

Das magnetische Feld

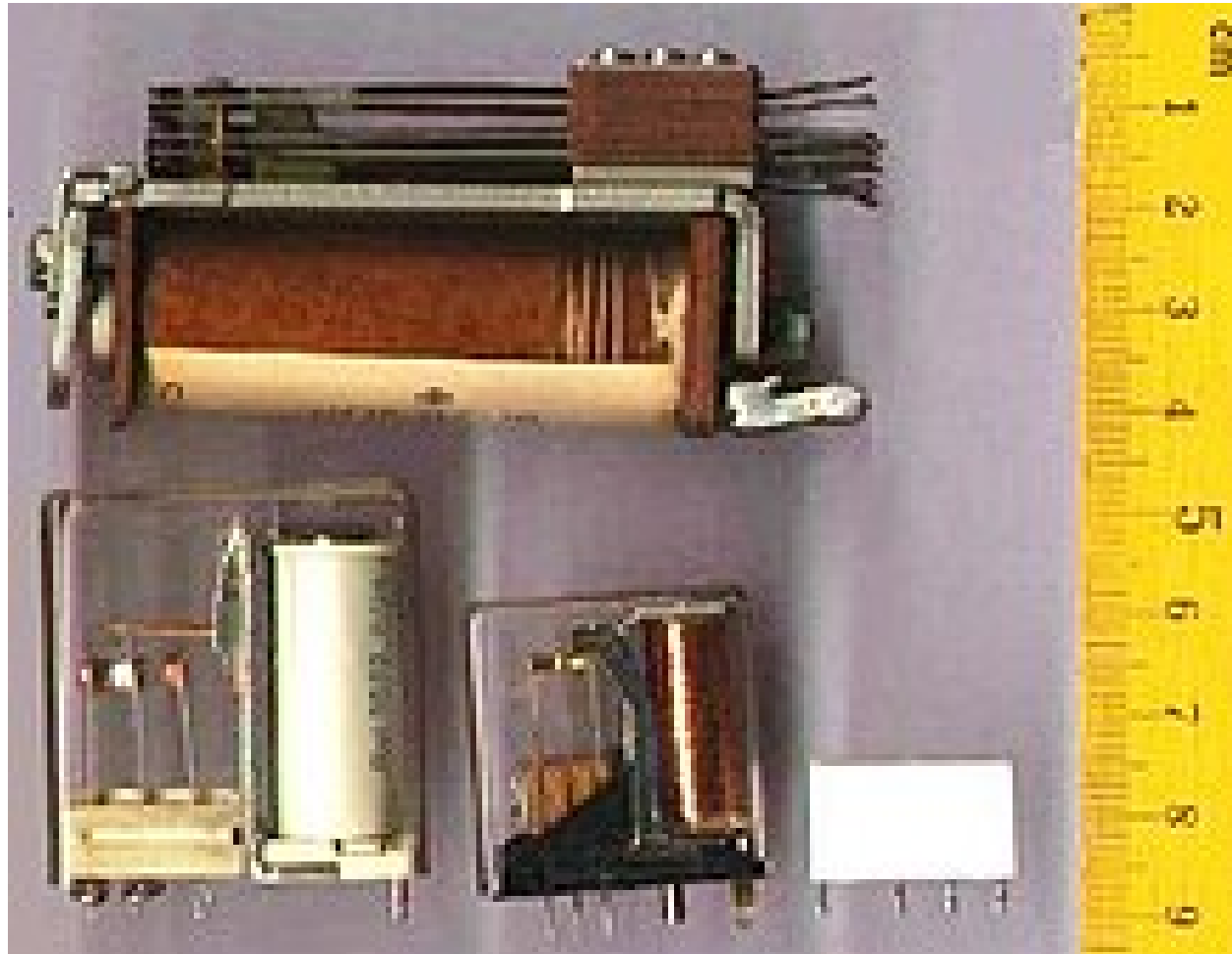
Anwendungsbeispiele

Induktives Laden eines Mobiltelefones



Quelle: <http://de.wikipedia.org>

Magnetschalter



Quelle: <http://de.wikipedia.org>

Wirbelstrombremse



Quelle: <http://de.wikipedia.org>

Transformator



Quelle: <http://de.wikipedia.org>

Magnetresonanztomographie



Quelle: <http://de.wikipedia.org>

Elektromotor



Quelle: <http://de.wikipedia.org>

Generator



Quelle: <http://de.wikipedia.org>

Induktionsherd

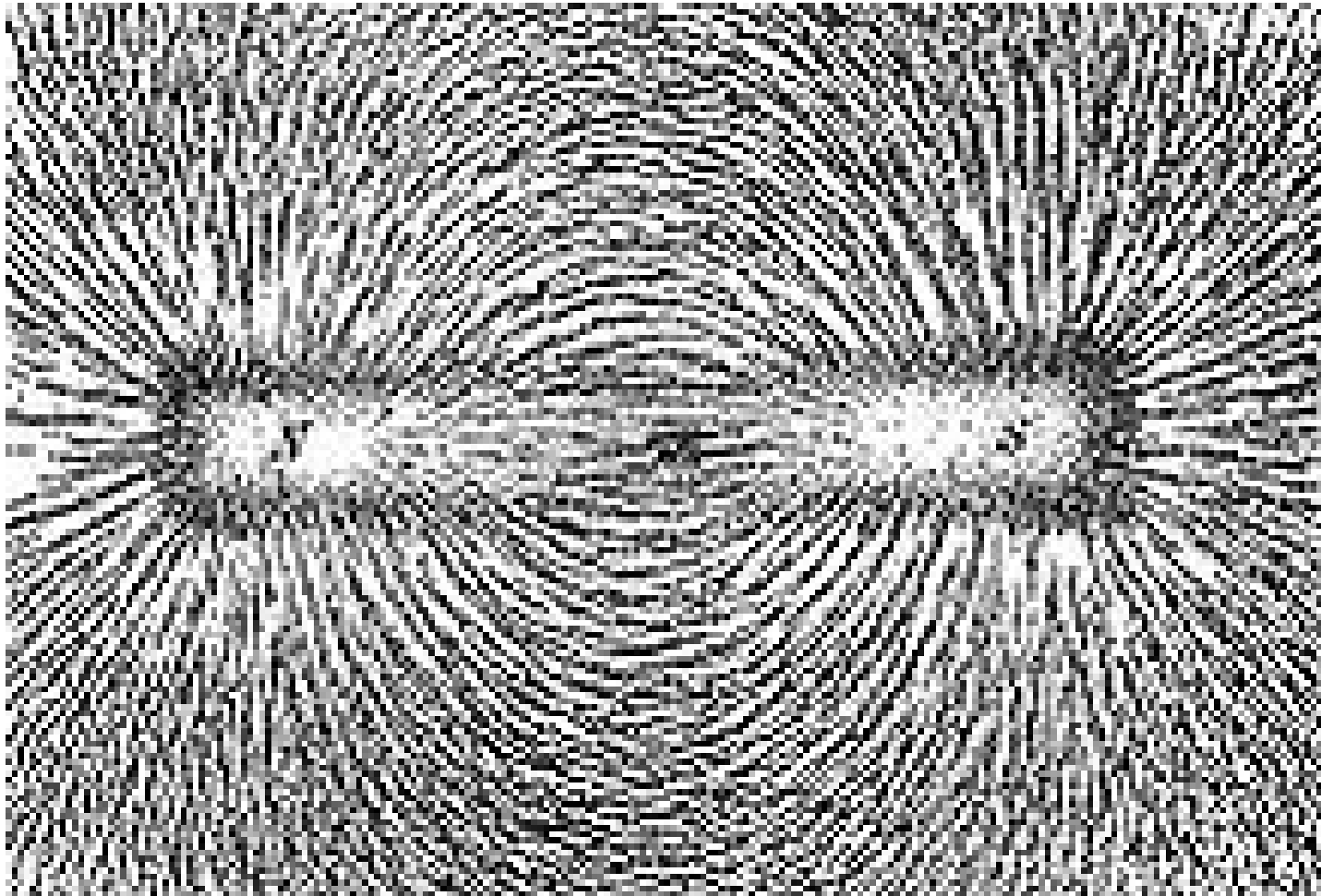


Anwendungsbeispiele

- Induktives Laden eines Mobiltelefones
- Magnetschalter
- Sensorik
- Wirbelstrombremse
- Transformator (Übertrager)
- Magnetresonanztomographie
- Elektromotor
- Generator
- Induktionsherd
- etc.

