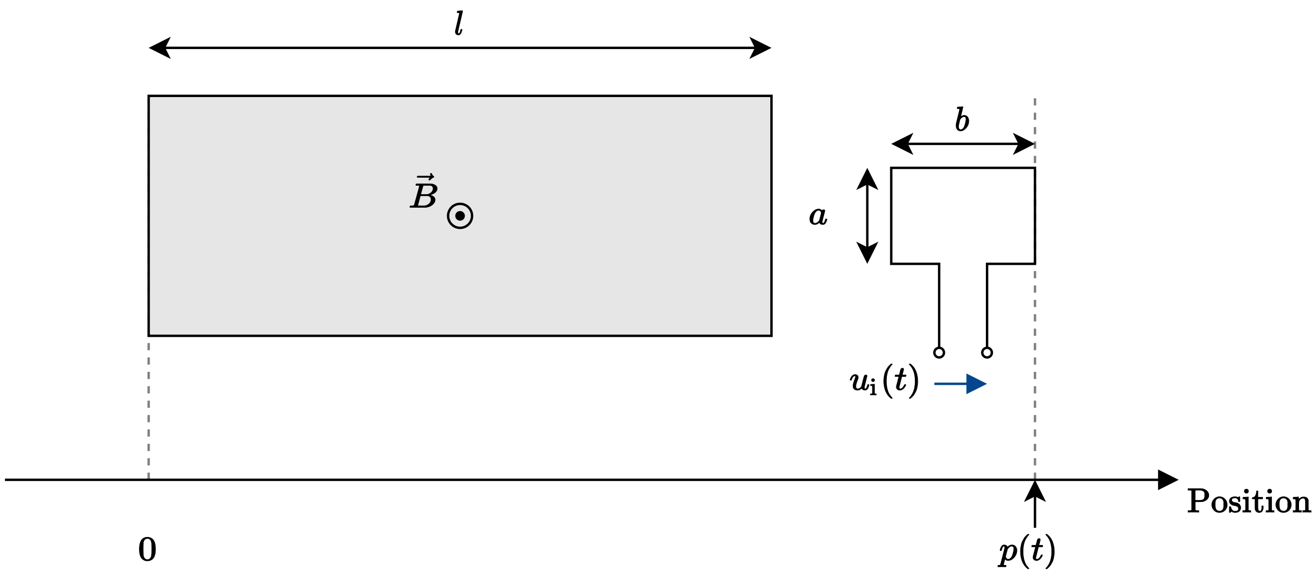
Beispiel: Lineare Bewegung einer Leiterschleife im Magnetfeld VI

Leiterschleife außerhalb des Magnetfeldes:

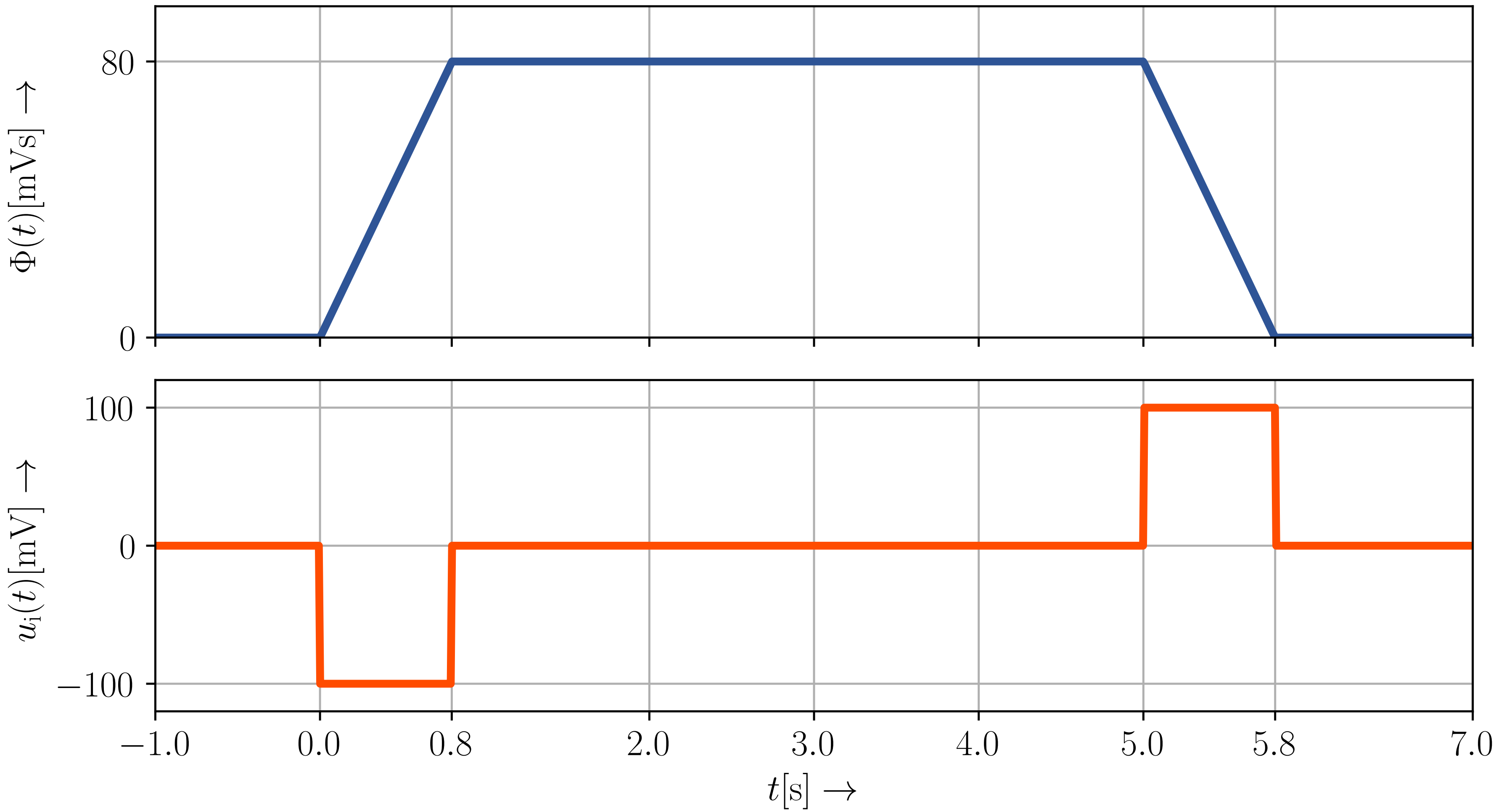
$$p(t) > l + b \qquad \Rightarrow \qquad t > (l+b)/v = 5{,}8\,\mathrm{s}$$