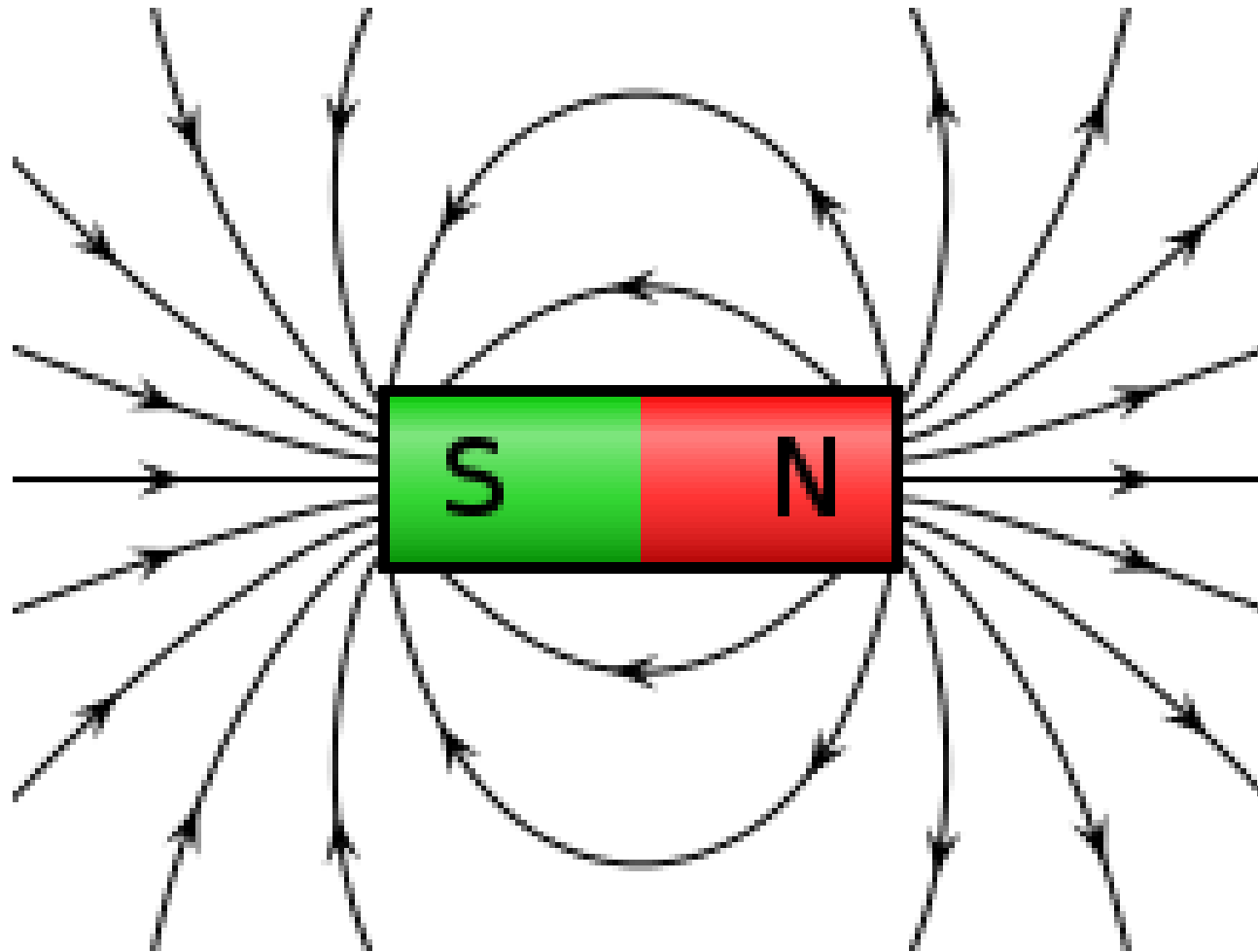
Feldlinien

Ausrichtung von Eisenspänen an einem Permanentmagnet



Quelle: <http://de.wikipedia.org>

Feldlinien eines Permanentmagneten

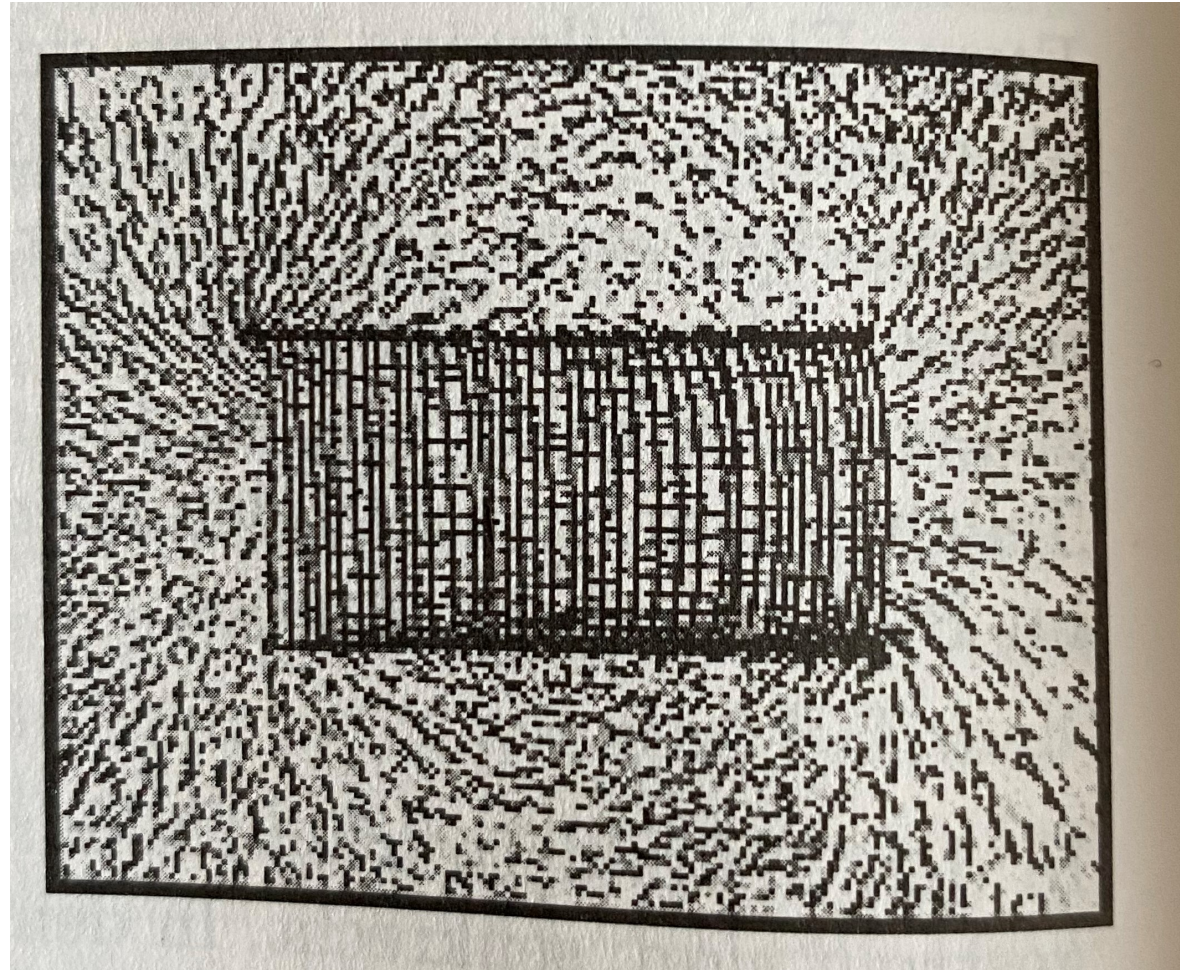


Quelle: <http://de.wikipedia.org>

Eigenschaften des magnetischen Feldes

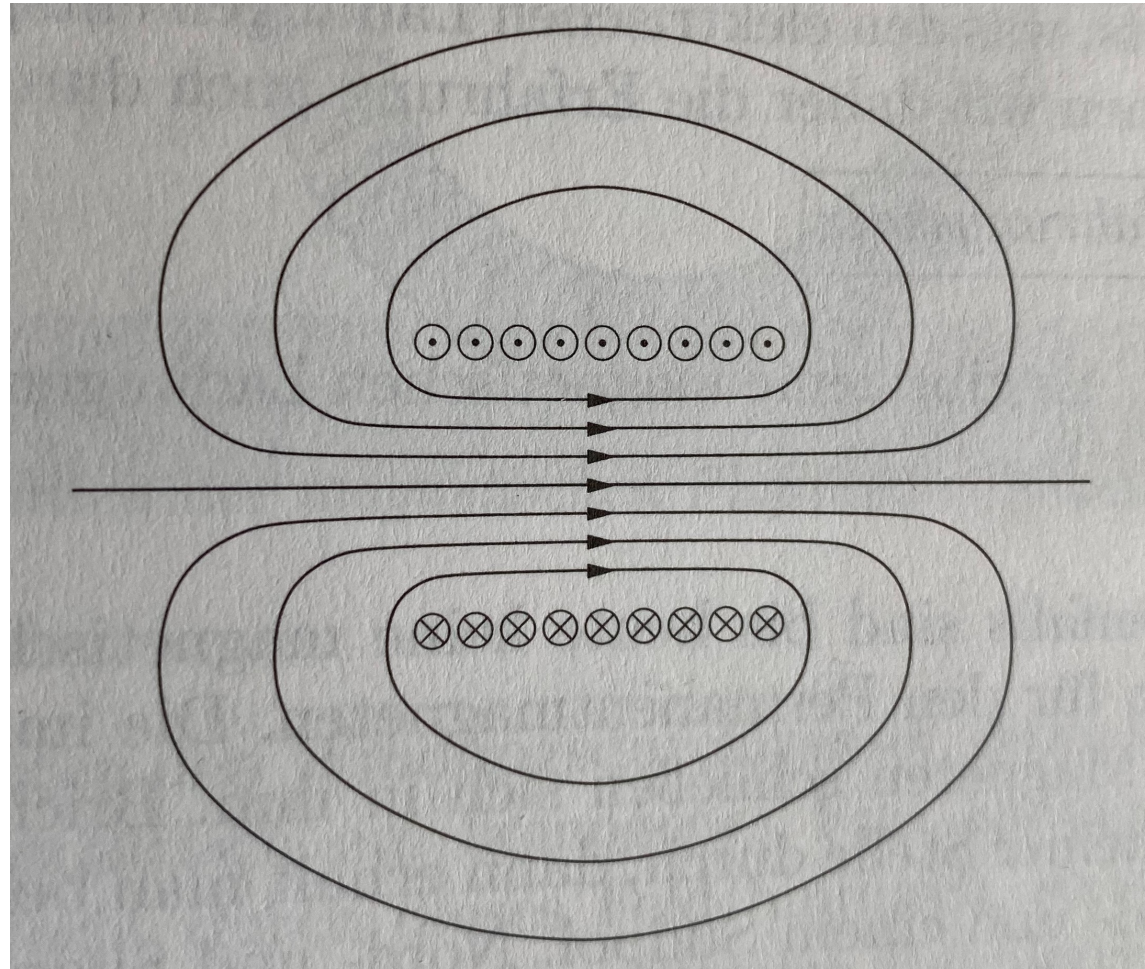
- Dipol-Charakter (Nord- und Südpol)
- Feldlinien zeigen von Nord nach Süd
- Gleiche Pole stoßen sich ab - ungleiche Pole ziehen sich an
- Feldlinien sind in sich geschlossen
- Magnetisches Feld ist *quellenfrei*

Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule



Quelle: Pregla, Grundlagen der Elektrotechnik

Magnetische Feldlinien einer stromdurchflossenen Spule

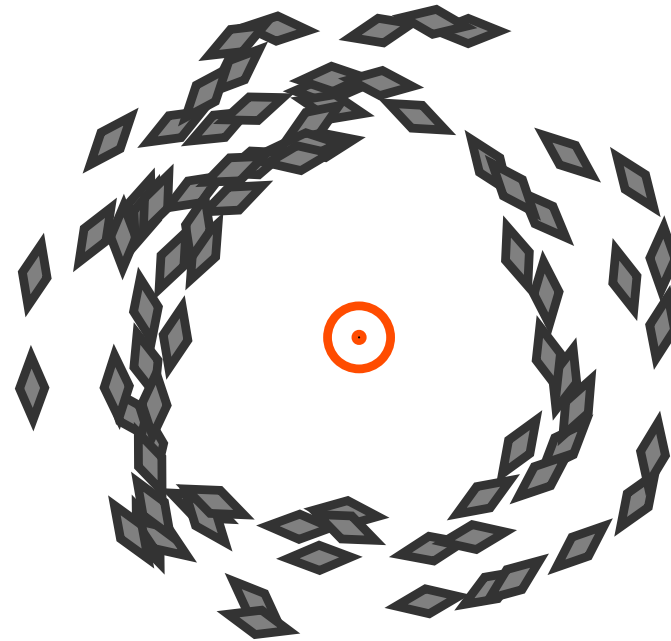


Quelle: Pregla, Grundlagen der Elektrotechnik

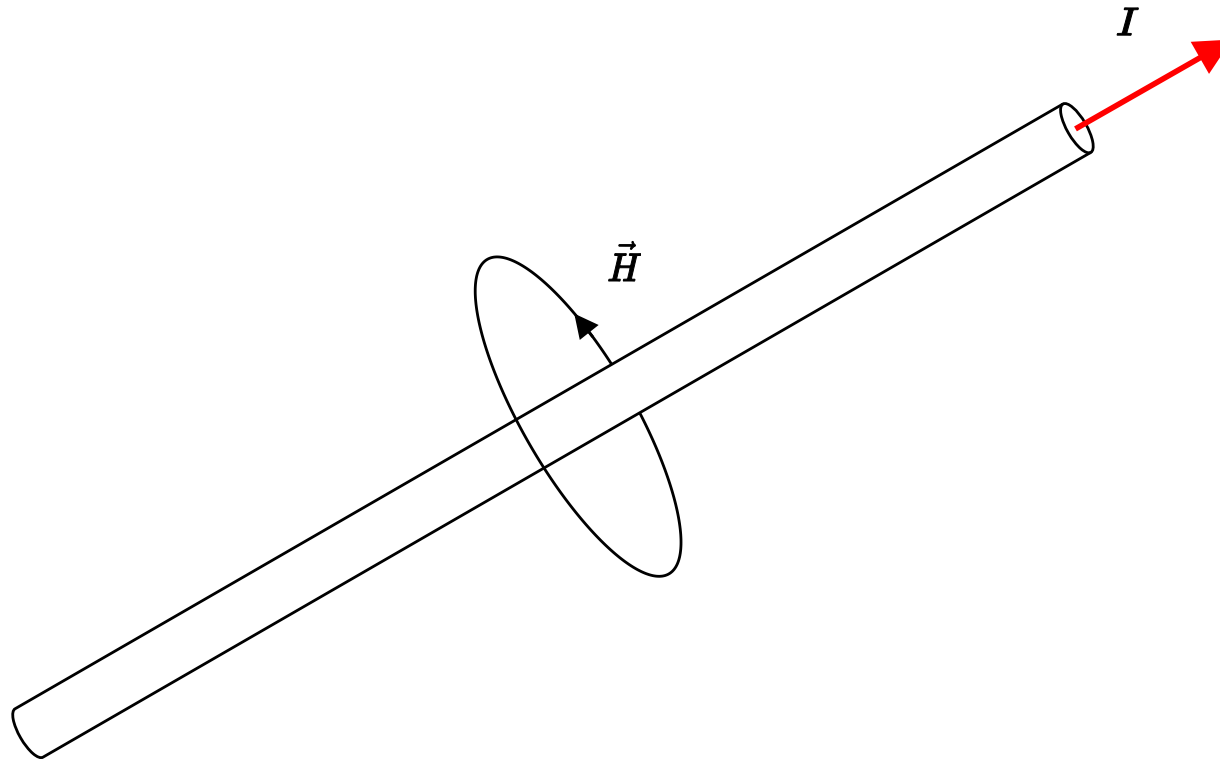
Stromdurchflussener Leiter

Ausrichtung von Eisenspänen um einen langen Stromdurchflossenen Leiter

$$I = 1 \text{ A}$$



Magnetische Feld eines langen stromdurchflossenen Leiters



Rechte-Hand-Regel für die magnetische Feldstärke

- Der Daumen zeigt in die Richtung der technischen Stromrichtung
- Die Finger geben die Richtung der magnetischen Feldlinien an



Magnetische Feld eines unendlich-langen Linienleiters

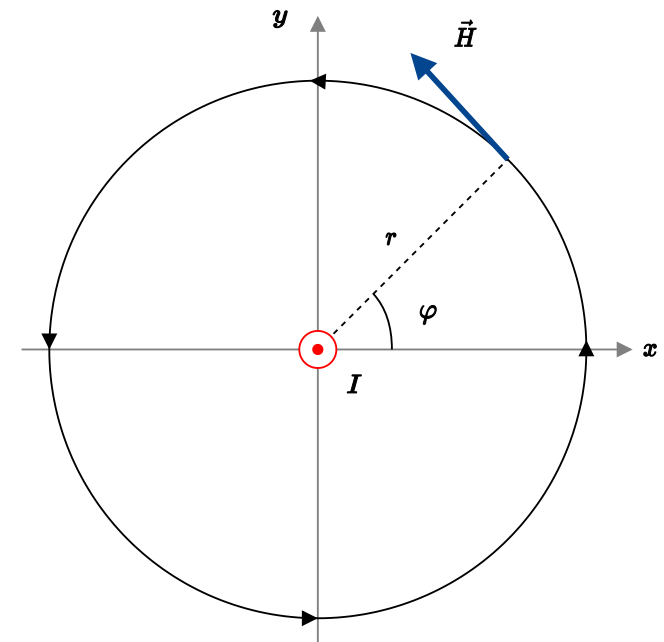
Vektoren des magnetischen Feldes sind in konzentrischen Kreisen um den Leiter angeordnet

$$\vec{H}(\vec{r}) = \left| \vec{H}(r, \varphi, z) \right| \cdot \vec{e}_\varphi = \left| \vec{H}(r, \varphi, z) \right| \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Magnetfeld ist Rotationssymmetrisch um die z-Achse

- Betrag des Feldstärkevektors nur vom Abstand r zum Leiter abhängig
- keine Abhängigkeit in z-Richtung

$$\left| \vec{H}(r, \varphi, z) \right| = \left| \vec{H}(r) \right| = H(r)$$



Das Oersted'sche Gesetz I

Allgemeiner Zusammenhang des Magnetfeldes eines Linienleiters und des verursachenden Stromes

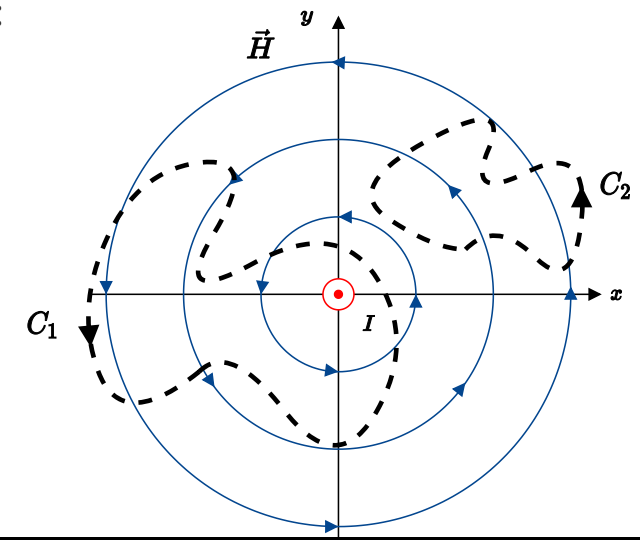
$$\oint_C \vec{H}, d\vec{s} = I$$

Integriert man die Vektoren des magnetischen Feldes \vec{H} entlang einer geschlossenen Kontur C so erhält man den umschlossenen Strom I .

Beispiel: Integration des Magnetfeldes jeweils über die Konturen C_1 und C_2 :

$$\oint_{C_1} \vec{H} d\vec{s} = I$$

$$\oint_{C_2} \vec{H} d\vec{s} = 0$$



Das Oersted'sche Gesetz II

Wahl der Kontur C als Kreis um den Linienstrom herum

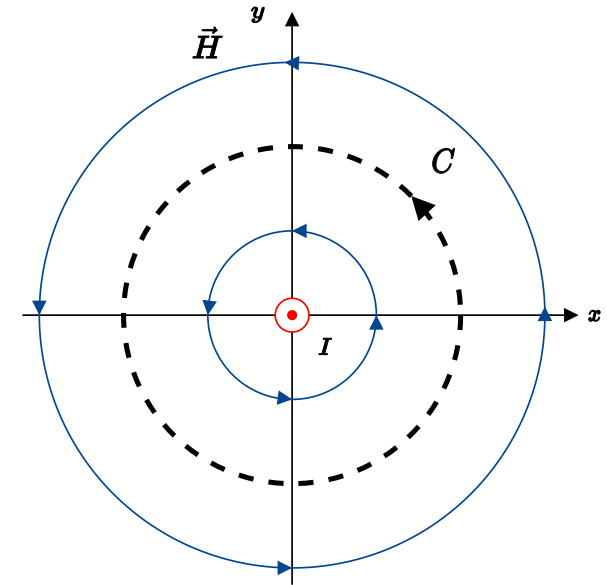
- Parametrierung der Anordnung im Zylinderkoordinatensystem
- Magnetfeld ist abhängig vom Abstand zum Leiter und tangential gerichtet: $\vec{H} = H(r) \cdot \vec{e}_\varphi$
- Parametrierung des infinitesimalen Wegelementes $d\vec{s} = r \cdot \vec{e}_\varphi d\varphi$

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \int_0^{2\pi} H(r) \cdot \vec{e}_\varphi \cdot r \cdot \vec{e}_\varphi d\varphi = H(r) \cdot r \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= H(r) \cdot r \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = H(r) \cdot r \cdot 2\pi \stackrel{!}{=} I$$

Damit ergibt sich für den Betrag des Magnetfeldes eines Linienstromes

$$H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r}$$

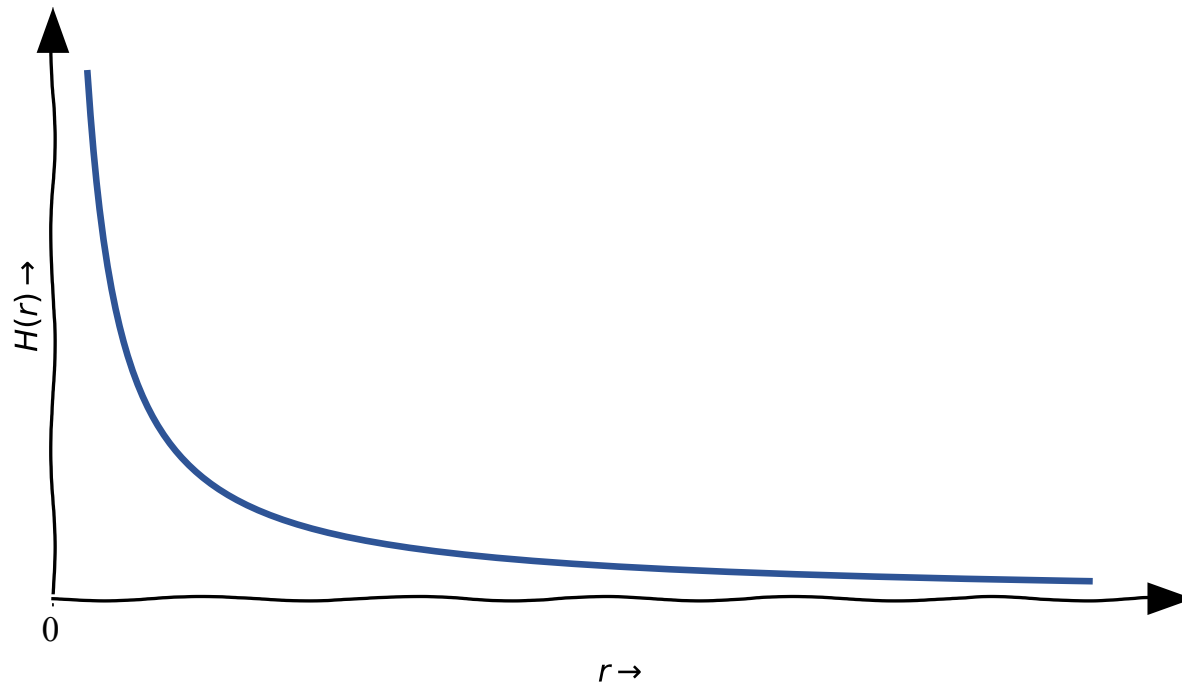


Das Oersted'sche Gesetz III

Betrag des Magnetfeldes in Abhängigkeit zum Abstand r zum verursachenden Linienstrom

$$H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r}$$

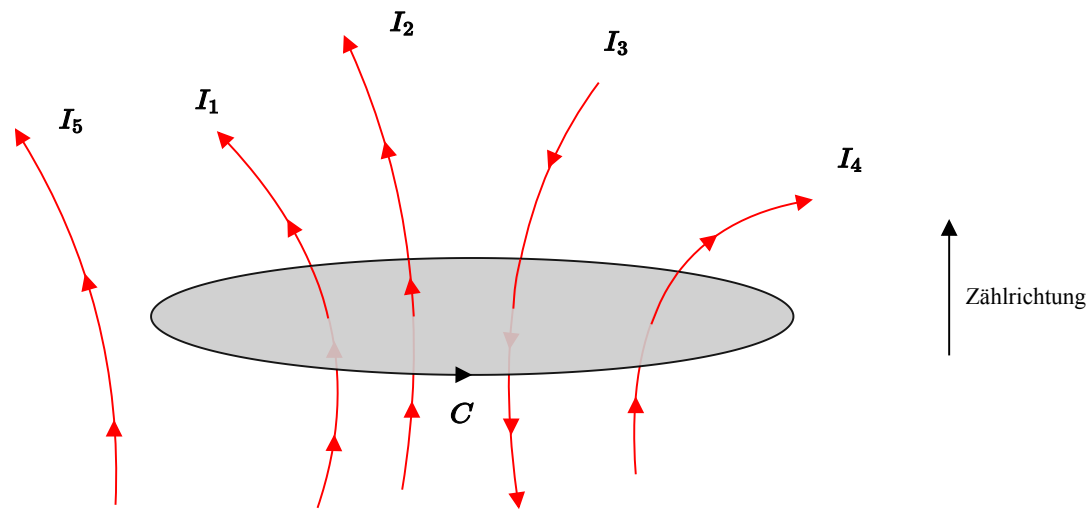
Betrag des Magnetfeldes sinkt $\sim \frac{1}{r}$



Durchflutung I

C sei eine geschlossene Kontur, dann bezeichnet Θ die mit der Randkurve verkettete Durchflutung:

$$\Theta = \sum I$$



In diesem Beispiel gilt: $\Theta = I_1 + I_2 - I_3 + I_4$

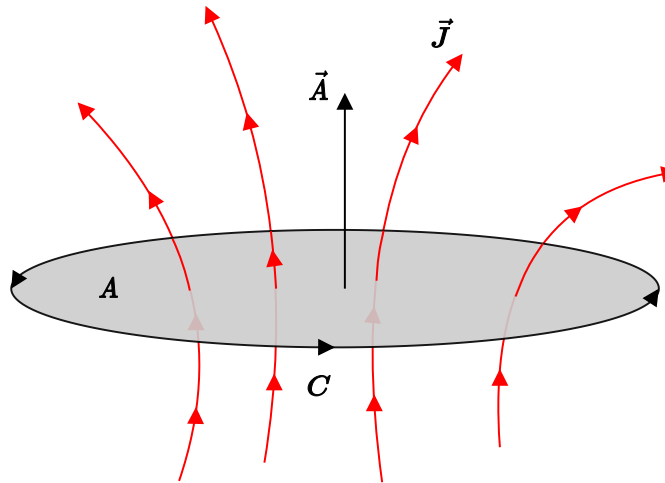
Strom I_5 ist außerhalb der Randkurve und bleibt somit unberücksichtigt

Durchflutung II

Durchflutung ergibt sich aus Flächenintegral der Stromdichte \vec{J} über der von C umschlossenen Fläche:

$$\Theta = \iint_A \vec{J} d\vec{A}$$

Definition der Fläche über den auf Fläche senkrechten Vektor \vec{A}



Die Richtung der Kontur C ist *rechtsgerichtet* zum Flächennormalenvektor \vec{A} (Rechte-Hand-Regel)

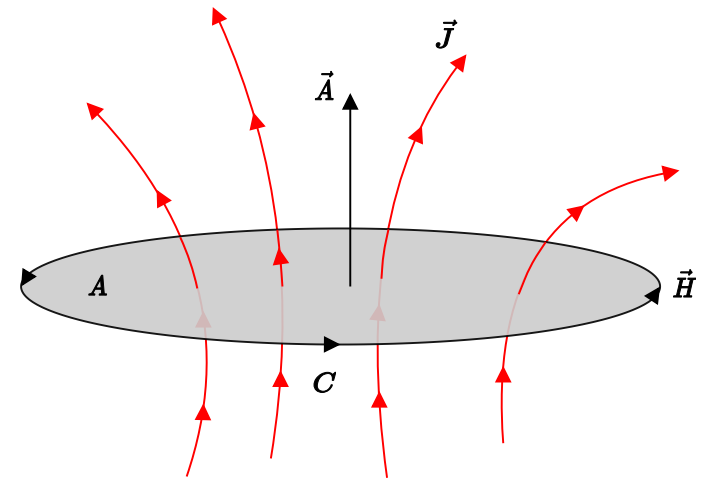
Durchflutungsgesetz

Verallgemeinerung des Oersted'schen Gesetzes zum Durchflutungsgesetz für konstante Ströme und Felder:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \Theta = \iint_A \vec{J} d\vec{A}$$

Integriert man die Vektoren der magnetischen Feldstärke entlang einer geschlossenen Kontur C entspricht das Ergebnis der Integration der Stromdichtevektoren über eben diese Fläche.

- Vektor der magnetischen Feldstärke: \vec{H}
- Vektor der Stromdichte: \vec{J}
- Geschlossene Kontur des Linienintegrals: C
- Normalenvektor der von der Kontur C eingeschlossenen Fläche: \vec{A}



Berechnung des Magnetfeldes eines geraden stromdurchflossenen Leiters

Integration entlang eines geschlossenen Kreises mit Radius r

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = H(r) \cdot r \cdot 2\pi$$

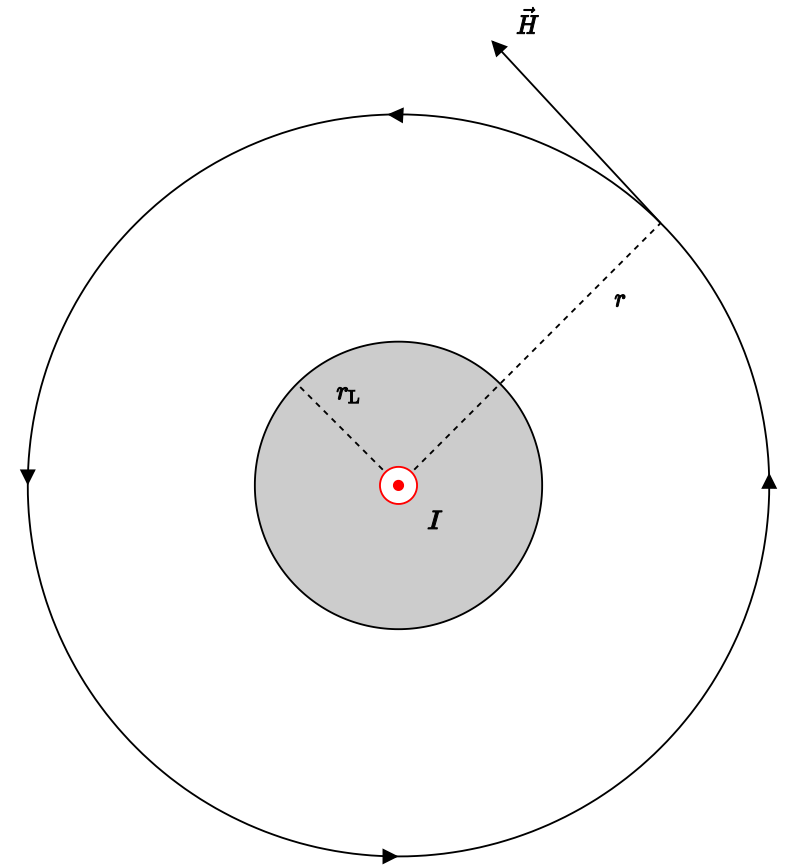
Stromdichte \vec{J} ist gleichmäßig über den Leiter verteilt:

- Integral der Stromdichte außerhalb des Leiters ($r \geq r_L$)

$$\iint_A \vec{J} d\vec{A} = I$$

- Integral der Stromdichte innerhalb des Leiters ($r < r_L$)

$$\iint_A \vec{J} d\vec{A} = I \cdot \frac{r^2 \pi}{r_L^2 \pi} = I \cdot \frac{r^2}{r_L^2}$$

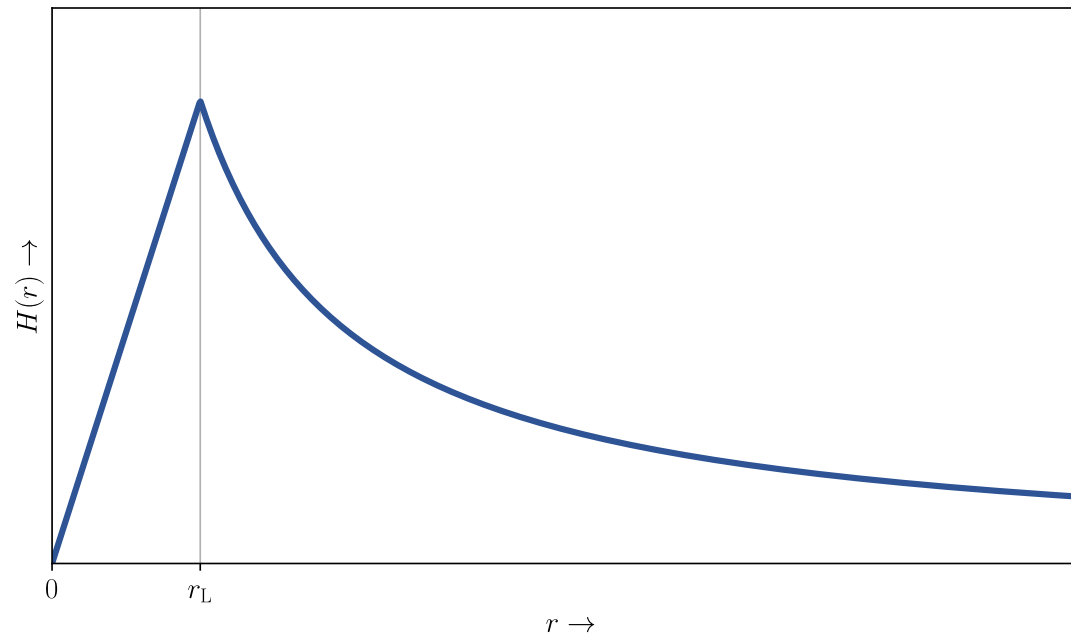


Magnetische Feldstärke eines geraden stromdurchflossenen Leiters

Damit ergibt sich für die magnetische Feldstärke

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad r \geq r_L$$

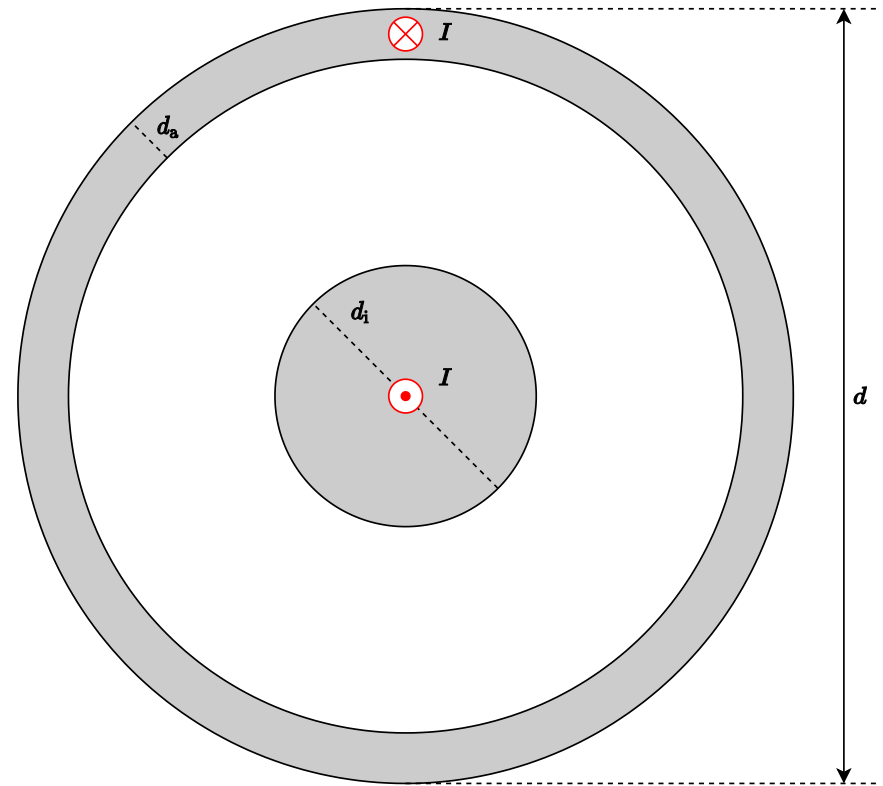
$$H(r) = \frac{I \cdot r}{2\pi r_L^2} \quad r < r_L$$



Beispiel: Magnetfeld eines Koaxialkabels

Gegeben ist ein sehr langes Koaxialkabel, bestehend aus einem runden Innenleiter (Durchmesser d_i) und einem Außenleiter der Dicke d_a . Der Gesamtdurchmesser des Kabels beträgt d . Gesucht ist das magnetische Feld

- im Innenleiter
- zwischen Innen- und Außenleiter
- im Außenleiter
- außerhalb des Kabels



Beispiel: Magnetfeld eines Koaxialkabels - Lösung I

Berechnung des Magnetfeldes $H(r)$ im Abstand r vom Zentrum des Koaxialkabels.

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = 2\pi r \cdot H(r) = \Theta \quad \Rightarrow \quad H(r) = \frac{\Theta}{2\pi \cdot r}$$

1. Fall: $r < \frac{d_i}{2}$

$$\Theta = I \cdot \frac{r^2 \pi}{(d_i/2)^2 \pi} \quad \Rightarrow \quad H(r) = \frac{2I \cdot r}{\pi d_i^2}$$

1. Fall: $\frac{d_i}{2} < r < \frac{d}{2} - d_a$

$$\Theta = I \quad \Rightarrow \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

Beispiel: Magnetfeld eines Koaxialkabels - Lösung II

3. Fall: $\frac{d}{2} - d_a < r < \frac{d}{2}$

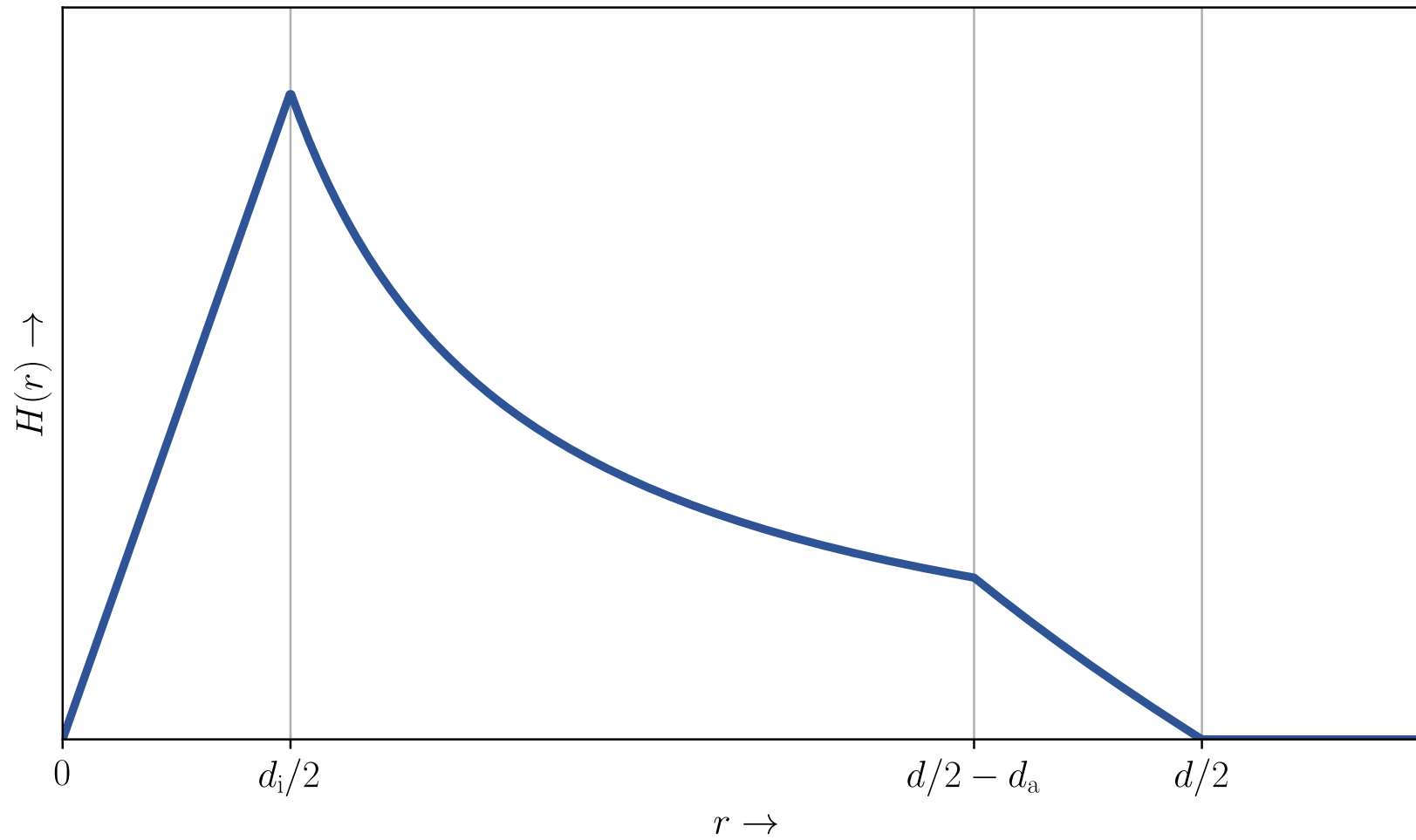
$$\Theta = I - I \cdot \frac{r^2\pi - (d/2 - d_a)^2\pi}{(d/2)^2\pi - (d/2 - d_a)^2\pi} = Ir^2 \cdot \frac{\left(\frac{d/2}{r}\right)^2 - 1}{dd_a - d_a^2}$$

$$H(r) = \frac{I \cdot r}{2\pi} \cdot \frac{\left(\frac{d/2}{r}\right)^2 - 1}{dd_a - d_a^2}$$