$$\Phi(t) = B \cdot A(t) = B \cdot 0 = 0$$

$$u_\mathrm{i}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = 0$$



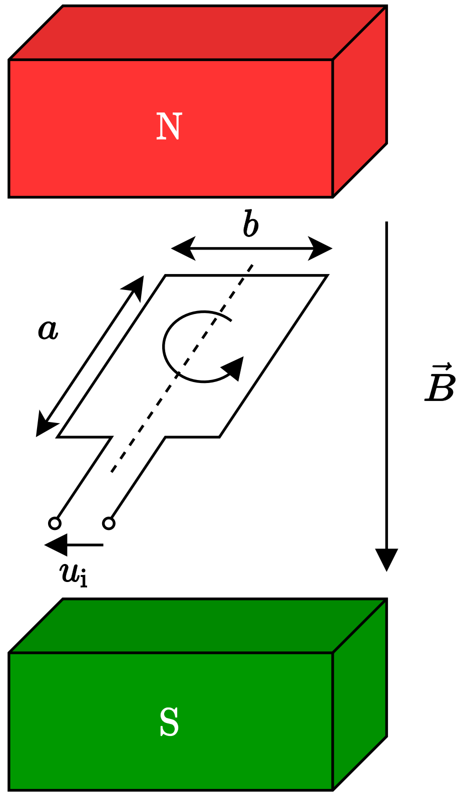
Beispiel: Lineare Bewegung einer Leiterschleife im Magnetfeld VII



Beispiel: Rotierende Spule im Magnetfeld I

Gegeben ist eine Spule mit N Windungen, die sich in einem Magnetfeld der Flussdichte befindet. Die Spule dreht sich um eine Achse und benötigt pro Umdrehung die Zeitdauer T.

$$B = 20\mathrm{T} \quad N = 10 \quad T = 10\mathrm{s} \quad a = 8\mathrm{cm} \quad b = 5\mathrm{cm}$$



Berechnung des zeitlichen Verlaufes der induzierten Spannung u_i:

Winkel $\alpha(t)$ zwischen $\vec{B}$ und $\vec{A}$:

$$\alpha(t) = 2\pi \cdot \frac{t}{T} = \omega t$$

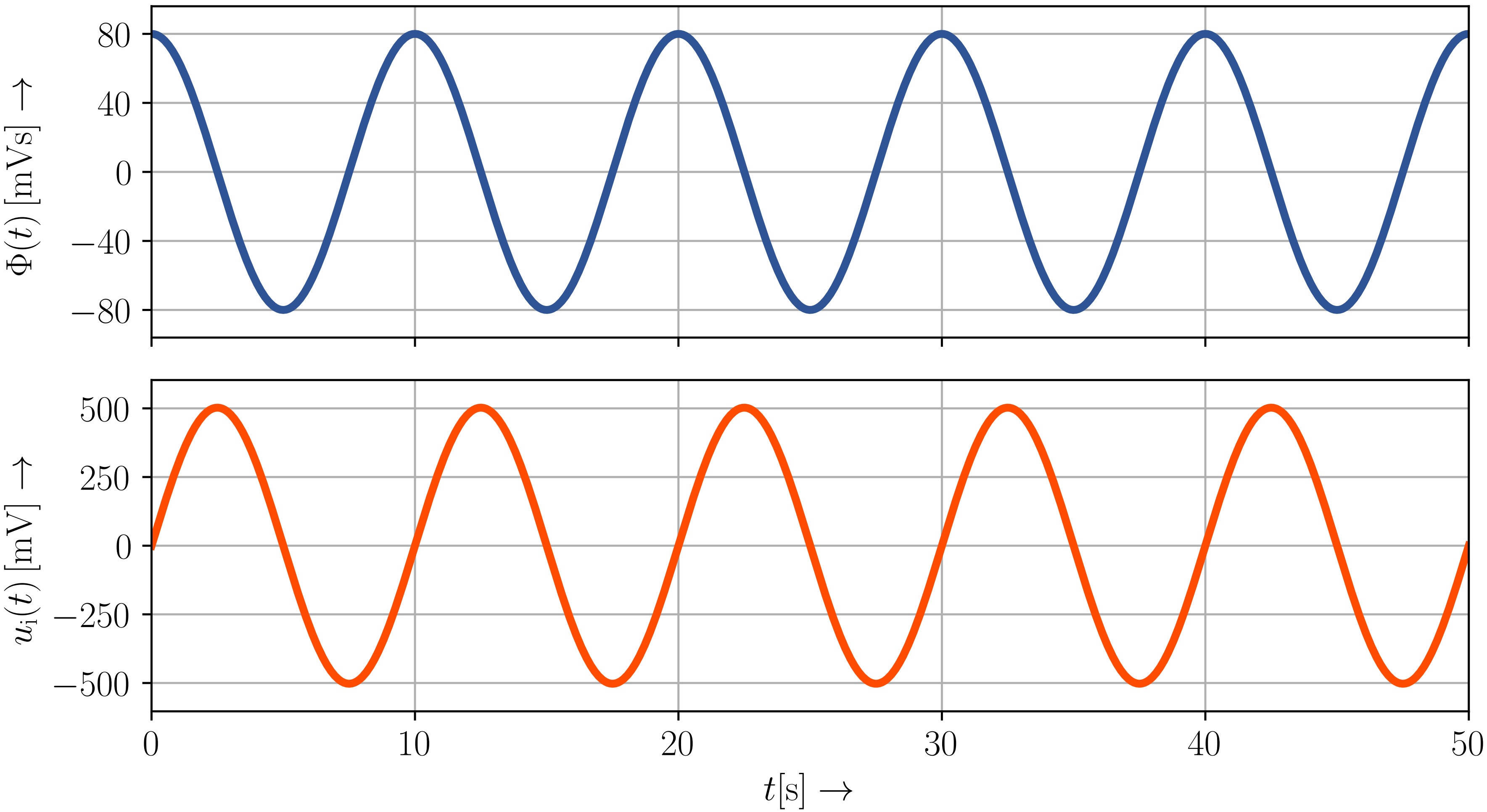
Winkelgeschwindigkeit: $\omega = 2\pi/T$

Magnetischer Fluss und indizierte Spannung:

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{A}(t) = B \cdot A \cdot \cos(\alpha(t)) = B \cdot A \cdot \cos(\omega t)$$

$$u_\mathrm{i}(t) = -N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(t) = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

Beispiel: Rotierende Spule im Magnetfeld II



Ruheinduktion

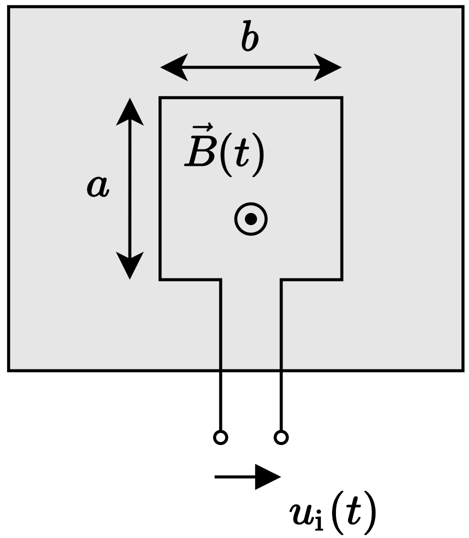
Betrachtung einer unbewegten Leiterschleife in einem zeitlich veränderten Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}$

Auch hier ändert sich der magnetische Fluss durch die Leiterschleife mit der Zeit:

$$\Phi(t) = \vec{B}(t) \cdot \vec{A} = B(t) \cdot A$$

Somit ergibt sich für die induzierte Spannung

$$u_\mathrm{i}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = -A \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t)$$



Allgemeines Induktionsgesetz und Lenz'sche Regel

Allgemeine Formulierung des Induktionsgesetzes

Induzierte Spannung in eine Spule mit N Windungen

$$u_\mathrm{i}(t) = -N \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(t)$$

$\Phi(t)$: Magnetischer Fluss durch die Spule

$\Psi(t)$: Spulenfluss

Aus dem Durchflutungsgesetz folgt die allgemeine Formulierung des Induktionsgesetzes

$$\oint\limits_C \vec{E}(t)\,\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{A(t)} \vec{B}(t)\,\mathrm{d}\vec{A}$$

Für ruhende Medien ergibt sich dann

$$\oint\limits_C \vec{E}(t)\,\mathrm{d}\vec{s} = -\iint\limits_{A} \frac{\mathrm{d}\,\vec{B}(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\vec{A}$$

Bestimmung des Vorzeichens der induzierten Spannung

Gegeben ist eine Leiterschleife (hier: $N = 1$) in der eine Spannung induziert wird

Frage: Welches Vorzeichen besitzt die induzierte Spannung bzw. wie ist der Zählpfeil zu wählen?