4. Fall: $r > \frac{d}{2}$

$$\Theta = I - I = 0 \quad \Rightarrow \quad H(r) = 0$$

Beispiel: Magnetfeld eines Koaxialkabels - Lösung III



Berechnung der magnetischen Feldstärkevektoren eines unendlich langen Leiters

Berechnung des magnetischen Feldes in einem Punkt \vec{r} hervorgerufen durch den Stromfluss eines unendlich langen geraden Linienleiter (*spezielle Form des Gesetzes von Biot-Savart*)

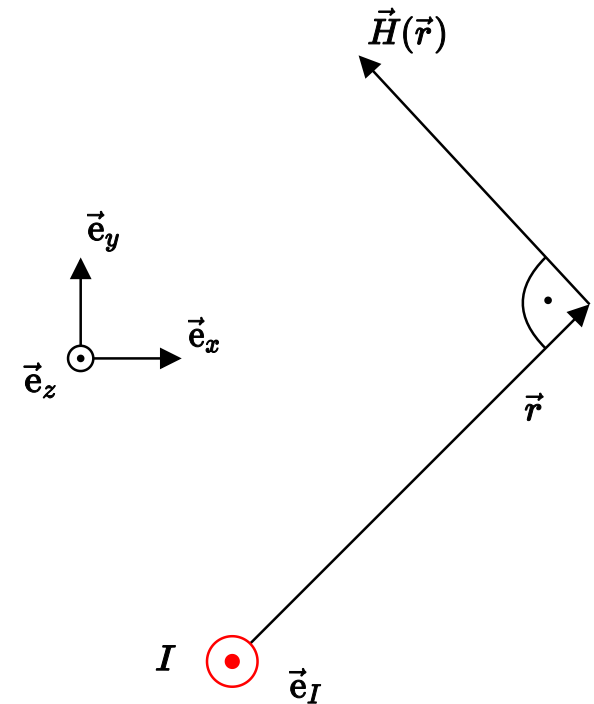
$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi|\vec{r}|^2} \cdot (\vec{e}_I \times \vec{r}) \quad \text{mit } \vec{e}_I \text{ Einheitsvektor in Stromrichtung}$$

– Strom fließt in z-Richtung des Koordinatensystems:

$$\vec{e}_I = \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist definiert durch:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$



Berechnung des Magnetfeldes bei mehreren Leitern mittels Überlagerung

Das Magnetfeld einer Anordnung aus mehreren Leitern lässt sich durch *Überlagerung* der einzelnen Magnetfelder

Vorgehen:

- Berechnung des Magnetfeldes eines Leiters (alle anderen werden dabei zu Null gesetzt)
- Berechnung des gesamten Magnetfeldes durch Summation der einzelnen Ergebnisse

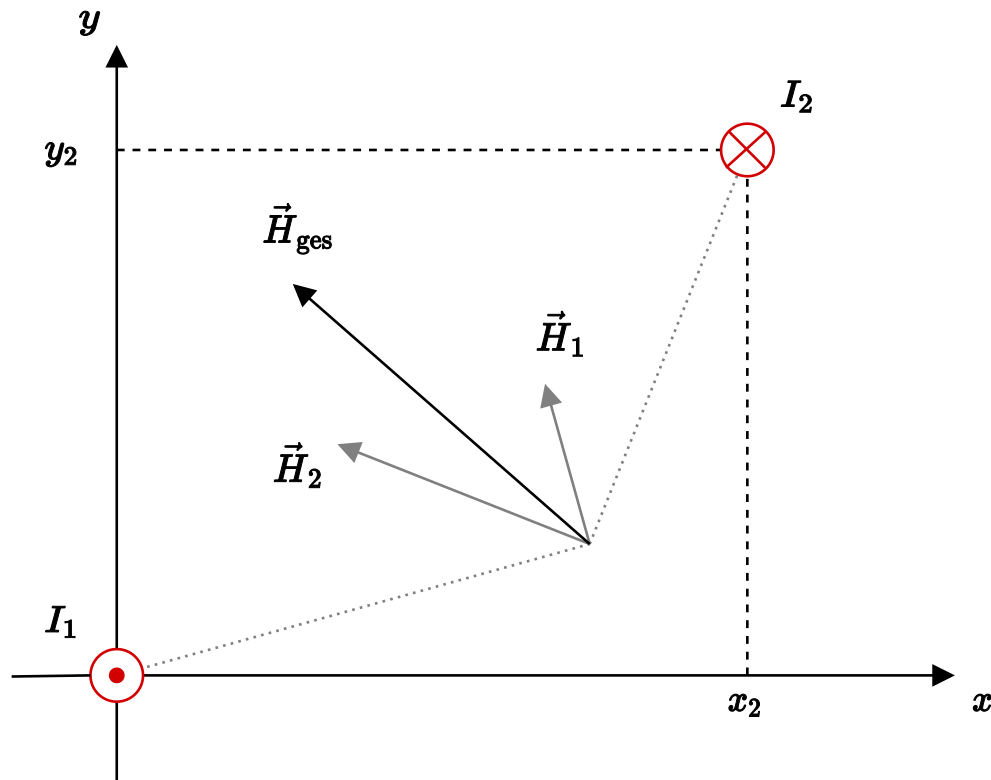
$$\vec{H}_{\text{ges}} = \sum_i \vec{H}_i$$

Wichtig: Die Addition von Magnetfeldern darf immer nur *vektoriell* durchgeführt werden!

Beispiel: Überlagerung von Magnetfeldern I

Gegeben: Zwei unendlich lange gerade Leiter

Gesucht: Magnetische Feldstärke in jedem Punkt der x/y-Ebene



Beispiel: Überlagerung von Magnetfeldern II

Dabei ergeben sich die jeweiligen magnetischen Feldstärken \vec{H}_1 und \vec{H}_2 aus dem Gesetz von Biot-Savart

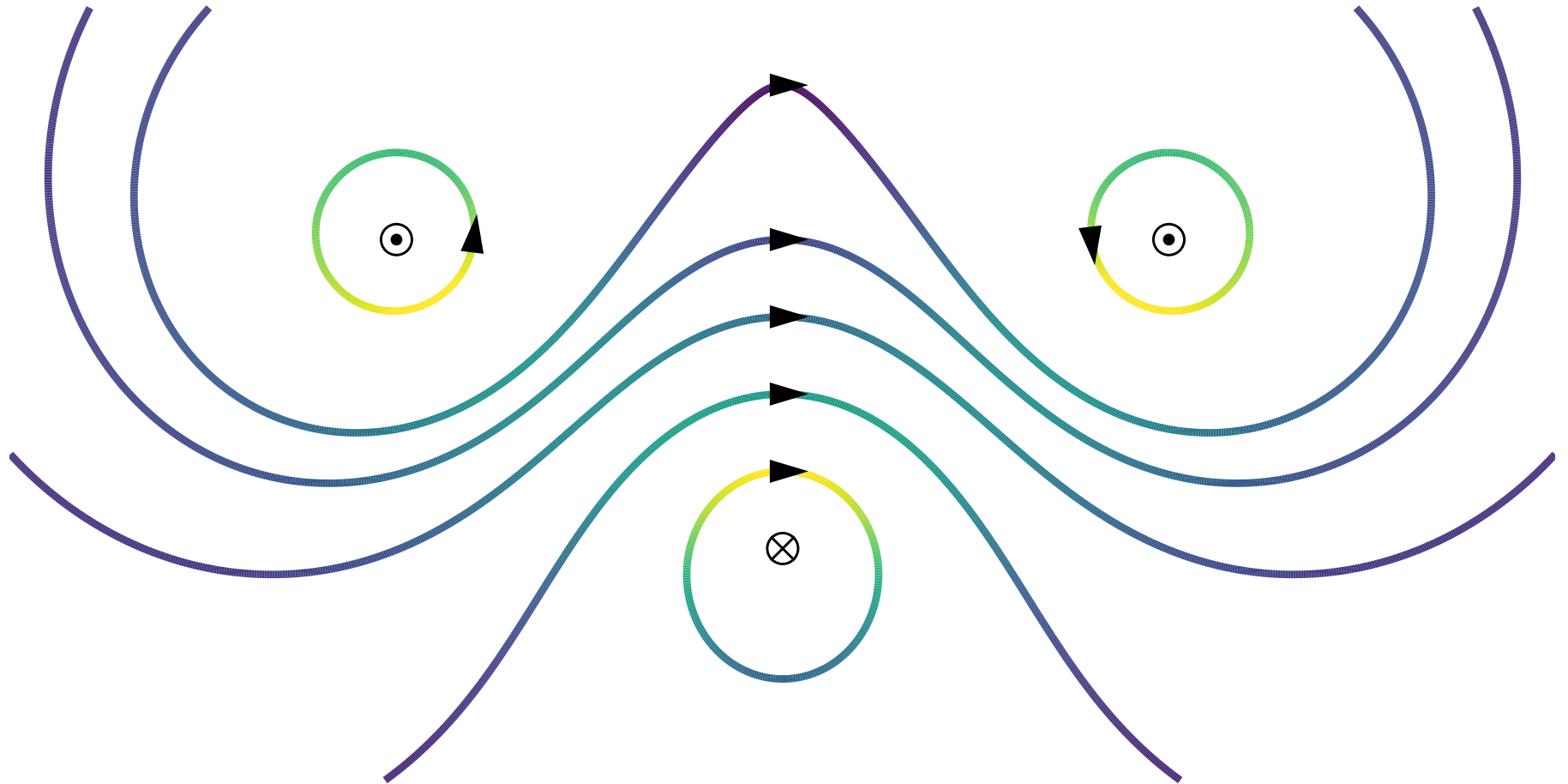
$$\vec{H}_1 = \frac{I_1}{2\pi(x^2 + y^2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I_1}{2\pi(x^2 + y^2)} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_2 &= \frac{-I_2}{2\pi((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - x_2 \\ y - y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-I_2}{2\pi((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2)} \cdot \begin{pmatrix} y_2 - y \\ x - x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das gesamte Magnetfeld entspricht der Summe

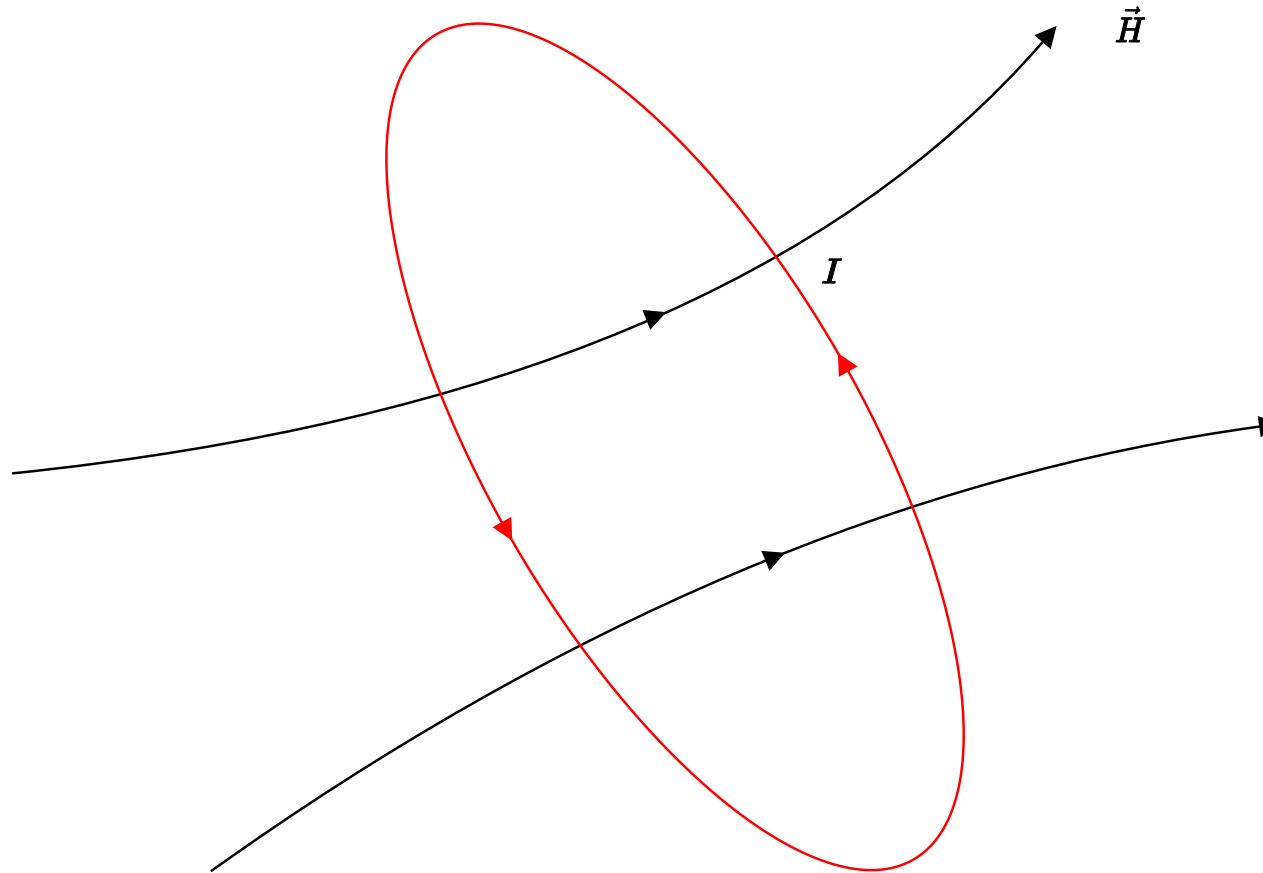
$$\vec{H}_{\text{ges}} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