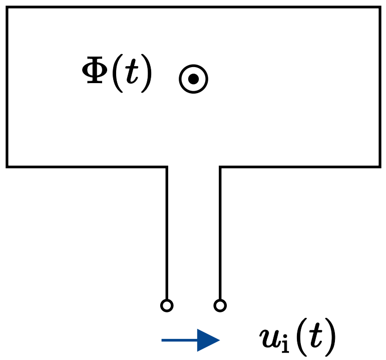
Nach dem Induktionsgesetz gilt

$$u_\mathrm{i}(t) = -N \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = \oint_C \vec{E}(t)\,\mathrm{d}\vec{s}$$

Somit ist Zählrichtung des Flusses Φ und der Integrationsweg C durch *Rechtssystem* verknüpft

Wahl der Zählpfeile von magnetischem Fluss $\Phi(t)$ und induzierter Spannung $u_\mathrm{i}(t)$ nach *Rechter-Hand-Regel*:

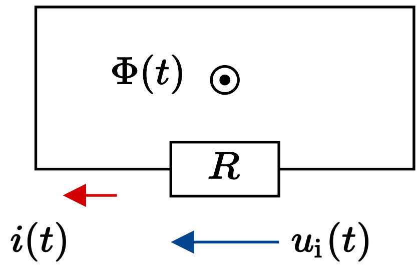
- Bei *positiver* Flussänderung (Erhöhung des magnetischen Flusses): $u_\mathrm{i}(t) < 0$
- Bei *negativer* Flussänderung (Verringerung des magnetischen Flusses): $u_\mathrm{i}(t) > 0$



Lenz'sche Regel

Bisher: Leiterschleife offen, d.h. kein Stromfluss in der Leiterschleife

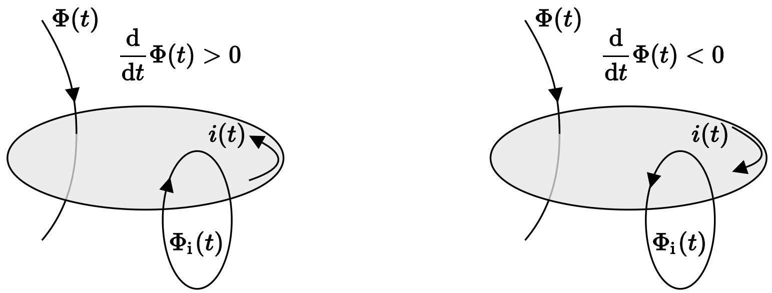
Durch Schließen der Leiterschleife mit Widerstand R ergibt sich ein Stromfluss



$$i(t) = \frac{u_\mathrm{i}(t)}{R}$$

Bestimmung des Vorzeichens des Stromes $i(t)$ nach Lenz'scher Regel

Der von einer induzierten Spannung $u_\mathrm{i}(t)$ hervorgerufene Strom $i(t)$ fließt in einer solchen Richtung, dass er durch seiner Entstehungsursache (Änderung des magnetischen Flusses $\Phi(t)$ der Leiterschleife) entgegenwirkt.



Bestimmung des Vorzeichens der Spannung mit Hilfe der Lenz'schen Regel

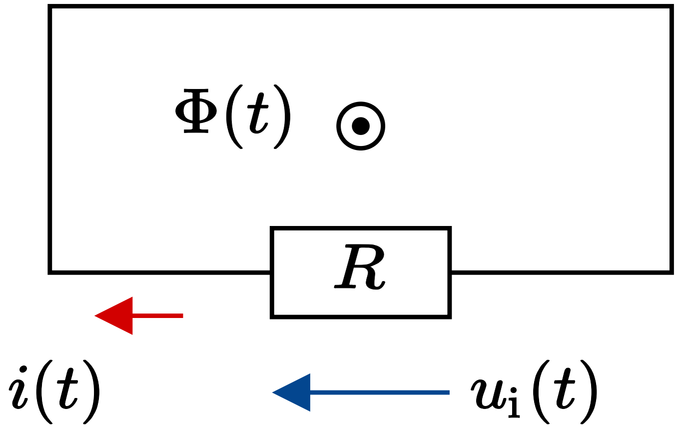
Übliches Vorgehen zur Bestimmung des Vorzeichens der induzierten Spannung $u_\mathrm{i}(t)$:

1. Bestimmung des Betrages der induzierten Spannung

$$|u_\mathrm{i}(t)| = N \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t)$$

2. Bestimmung des Vorzeichens des Stromes $i(t)$ der Leiterschleife mit Hilfe der Lenz'schen Regel

3. Bestimmung des Vorzeichens der induzierten Spannung $u_\mathrm{i}(t)$ anhand Zählpfeilrichtung des Stromes



Anwendungsbeispiele zur Lenz'schen Regel

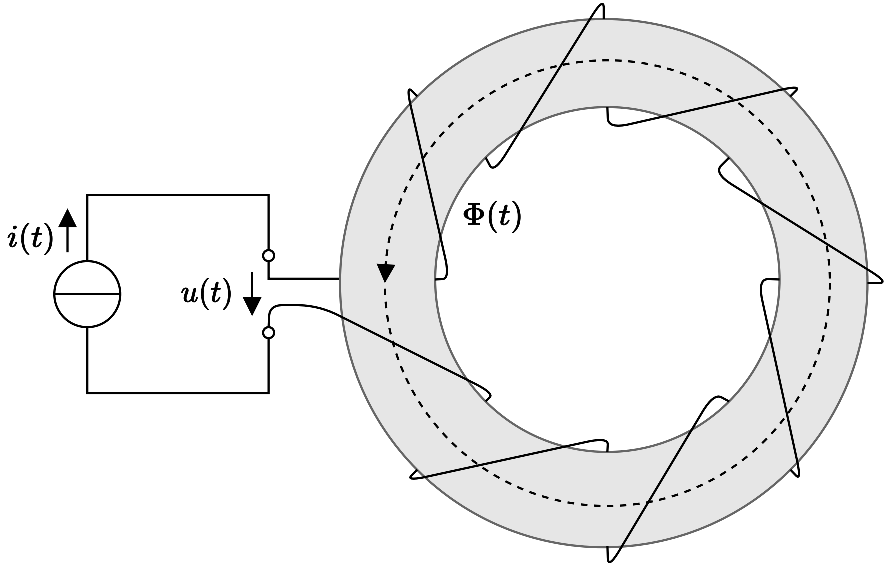
Anwendungen bei denen der Effekt der Lenz'schen Regel ausgenutzt wird