Magnetische Feldstärke durch Superposition

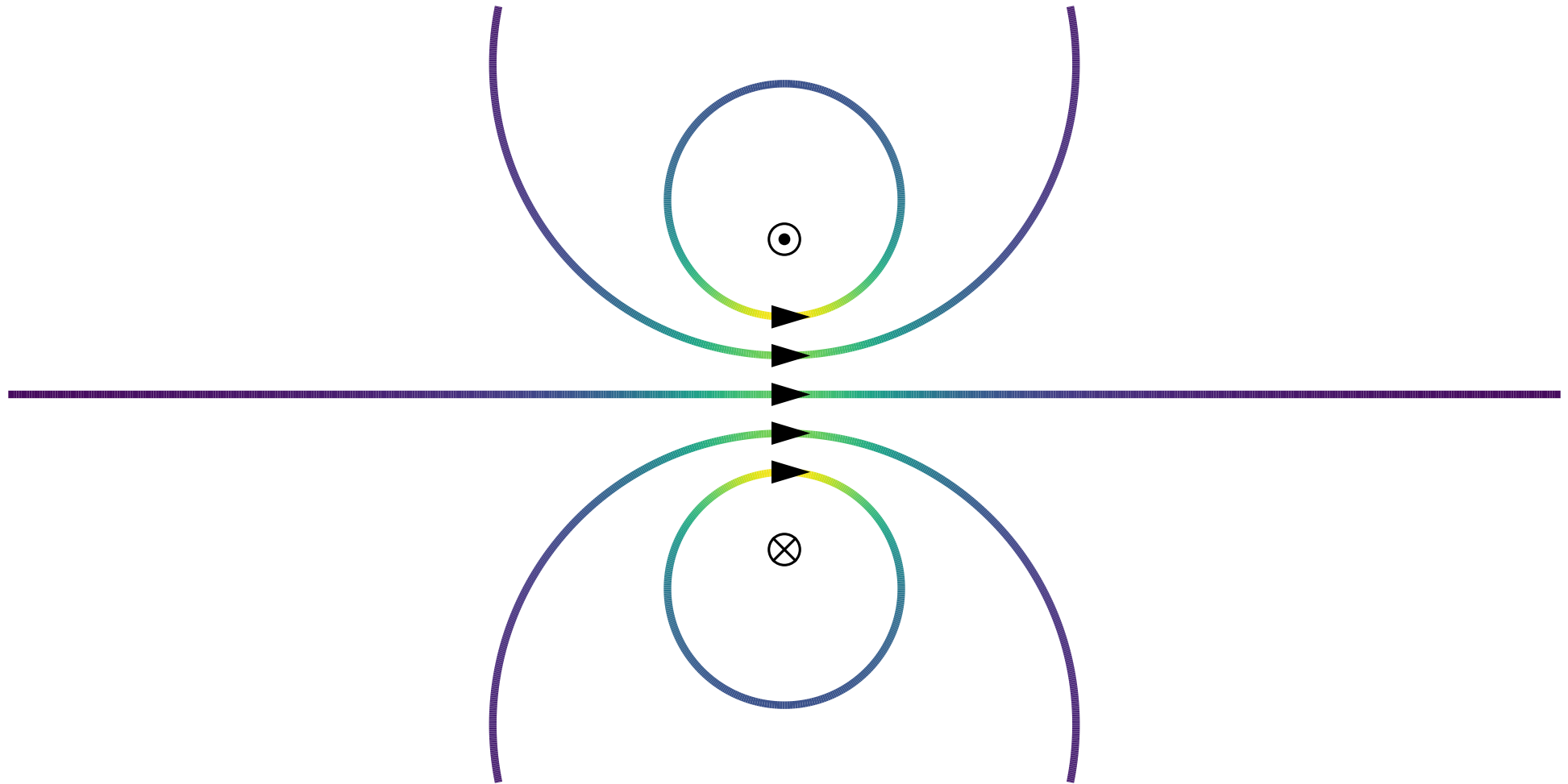


Zylinderspule

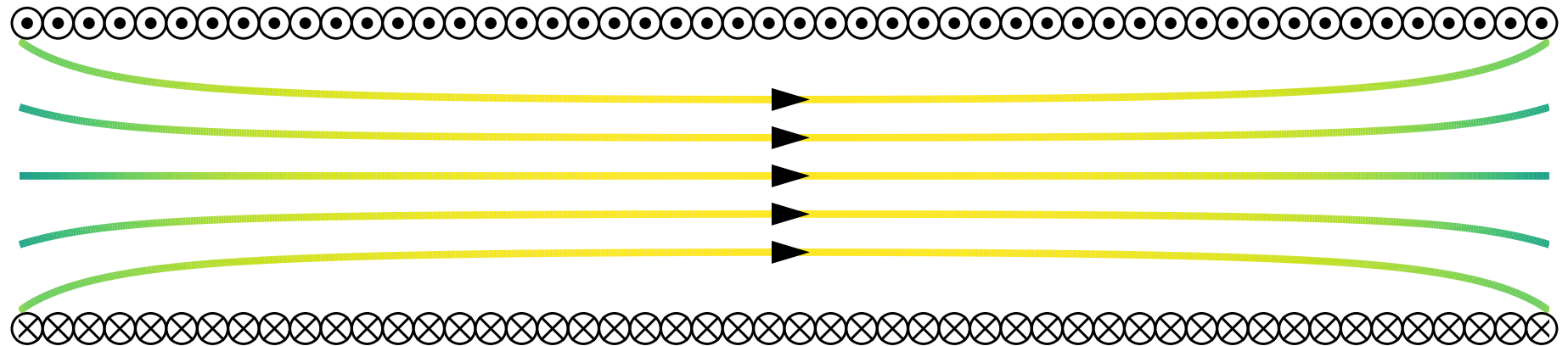
Magnetische Feld einer Leiterschleife



Magnetische Feld einer Leiterschleife - Aufsicht



Magnetische Feld einer Zylinderspule

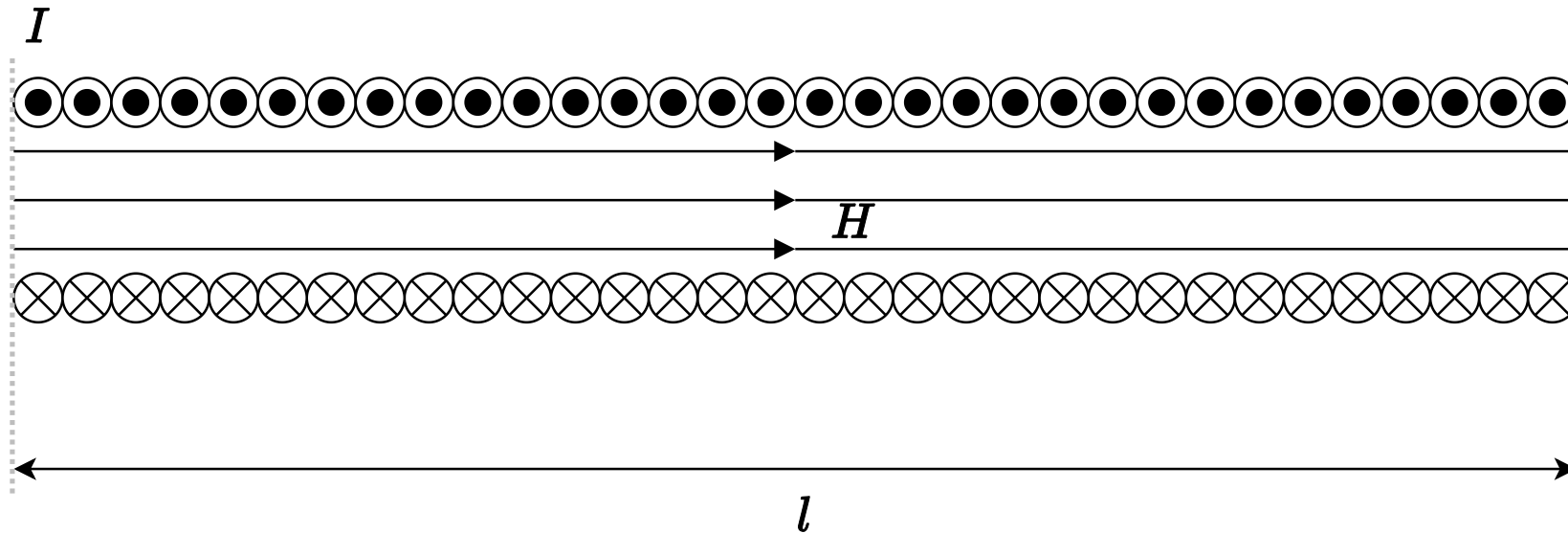


Magnetisches Feld im inneren einer langen Zylinderspule

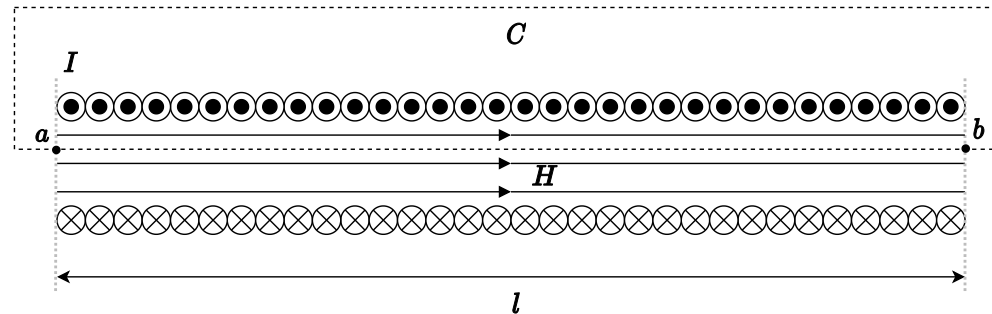
Eine Zylinderspule wird von einem Strom I durchflossen.

Annahme: Länge l der Zylinderspule so groß, dass Magnetfeld

- im Außenraum vernachlässigbar und im
- im Innenraum homogen ist (Feldstärke H).



Berechnung des magnetischen Feldes im inneren einer Zylinderspule



Durchflutung entspricht Summe der verketteten Ströme:

$$\Theta = \sum I = N \cdot I$$

Anwendung des Durchflutungsgesetzes:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \int_a^b \vec{H} d\vec{s} = H \cdot l = \Theta = N \cdot I$$

Damit ergibt sich für das Magnetfeld im inneren der Zylinderspule

$$H = \frac{N \cdot I}{l}$$

Material Eigenschaften

Magnetische Flussdichte

- Magnetische Feld \vec{H} wird von Größe des Stromes I bestimmt
- Keine Aussage über Stärke des Feldes da Materialeigenschaften unberücksichtigt bleiben
- Magnetische Flussdichte

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad [B] = [\mu] \cdot [H] = \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} = \text{T} = \text{Tesla}$$

- Permeabilität

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

- Permeabilität des leeren Raumes

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

- Berücksichtigung der Materialeigenschaft durch *Permeabilitätszahl* μ_r (Vakuum $\mu_r = 1$)

Diamagnetismus

Entdeckung 1836 von M. Faraday:

- Kleine Wismutprobe wird von starkem Magnetpol abgestoßen.
- Diamagnetischer Effekt tritt in allen Materialien auf.
- Permeabilitätszahl: $\mu_r < 1$
- Schwacher Effekt

Diamagnetische Stoffe:

- Kupfer ($\mu_r \approx 0.999\,990\,4$)
- Wasser ($\mu_r \approx 0.999\,990\,97$)
- Aluminiumoxid ($\mu_r \approx 0.999\,986\,4$)
- Wismut

Paramagnetismus

Materialien mit $\mu_r > 1$ werden als *paramagnetische Stoffe* bezeichnet:

- Überdeckung des diamagnetischen Effektes
- Schwacher Effekt

Paramagnetische Stoffe:

- Aluminium ($\mu_r \approx 1.000\,020\,8$)
- Eisen bei 800°C ($\mu_r \approx 1.149$)
- Eisen bei 1200°C ($\mu_r \approx 1.005\,59$)
- Sauerstoff ($\mu_r \approx 1.000\,001\,86$)

Ferromagnetismus

Materialien mit $\mu_r \gg 1$ werden als *ferromagnetisch* bezeichnet:

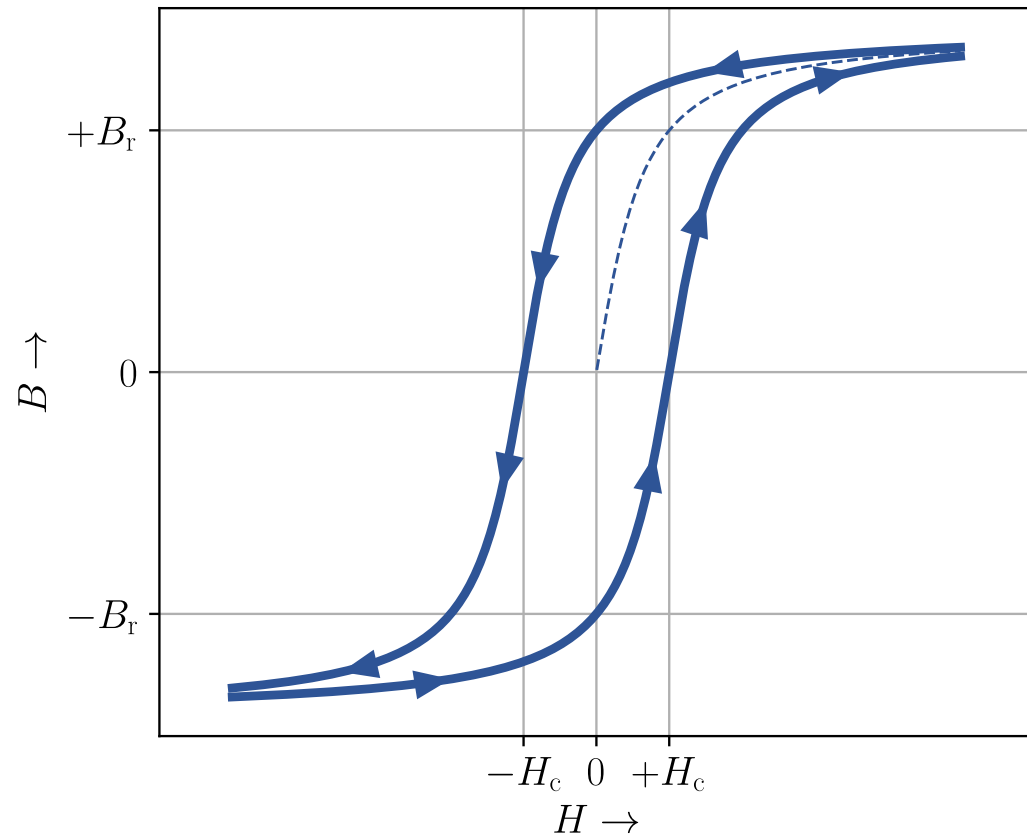
- *Weiß'sche Bezirke*: Ausrichtung von Bereichen aus Elementarmagneten
- Ohne äußeres Magnetfeld: Gegenseitige Aufhebung der Weiß'schen Bezirke
- Oberhalb der *Curie-Temperatur* hört die Magnetisierung auf: Stoff wirkt paramagnetisch

Ferromagnetische Stoffe:

- Eisen ($\mu_r = 300 \dots 10\,000$)
- Nickel
- Kobalt ($\mu_r = 80 \dots 200$)
- Legierungen aus ferromagnetischen Stoffen

Hysteresekurve

- B_r : Remanenzflussdichte
- H_c : Koerzitivfeldstärke



Magnetisches Feld einer Toroidspule

- Toroidspule mit N Windungen
- Durchflutung $\Theta = N \cdot I$
- Auswertung des Durchflutungsgesetzes

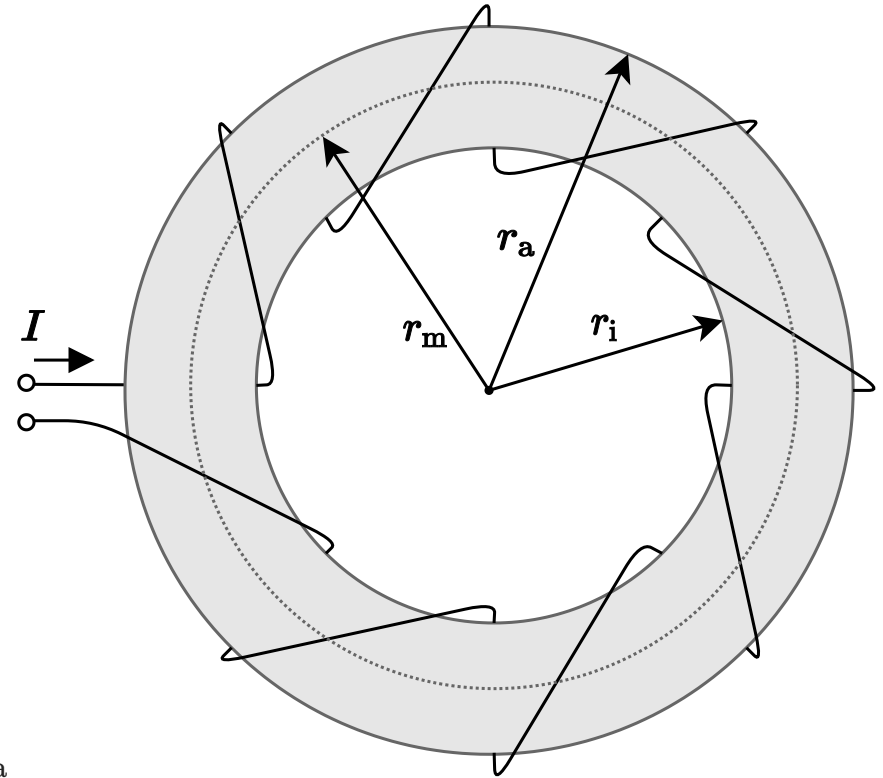
$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = H(r_m) \cdot 2\pi \cdot r_m = \Theta$$

- Magnetfeld im inneren der Spule $r_i < r_m < r_a$

$$H(r_m) = \frac{N \cdot I}{2\pi \cdot r_m}$$

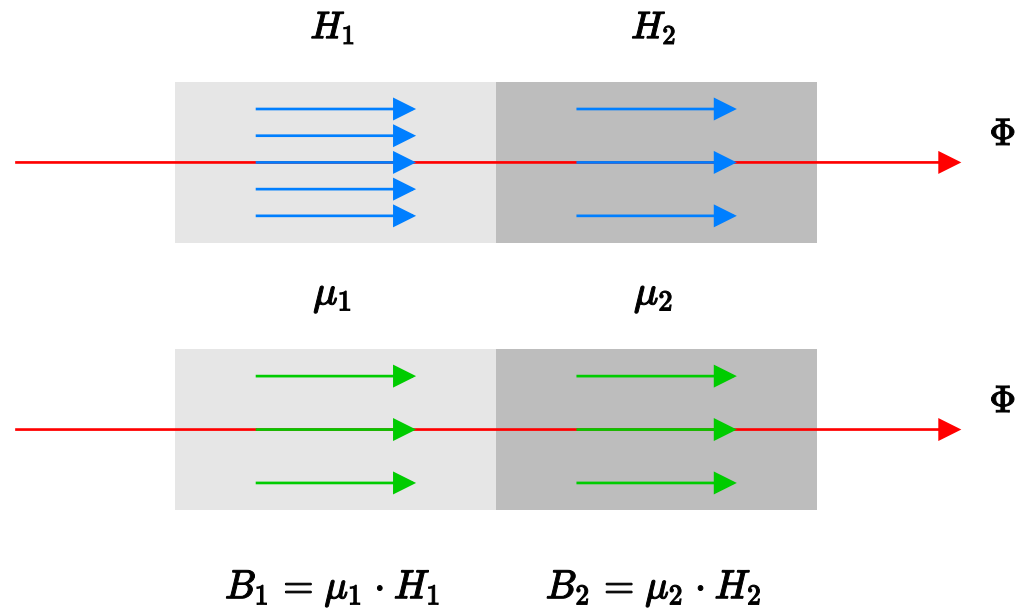
- Magnetische Flussdichte im inneren der Spule $r_i < r_m < r_a$

$$B(r_m) = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{2\pi \cdot r_m}$$



Grenzflächen unterschiedlicher Materialien I

Magnetischer Fluss senkrecht auf Grenzfläche von zwei Materialien mit Permeabilität μ_1 und μ_2

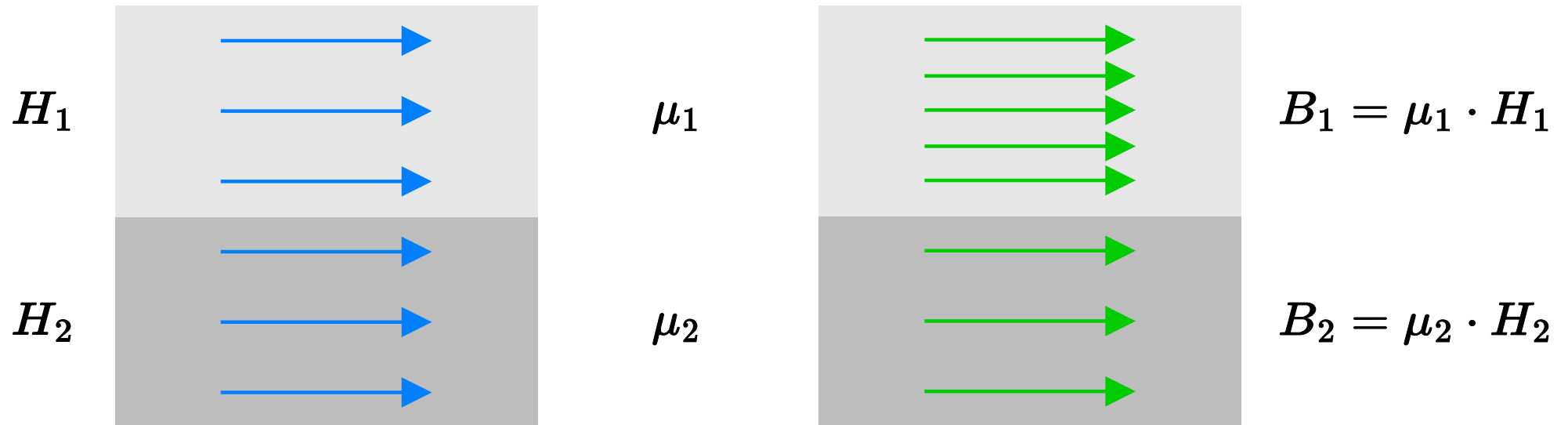


Magnetischer Fluss Φ ist in beiden Materialien gleich (vergleiche Analogie zum elektrischen Strom)

$$B_1 = B_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{H_1}{H_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Grenzflächen unterschiedlicher Materialien II

Magnetischer Fluss parallel an Grenzfläche von zwei Materialien mit Permeabilität μ_1 und μ_2



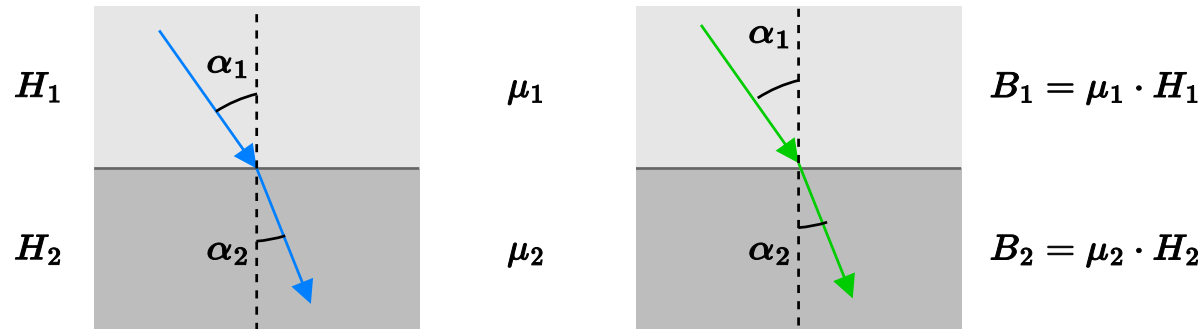
Durchflutung (Summe verketteter Ströme) springt nicht an paralleler Grenzfläche ($H_1 \cdot l = H_2 \cdot l$)

Vergleiche Analogie zum elektrischen Spannung

$$H_1 = H_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{B_1}{B_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Grenzflächen unterschiedlicher Materialien III

Allgemeines Brechungsgesetz an Grenzflächen von zwei Materialien mit Permeabilität μ_1 und μ_2



Für die Winkel α_1 und α_2 an der Grenzfläche gilt

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

An der Grenzfläche eines hochpermeablen Materials (z.B. Eisen) zu einem niedrigpermeablen Material (z.B. Luft), d.h. $\mu_1 \gg \mu_2$ treten die Feldlinien nahezu senkrecht aus.

Kraft auf bewegte Ladungen

Kraft auf bewegte Ladungen im Magnetischen Feld

Bewegte Ladung erzeugt eigenes Magnetfeld

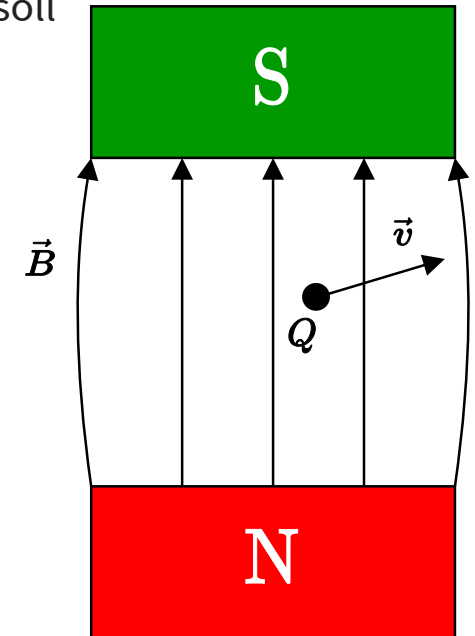
Kombination mit äußerem Feld bewirkt Kraft, die die Feldverschiebung ausgleichen soll

Kraft auf eine bewegte Ladung im Magnetfeld: *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$F = QvB \cdot \sin(\alpha)$$

α : Winkel zwischen Geschwindigkeit \vec{v} und Magnetfeld \vec{B}



Kraft auf stromführenden Leiter im Magnetfeld

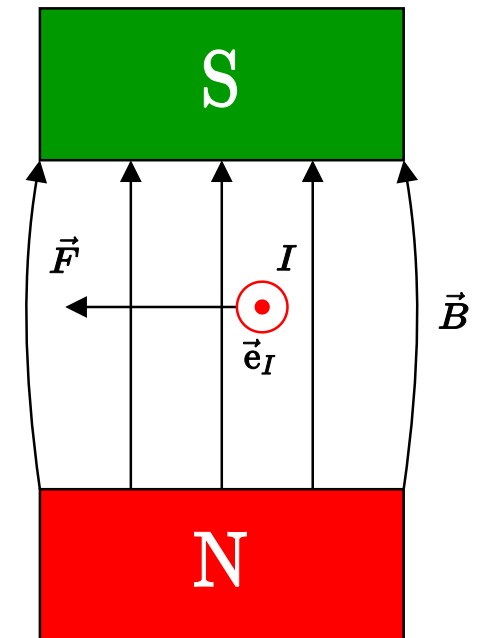
Kraft auf stromführenden Leiter der mit Länge l im Magnetfeld befindetet:

$$\vec{F} = I \cdot l \cdot (\vec{e}_I \times \vec{B})$$

\vec{e}_I : Einheitsvektor in Richtung des technischen Stromflusses

Rechte-Hand-Regel:

- *Daumen*: Technische Stromrichtung
- *Zeigefinger*: Richtung des \vec{B} -Feldes
- *Mittelfinger*: Kraftrichtung



Kraft auf zwei stromdurchflossene Leiter

Gegeben: zwei Leiter der Länge l im Abstand a mit Stromfluss I_1 und I_2

Von Leiter 1 erzeugtes Magnetfeld im Abstand a :

$$H = \frac{I_1}{2\pi \cdot a} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu I_1}{2\pi \cdot a}$$

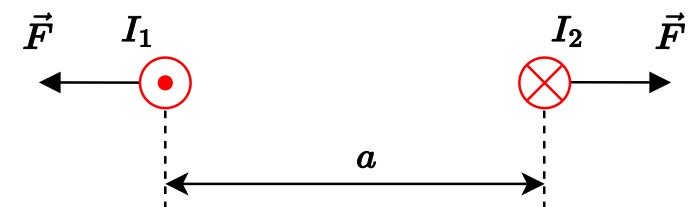
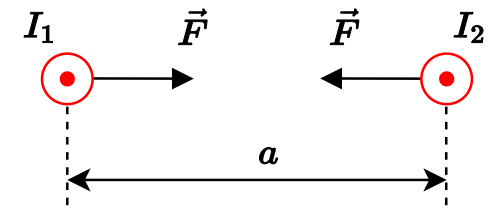
Kraft auf Leiter 2:

$$F = I_2 \cdot l \cdot B = \frac{\mu I_1 I_2 l}{2\pi \cdot a}$$

Nach Prinzip *actio* *gegengleich* *reactio* folgt gleiche Kraft auf Leiter 1

Kraftrichtung ergibt sich nach Rechte-Hand-Regel:

- Fließen I_1 und I_2 in gleiche Richtung: Leiter ziehen sich an
- Fließen I_1 und I_2 entgegengesetzt: Leiter stoßen sich ab



Magnetischer Fluss

Homogenes Magnetfeld

Zusammenhang zwischen magnetischer Feldstärke und *magnetischer Flussdichte*

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

Magnetischer Fluss ist skalare Größe und entspricht "Flussdichte mal Fläche"

Spezialfall: Flussdichte verläuft gleichmäßig (homogen) über der Fläche

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos(\alpha)$$

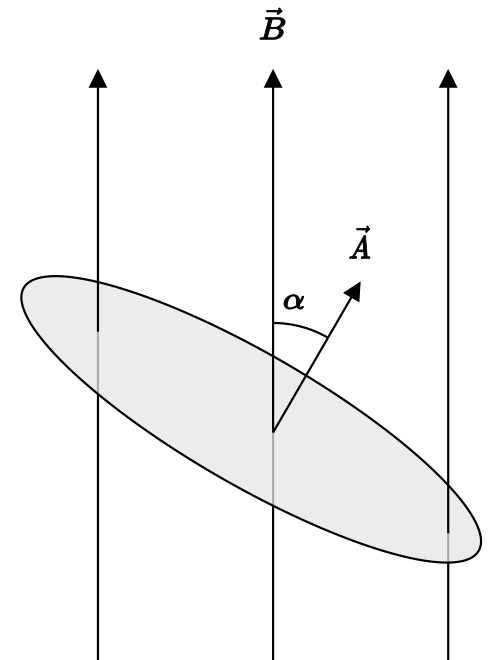
\vec{A} : Vektor senkrecht auf Fläche A

α : Winkel zwischen \vec{A} und \vec{B}

Spezialfälle:

1. $\vec{B} \parallel \vec{A}$: $\Phi = B \cdot A$

2. $\vec{B} \perp \vec{A}$: $\Phi = 0$



Allgemeine Berechnung des magnetischen Flusses

Allgemeiner Fall: Ungleichmäßiger ortsabhängiger Verlauf der magnetischen Flussdichte

Betrachtung eines infinitesimal kleinen Flächenelements

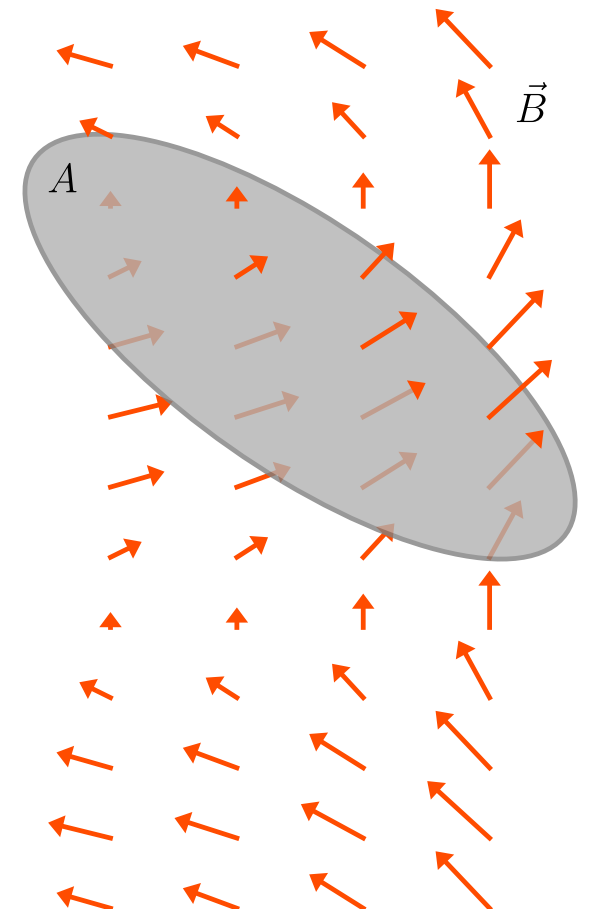
$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Berechnung des gesamten Flusses durch Integration aller Flächenelemente

$$\Phi = \iint_A d\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

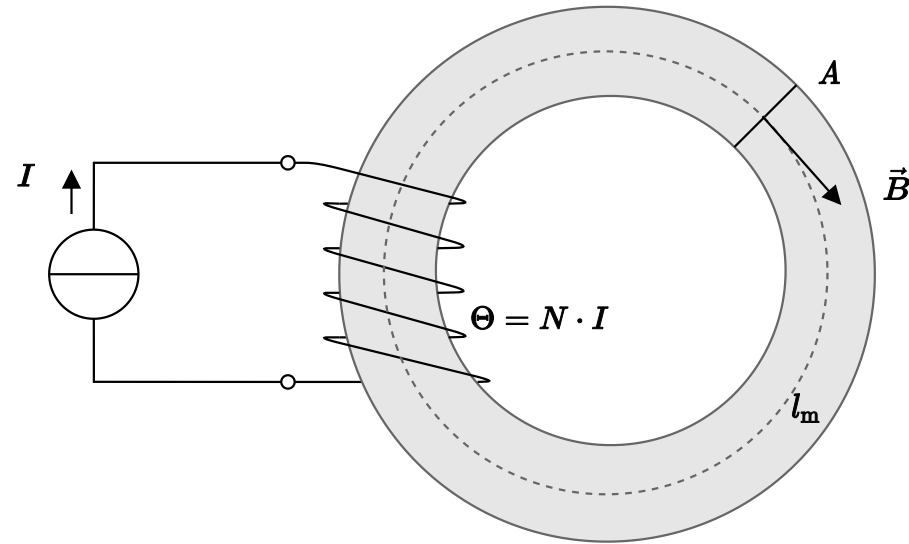
Aufgrund der *quellenfreiheit* des magnetischen Feldes gilt