- Wirbelstrombremse
- Magnetspeicher (z.B. Festplatte)

Induktivität

Selbstinduktion

Verbinden einer Spule mit einer Stromquelle $i(t)$



- Strom $i(t)$ verursacht magnetischen Fluss $\Phi(t)$
- Magnetischer Fluss $\Phi(t)$ verursacht *selbstinduzierte* Spannung $u(t)$

$$u(t) = N \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t)$$

Induktivität

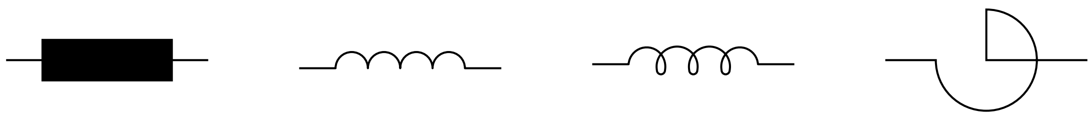
Änderung des magnetischen Flusses ist abhängig von

- Änderung des Stromes $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t)$
- Geometrie der Spule
- Materialeigenschaften des Spulenkernes

Beschreibung dieser Eigenschaften mittels des Wertes L der *Induktivität*

$$\boxed{u(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) \qquad [L] = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = \mathrm{Henry} = \mathrm{H}}$$

Schaltsymbol der Induktivität



Berechnung der Induktivität

Aus dem Induktionsgesetz und der Definition der Induktivität folgt

$$u(t) = N \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)$$

Daraus ergibt sich für die Induktivität

$$L = N \cdot \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i}$$

Unter der Annahme eines homogenen Magnetfeldes innerhalb der Spule folgt aus dem Durchflutungsgesetz

$$\Theta = N \cdot i = \oint \vec{H}\mathrm{d}\vec{s} = H \cdot l = \frac{B}{\mu} \cdot l = \Phi \cdot \frac{l}{\mu A} \qquad \Rightarrow \qquad \Phi = i \cdot \frac{N\mu A}{l}$$

Damit ergibt sich für die Induktivität

$$L = N^2\frac{\mu A}{l}$$

Bei ferromagnetischen Spulenkernen ist die Permeabilität abhängig vom Stromfluss (vgl. Hysteresekurve).

Magnetischer Widerstand

Definition des Ohm'schen Widerstandes

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Analog zu dieser Definition lässt sich der *magnetische Widerstand* angeben

$$R_{\mathrm{m}} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{A}$$

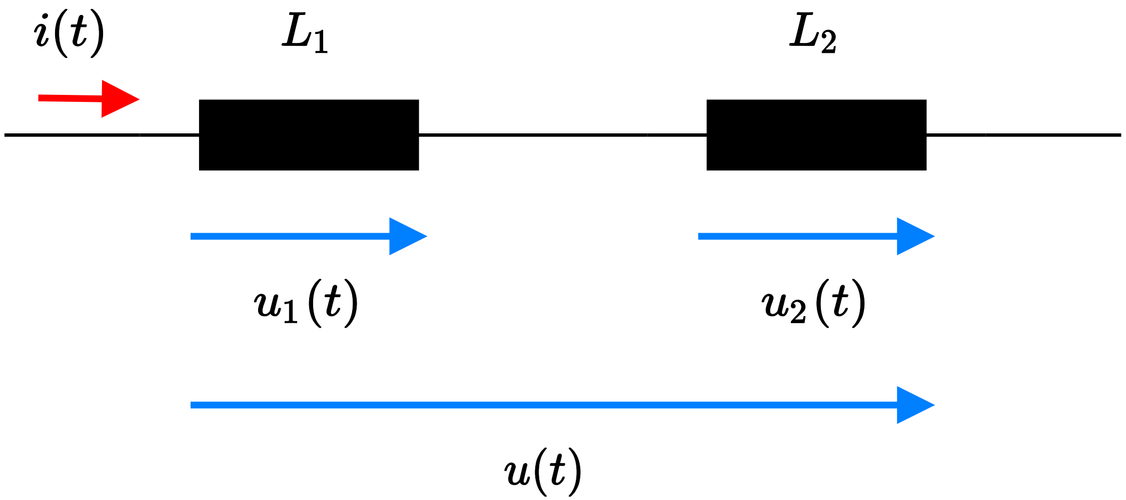
Oder auch der *magnetische Leitwert*

$$\Lambda = \frac{1}{R_{\mathrm{m}}} = \mu \cdot \frac{A}{l}$$

Damit ergibt sich für die Induktivität

$$L = N^2 \cdot \Lambda = \frac{N^2}{R_{\mathrm{m}}}$$

Serienschaltung von Induktivitäten



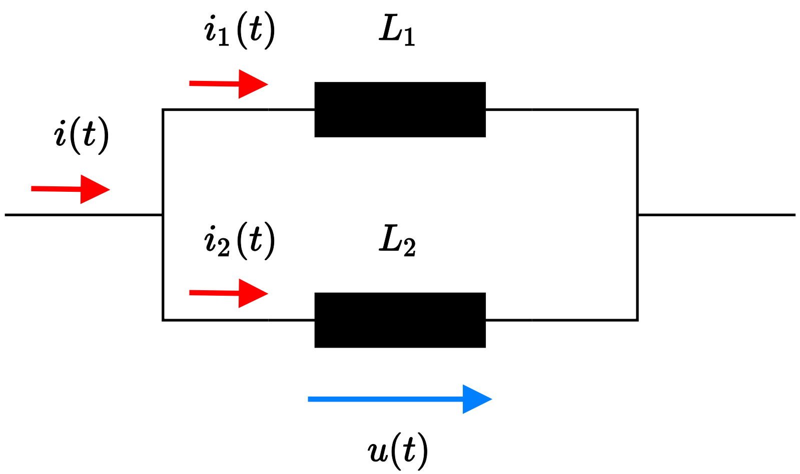
Gesamtspannung über beide Induktivitäten:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = L_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(i) + L_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) = (L_1 + L_2) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) = L_{\mathrm{gesamt}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t)$$

Serienschaltung von Induktivitäten: Gesammtinduktivität entspricht Summe der Einzelinduktivitäten

$$L_{\mathrm{gesamt}} = \sum_i L_i$$

Parallelschaltung von Induktivitäten I



Spannung jeweils über beiden Induktivitäten:

$$u(t) = L_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_1(t) = L_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_2(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_1(t) = \frac{u(t)}{L_1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_2(t) = \frac{u(t)}{L_2}$$

Betrachtung der gesamten Induktivität

$$u(t) = L_{\text{gesamt}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) = L_{\text{gesamt}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_1(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_2(t) \right) = L_{\text{gesamt}} \left(\frac{u(t)}{L_1} + \frac{u(t)}{L_2} \right)$$

Parallelschaltung von Induktivitäten II

$$\frac{u(t)}{L_{\text{gesamt}}} = \frac{u(t)}{L_1} + \frac{u(t)}{L_2}$$

$$\frac{1}{L_{\text{gesamt}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

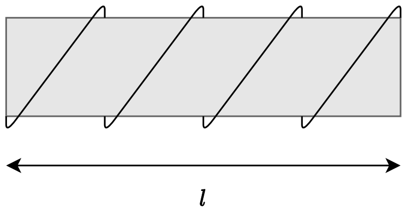
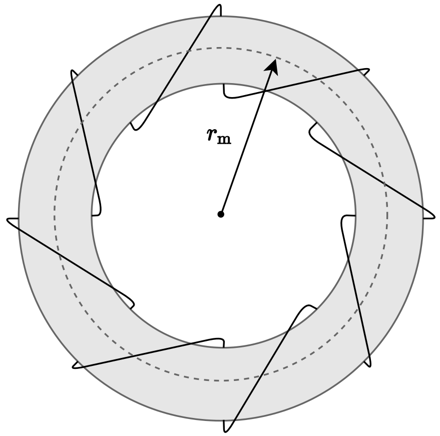
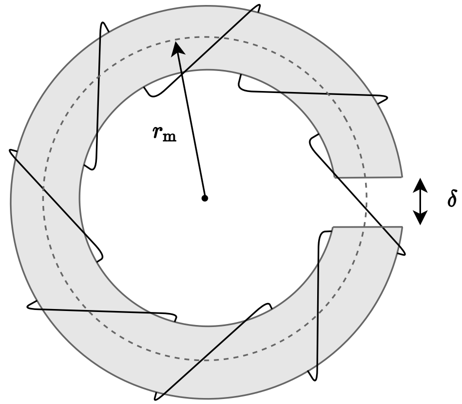
$$L_{\text{gesamt}} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)^{-1} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Parallelschaltung von Induktivitäten:

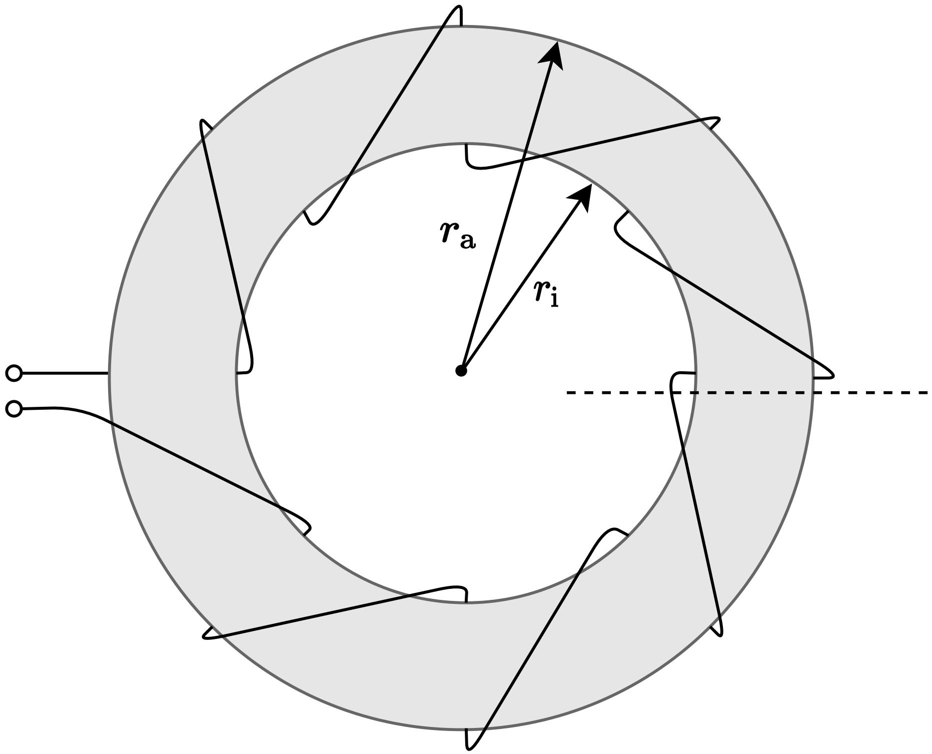
Kehrwert der Gesammtinduktivität entspricht Summe der Kehrwerte der Einzelinduktivitäten