$$\Phi = \oiint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



Magnetischer Kreis

Spule mit Eisenkern



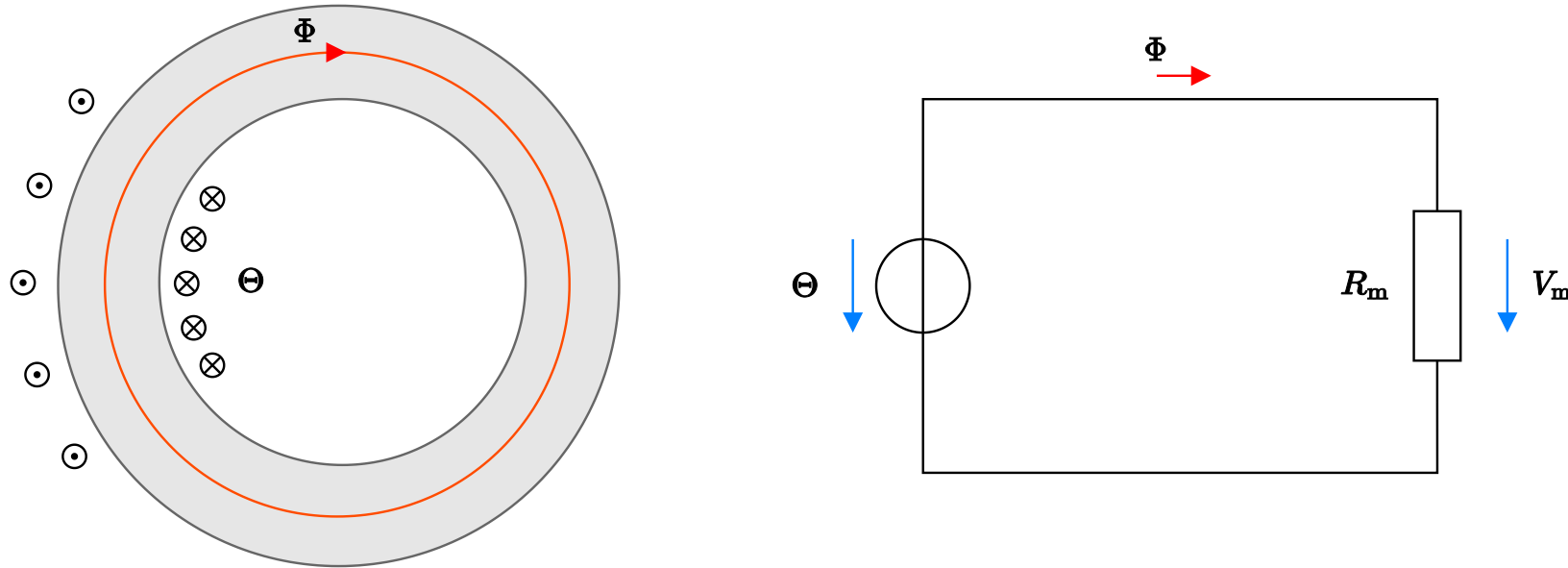
Aus dem Durchflutungsgesetz ergibt sich

$$\Theta = \oint_C \vec{H} d\vec{s} = H \cdot l_m = \frac{B}{\mu} \cdot l_m = \Phi \cdot \frac{l_m}{\mu \cdot A} = \Phi \cdot R_m$$

Interpretation des Zusammenhanges zwischen Durchflutung und Fluss als Ohm'sches Gesetz mit Widerstand

$$R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l_m}{A} \quad \Rightarrow \quad \text{Kenngröße für Material und Geometrie}$$

Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises



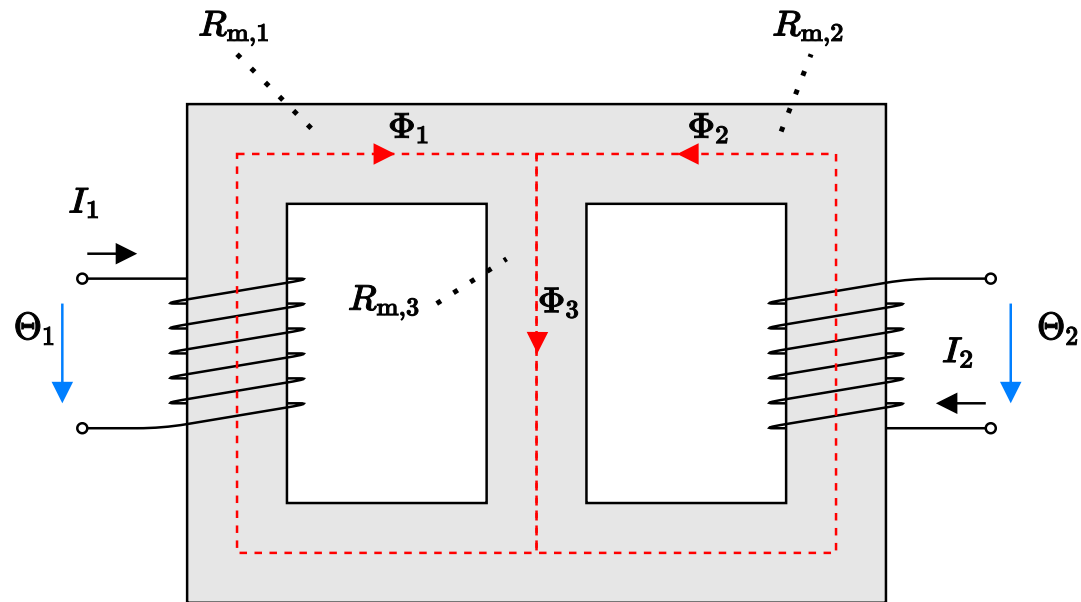
Betrachtung des magnetischen Kreises analog zu elektrischen Kreisen

- Magnetischer Fluss $\Phi = B \cdot A$ entspricht Strom
- Magnetische Spannung über dem Eisenkern $V_m = H \cdot l_m$
- Ohm'sches Gesetz: $V_m = R_m \cdot \Phi$

Vergleich zwischen magnetischen und elektrischen Kreis I

	Magnetischer Kreis	Elektrischer Kreis
Strom bzw. Fluss	$\Phi = \iint \vec{B} d\vec{A} = \mu \iint \vec{H} d\vec{A}$	$I = \iint \vec{J} d\vec{A} = \kappa \iint \vec{E} d\vec{A}$
Spannung	$V_m = \int \vec{H} d\vec{s}$	$U = \int \vec{E} d\vec{s}$
Leitfähigkeit	μ	$\kappa = \frac{1}{\rho}$
Widerstand	$R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{A}$	$R = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{l}{A}$
Leitwert	$\Lambda_m = \frac{1}{R_m} = \mu \cdot \frac{A}{l}$	$G = \frac{1}{R} = \kappa \cdot \frac{A}{l}$
Ohm'sches Gesetz	$R_m = \Theta / \Phi$	$R = U / I$

Verzweigter magnetischer Kreis



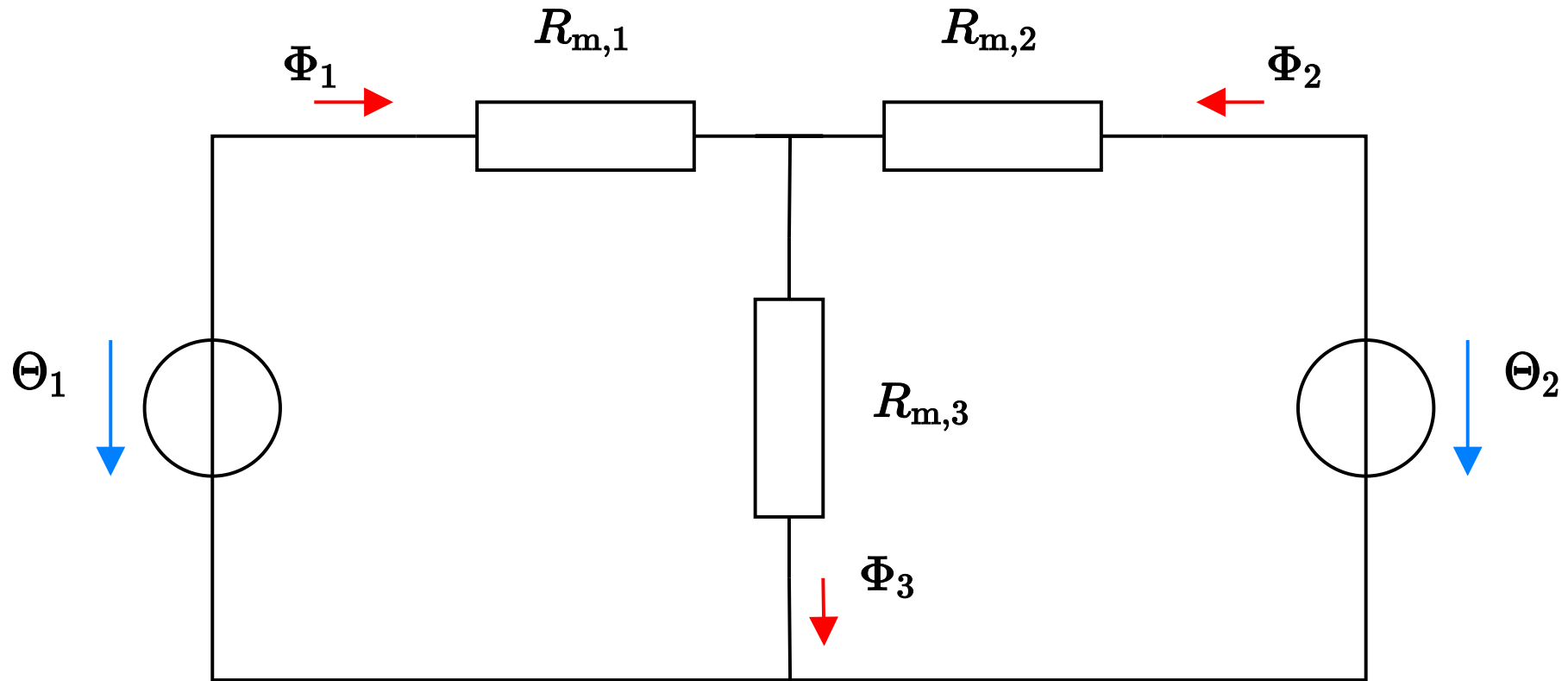
Knotenregel für die magnetischen Flüsse

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0$$

Maschenregel der Durchflutungen

$$\Theta_1 = \Phi_1 \cdot R_{m,1} + \Phi_3 \cdot R_{m,3} \quad \Theta_2 = \Phi_2 \cdot R_{m,2} + \Phi_3 \cdot R_{m,3}$$

Ersatzschaltbild des verzweigten magnetischen Kreises



Jeder Eisenschenkel wird zu einem magnetischen Widerstand zusammengefasst

Wahl der Zählpeile der Durchflutung: Resultierender Fluss hat gleiche Richtung wie im Eisengerüst

Rechnen mit magnetischen Netzwerken I

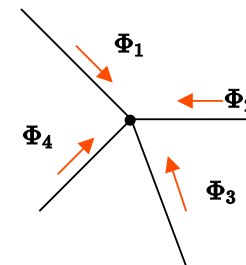
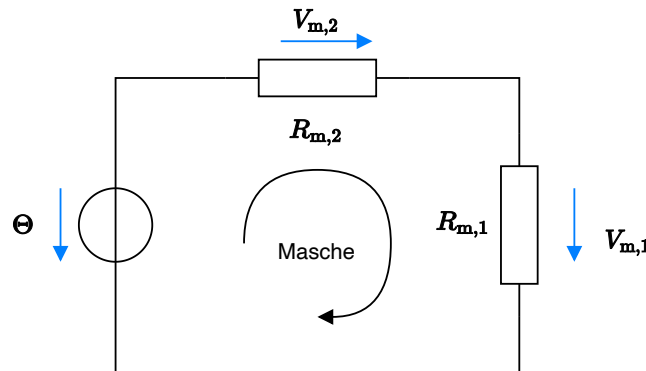
Bei magnetischen Netzwerken lassen sich die gleichen Rechenregeln wie bei elektrischen Netzwerken anwenden

Aus dem Durchflutungsgesetz ergibt sich der Maschensatz des magnetischen Kreises

$$\Theta = \oint \vec{H} d\vec{s} = \sum_{\text{Masche}} H \cdot l = \sum_{\text{Masche}} V_m \quad \Rightarrow \quad \sum_{\text{Masche}} V_m - \Theta = 0$$

Aus der *Quellenfreiheit* des magnetischen Feldes folgt

$$\oiint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\text{Knoten}} \Phi = 0$$



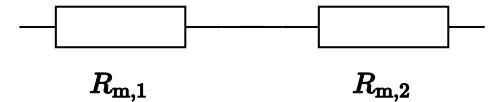
Rechnen mit magnetischen Netzwerken II

Durch das *Ohm'sche Gesetz* und die *Kirchhoff'schen Gesetze* für den magnetischen Kreis lassen sich die bereits bekannten Regeln formulieren für

- Serien- und Parallelschaltung von magnetischen Widerständen
- Spannungs- und Stromteilerregel

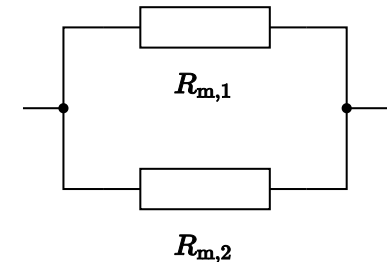
Serienschaltung von magnetischen Widerständen

$$R_{m,ges} = R_{m,1} + R_{m,2}$$



Parallelschaltung von magnetischen Widerständen

$$R_{m,ges} = \frac{1}{\frac{1}{R_{m,1}} + \frac{1}{R_{m,2}}} = \frac{R_{m,1} \cdot R_{m,2}}{R_{m,1} + R_{m,2}}$$

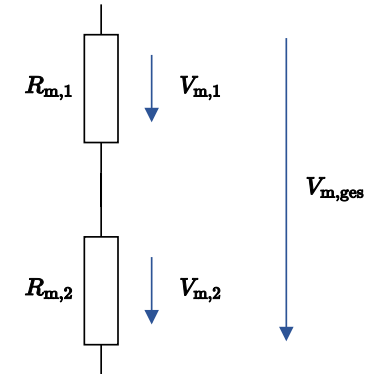


Rechnen mit magnetischen Netzwerken III

Spannungsteiler

$$\frac{V_{m,1}}{V_{m,2}} = \frac{R_{m,1}}{R_{m,2}}$$

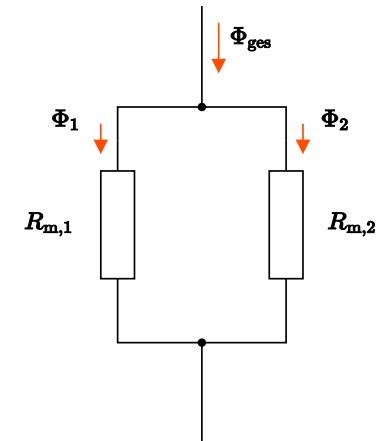
$$\frac{V_{m,1}}{V_{m,ges}} = \frac{R_{m,1}}{R_{m,1} + R_{m,2}}$$



Stromteiler

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{\Lambda_{m,1}}{\Lambda_{m,2}} = \frac{R_{m,2}}{R_{m,1}}$$

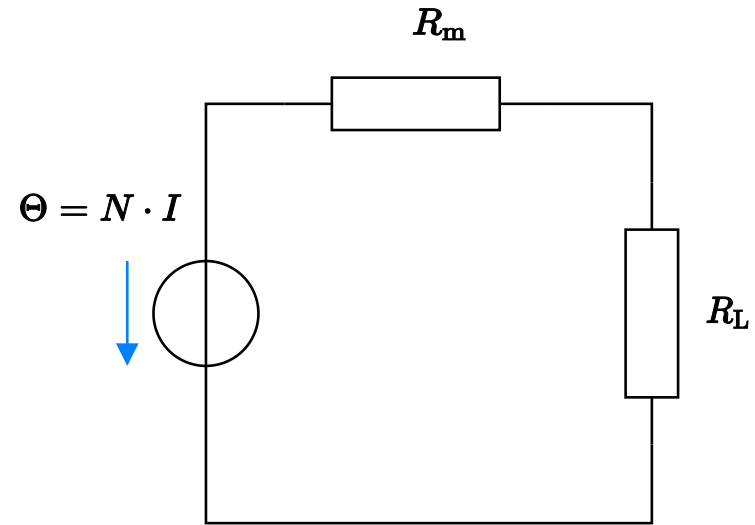
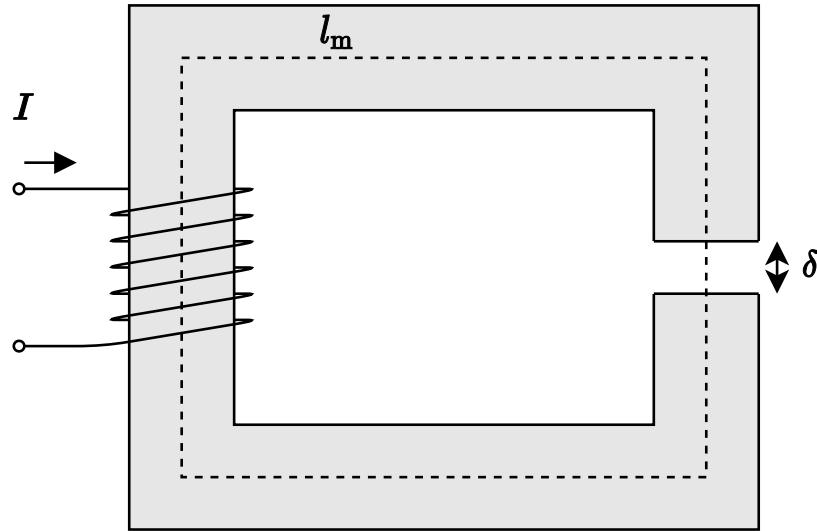
$$\frac{\Phi_1}{\Phi_{ges}} = \frac{\Lambda_{m,1}}{\Lambda_{m,1} + \Lambda_{m,2}} = \frac{R_{m,2}}{R_{m,1} + R_{m,2}}$$



Vergleich zwischen magnetischen und elektrischen Kreis II

	Magnetischer Kreis	Elektrischer Kreis
Serienschaltung von Widerständen	$R_{m,ges} = \sum_i R_{m,i}$	$R_{ges} = \sum_i R_i$
Parallelschaltung von Widerständen	$\frac{1}{R_{m,ges}} = \sum_i \frac{1}{R_{m,i}}$	$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$
Maschenregel	$\sum_{\text{Masche}} V_{m,i} - \Theta = 0 \iff \oint \vec{H} d\vec{s} = \Theta$	$\sum_{\text{Masche}} U = 0 \iff \oint \vec{E} d\vec{s} = 0$
Knotenregel	$\sum_{\text{Knoten}} \Phi = 0 \iff \oiint \vec{B} d\vec{A} = 0$	$\sum_{\text{Knoten}} I = 0 \iff \oiint \vec{J} d\vec{A} = 0$

Magnetischer Kreis am Luftspalt



Erhöhung des magnetischen Widerstandes durch Luftspalt

Um Streufluss gering zu halten ist üblicherweise $\delta \ll l_m$

$$R_m = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \cdot \frac{l_m - \delta}{A} \approx \frac{1}{\mu_r \mu_0} \cdot \frac{l_m}{A} \quad R_L = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\delta}{A}$$

Anwendung (Elektromotoren, Elektromagnete, etc.)