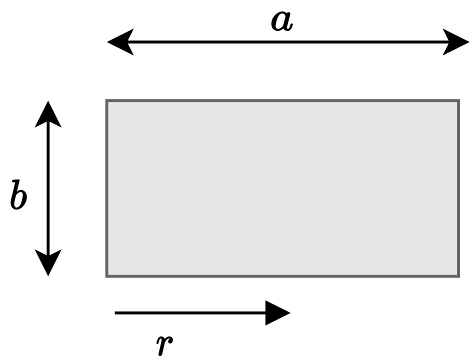
$$\frac{1}{L_{\text{gesamt}}} = \sum_i \frac{1}{L_i}$$

Induktivität für verschiedene Spulenarten

	Langgestreckte Spule	Ringspule (Toroidspule)	Ringspule mit Luftspalt
			
R_m	$\frac{1}{\mu_0\mu_\mathrm{r}} \cdot \frac{l}{A}$	$\frac{1}{\mu_0\mu_\mathrm{r}} \cdot \frac{l_\mathrm{m}}{A} = \frac{1}{\mu_0\mu_\mathrm{r}} \cdot \frac{2\pi \cdot r_\mathrm{m}}{A}$	$\frac{2\pi \cdot r_\mathrm{m} - \delta}{\mu_0\mu_\mathrm{r}A} + \frac{\delta}{\mu_0 A}$
L	$\mu_0\mu_\mathrm{r}N^2\frac{A}{l}$	$\mu_0\mu_\mathrm{r}N^2\frac{A}{l_\mathrm{m}} = \mu_0\mu_\mathrm{r}N^2\frac{A}{2\pi \cdot r_\mathrm{m}}$	$\mu_0 N^2\frac{A}{2\pi \cdot r_\mathrm{m}/\mu_\mathrm{r} + \delta}$

Induktivität einer rechteckigen Toroidspule I





Aus dem Durchflutungsgesetz ($\Theta = \oint \vec{H} \mathrm{d}\vec{s}$) ergibt sich

$$H(r) = \frac{\Theta}{2\pi r} \qquad B(r) = \mu \frac{\Theta}{2\pi r}$$

Induktivität einer rechteckigen Toroidspule II

Damit ergibt sich für den magnetischen Fluss

$$\Phi = \iint\limits_A \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = \mu\frac{\Theta}{2\pi}\cdot b \cdot \int\limits_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{a}} \frac{1}{r}\mathrm{d}r = \mu\frac{\Theta}{2\pi}\cdot b\cdot [\ln(r)]_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{a}} = \mu\frac{\Theta}{2\pi}\cdot b\cdot \ln\left(\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{i}}\right)$$

Somit ist die Induktivität einer rechteckigen Toroidspule

$$L = \frac{\mu}{2\pi}N^2 b \ln\left(\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{i}}\right)$$

Für $a \ll r_\mathrm{i}$ folgt:

$$L \approx \mu N^2 \frac{ab}{\pi(r_\mathrm{i}+r_\mathrm{a})}$$

Gekoppelte Induktivitäten

Gegeben sind zwei Spulen (Windungen N_1 und N_2) mit jeweiligem Stromfluss $i_1(t)$ und $i_2(t)$.

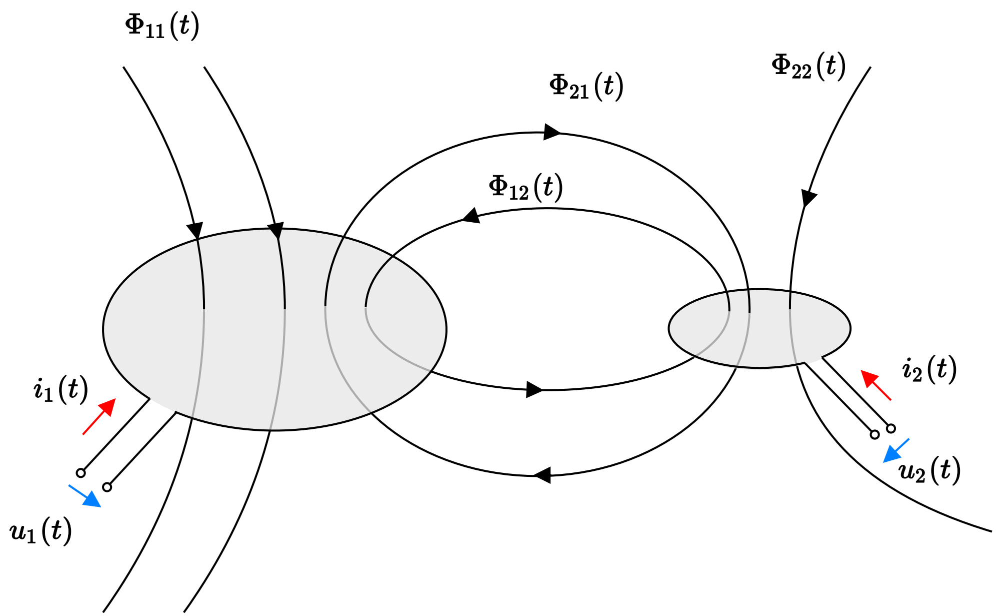
Induzierte Spannung der erste Leiterschleife ergibt sich aus Fluss der