Beispiel: Elektromagnet

Betrachtet wird ein Elektromagnet, bestehend aus einem Joch und einem Anker. Joch und Anker bestehen aus einem hochpermeablen Material $\mu \rightarrow \infty$, womit nur der magnetische Widerstand des Luftspaltes $R_{m,L}$ berücksichtigt werden muss. Der Luftspalt δ ist sehr klein im Vergleich zum übrigen Aufbau.

Änderung der mechanischen Energie gleich Änderung der magnetischen Energie

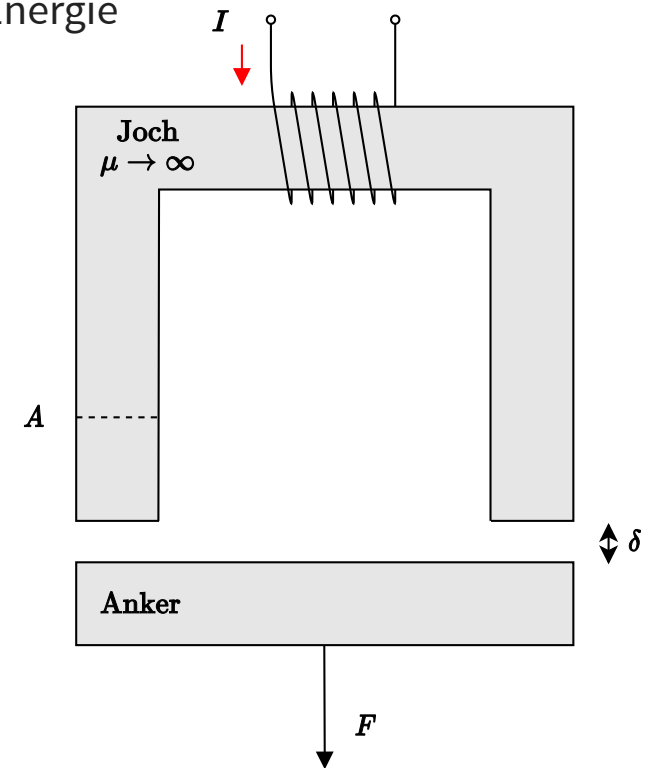
$$\Delta W_{\text{mechanisch}} = \Delta W_{\text{magnetisch}}$$

$$F \cdot \Delta s = \frac{1}{2} H B \cdot \Delta V$$

$$F \cdot \Delta s = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0} \cdot A \cdot \Delta s$$

Damit ergibt sich für die Kraft auf den Anker

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Theta^2}{R_{m,L}^2} \cdot \frac{1}{A\mu_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2 \cdot I^2}{R_{m,L}} \cdot \frac{1}{\delta}$$



Energieinhalt des Magneteischen Kreises

Bestimmung der im magnetischen Kreis gespeicherten Energie

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} \, dV$$

Annahme: Im magnetischen Kreis sind \vec{H} und \vec{B} als parallel und homogen

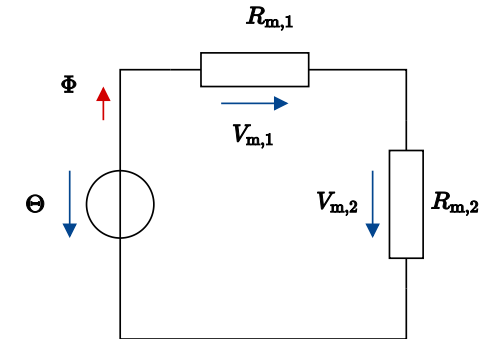
$$W = \frac{1}{2} \cdot H \cdot B \cdot V = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Theta}{l} \cdot \frac{\Phi}{A} \cdot \underbrace{l \cdot A}_V = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \Phi$$

Gespeicherte Energie im magnetischen Widerstand (z.B. Luftspalt oder Eisenpaket)

$$W = \frac{1}{2} R_m \Phi^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_m^2}{R_m}$$

Gespeicherte Energie im gesamten magnetischen Kreis

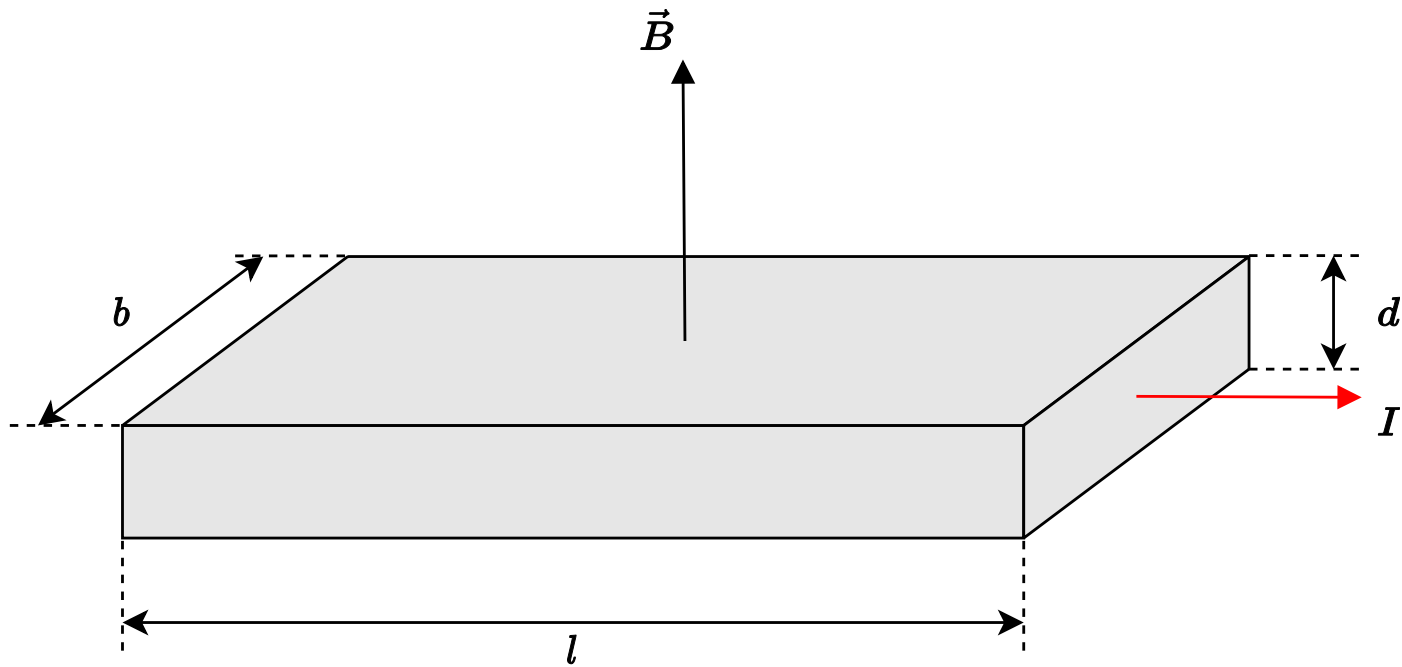
$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Theta^2}{R_m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(N \cdot I)^2}{R_m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{R_m} \cdot I^2 = \frac{1}{2} L I^2$$



Beispiel: Hall-Effekt

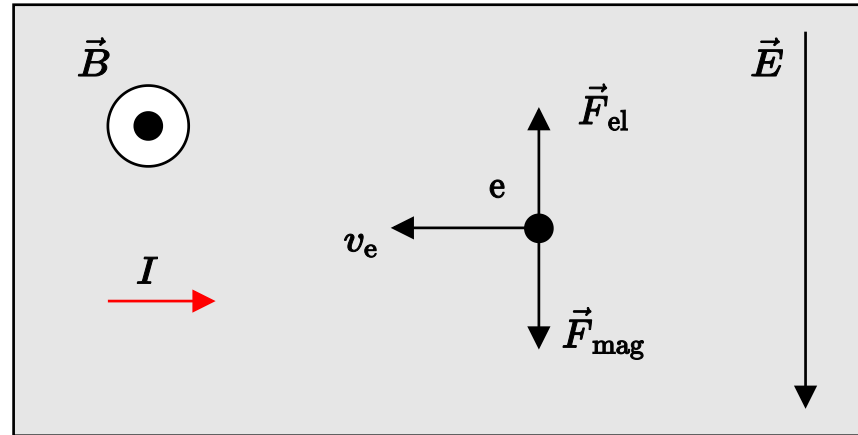
Hall-Effekt - Aufbau

Betrachten eines Metallstreifens in einem Magnetfeld



- Stromfluss I in Längsrichtung
- Magnetfeld \vec{B} senkrecht zur Oberfläche

Hall-Effekt - Kraft auf freie Ladungsträger



Magnetfeld \vec{B} bewirkt Kraft \vec{F}_{mag} auf freie Elektronen e

Bewegungsrichtung (Geschwindigkeit \vec{v}_e) der Elektronen entgegengesetzt der technischen Stromrichtung I

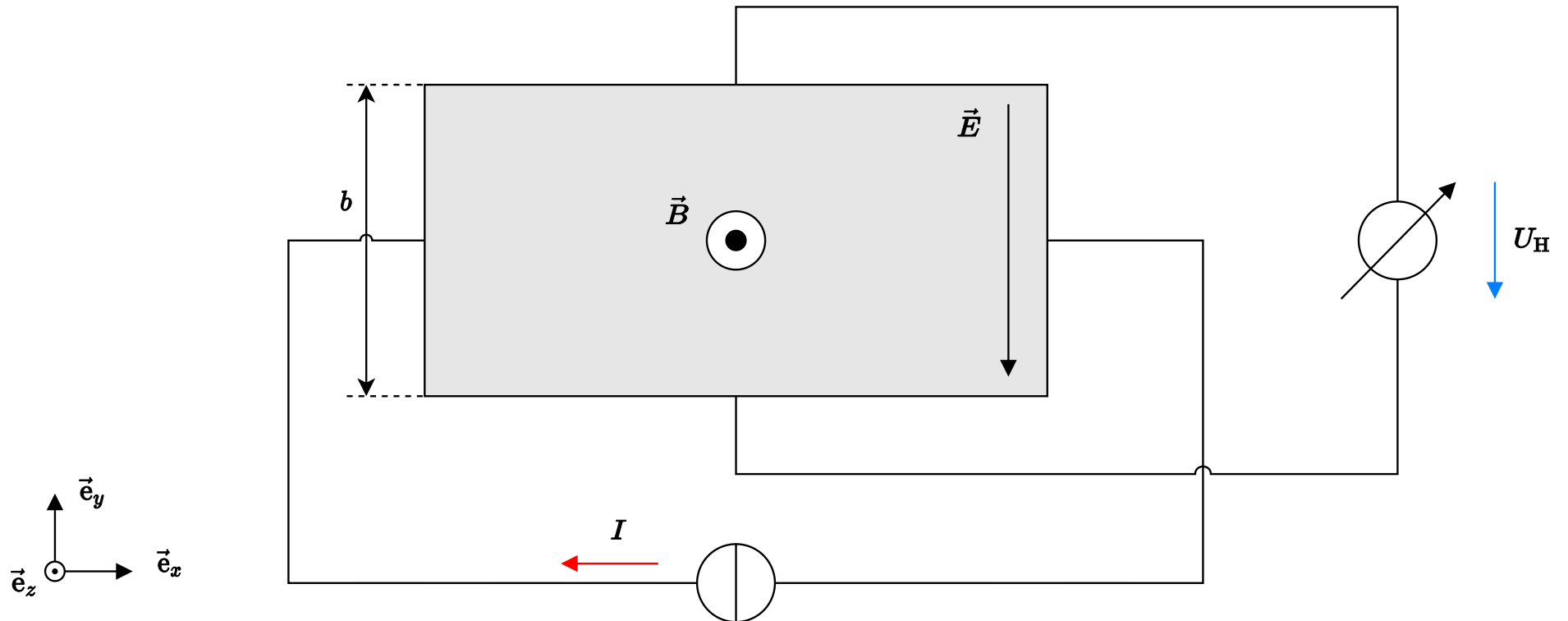
Kraft auf Elektronen bewirkt Elektronenüberschuss an Unterseite und Elektronenmangel an Oberseite

Verschiebung der Ladungen führt zu Elektrisches-Feld \vec{E} und Kraft auf Elektronen

Im Kräftegleichgewicht gilt: $\vec{F}_{\text{el}} = -\vec{F}_{\text{mag}}$

$$Q \cdot \vec{E} = -Q \cdot (\vec{v}_e \times \vec{B}) \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{v}_e \times \vec{B}$$

Hall-Effekt - Schematischer Versuchsaufbau I



Messung des Elektrischen-Feldes \vec{E} mittels Voltmeter (Hall-Spannung U_H)

$$U_H = \int \vec{E} \, d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{e}_y \cdot b$$

Hall-Effekt - Schematischer Versuchsaufbau II

Ladungsträgergeschwindigkeit:

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{J}}{\rho}$$

ρ : Raumladungsdichte

$$\rho = n \cdot Q = -n \cdot e$$

n : Zahl der freien Ladungsträger pro Volumeneinheit (materialabhängig)

e : Elementarladung

\vec{J} : Stromdichtevektor

$$\vec{J} = \frac{I}{bd} \cdot \vec{e}_x$$

Hall-Effekt - Berechnung der Hall-Spannung

Berechnung der Hall-Spannung

$$U_H = -\vec{E} \cdot \vec{e}_y \cdot b = (\vec{v}_e \times \vec{B}) \cdot \vec{e}_y \cdot b = \left(\frac{-\vec{J}}{n \cdot e} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{e}_y \cdot b = \frac{1}{n \cdot e} \cdot \left(\frac{-I}{bd} \cdot \vec{e}_x \times \vec{B} \right) \cdot b = \frac{1}{n \cdot e} \cdot \frac{IB}{d}$$

$$U_H = R_H \cdot \frac{IB}{d}$$

R_H : Hall-Konstante (materialabhängig)

Hall-Konstanten für einige Metalle

Metall	Anzahl der Ladungsträger n [$10^{22}/\text{cm}^3$]	Hall-Konstante R_H [$10^{-12}\text{m}^3/\text{C}$]
Natrium	2.5	250
Kupfer	11.0	56.7
Silber	7.4	84.4
Gold	8.7	71.7

Referenzen

[1] M. Albach, *Elektrotechnik*, Pearson Verlag.

[2] G. Hagmann, *Grundlagen der Elektrotechnik*, Aula Verlag.

[3] D. Metz, U. Naundorf, J. Schlabbach, *Kleine Formelsammlung Elektrotechnik*, Fachbuchverlag Leipzig.

[4] R. Pregla, *Grundlagen der Elektrotechnik*, Hüthig Verlag.