1. Leiterschleife $\Phi_{11}(t)$ (Selbstinduktion)
2. Leiterschleife $\Phi_{12}(t)$ (Gegeninduktion)

$$u_1(t) = N_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{11}(t) + N_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{12}(t)$$

Geleiches gilt analog für die zweite Leiterschleife

$$u_2(t) = N_2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{22}(t) + N_2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{21}(t)$$



Gegeninduktivität I

Resultierende Flüsse $\Phi_{11}(t)$ und $\Phi_{21}(t)$ proportional zu $i_1(t)$

$$\Phi_{11} \sim i_1(t) \qquad \Phi_{21}(t) \sim i_1(t)$$

Resultierende Flüsse $\Phi_{22}(t)$ und $\Phi_{12}(t)$ proportional zu $i_2(t)$

$$\Phi_{22} \sim i_1(t) \qquad \Phi_{12}(t) \sim i_2(t)$$

Als jeweiliger Proportionalitätsfaktor ergibt sich die jeweilige Induktivität

$$\begin{aligned} N_1 \cdot \Phi_{11}(t) &= L_{11} \cdot i_1(t) & \qquad N_1 \cdot \Phi_{12}(t) &= L_{12} \cdot i_2(t) \\ N_2 \cdot \Phi_{21}(t) &= L_{21} \cdot i_1(t) & \qquad N_2 \cdot \Phi_{22}(t) &= L_{22} \cdot i_2(t) \end{aligned}$$

Gegeninduktivität II

Berechnung der jeweiligen Spannungen aus dem Induktionsgesetz

$$u_1(t) = L_{11} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_1(t) + L_{12} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_2(t)$$

$$u_2(t) = L_{21} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_1(t) + L_{22} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_2(t)$$

Selbstinduktivitäten L_{11} und L_{22} stets größer Null

$$L_{11} > 0 \qquad L_{22} > 0$$

Gegeninduktivität

$$L_{12} = L_{21} = M$$

Vorzeichen der Gegeninduktivität M ist abhängig vom gegenseitigen Wicklungssinn und kann negativ werden.

Koppelkoeffizient

Definition des *Koppelkoeffizienten* k

$$M = k\sqrt{L_{11} \cdot L_{22}} \qquad -1 \leq k \leq +1$$

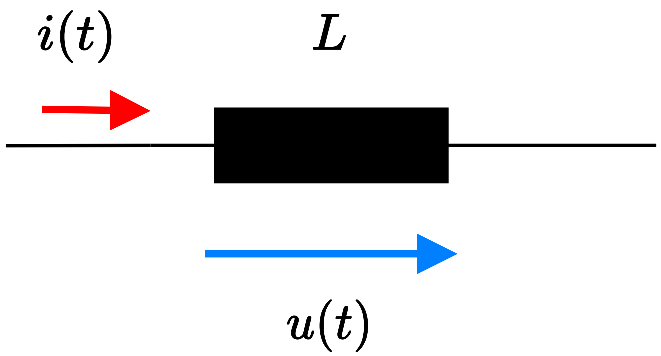
Ideale Kopplung der Spulen für

$$|k| \to 1$$

Keine bzw. geringe Kopplung der Spulen für

$$|k| \approx 0$$

Magnetische Energie der Induktivität



Zu Beginn der Beobachtung im Zeitpunkt $t = 0$ ist keine Energie gespeichert $W(t = 0) = 0$, womit kein Strom durch die Induktivität fließt $i(t = 0) = 0$.

Gespeicherte magnetische Energie einer Induktivität im Zeitpunkt t

$$W(t) = \int_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t u(\tau) \cdot i(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t i(\tau) \cdot L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}\tau} \cdot \mathrm{d}\tau =$$

$$= L\int_{i(0)}^{i(t)} i\mathrm{d}i = L \cdot \left[\frac{i^2}{2}\right]_0^{i(t)} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t)$$

Energie des magnetischen Feldes

Annahme: Homogenes Feld innerhalb einer Spule

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} N^2 \frac{\mu A}{l} I^2 = \frac{1}{2} H^2 \mu \cdot A \cdot l = \frac{1}{2} HBV$$

mit Volumen $V = A \cdot l$

Häufig wird auch die Energiedichte $w = \mathrm{d}W / \mathrm{d}V$ betrachtet

$$w = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B}$$

Damit lässt sich die magnetische Energie auch allgemein berechnen

$$W = \iiint\limits_V w \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \vec{H} \vec{B} \, \mathrm{d}V$$

Referenzen

[1] G. Hagmann, *Grundlagen der Elektrotechnik,* Aula Verlag.

[2] D. Metz, U. Naundorf, J. Schlabbach, *Kleine Formelsammlung Elektrotechnik,* Fachbuchverlag Leipzig.

[3] R. Pregla, *Grundlagen der Elektrotechnik,* Hüthig Verlag.