Stromdichtefeld

Stromdichtefeld

Eigenschaften des elektrostatischen Feldes

Keine Veränderung der Ladungsträger im Raum

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$$

Aus dieser Tatsache folgt

- Kein elektrostatisches Feld zwischen zwei leitend verbundenen Punkten
- Keine Potentialdifferenz zwischen zwei leitend verbundenen Punkten ($\Delta\varphi = 0$)
- Keine Spannung zwischen zwei leitend verbunden Punkten
- Oberflächen von Leitern sind Äquipotentialflächen
- Leiterinnere ist feldfrei
- Elektrostatisches Feld existiert nur in Nicht-Leitern (z.B. Vakuum, Luft, etc.)

Definition von Strom und Stromdichte

Veränderung der Ladungsträger entspricht *elektrischem Strom*

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I$$

Berücksichtigung der räumlichen Verteilung der Ladungsträger mittes *Stromdichte* als Strom pro Fläche

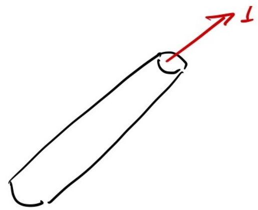
$$J = \frac{I}{A}$$

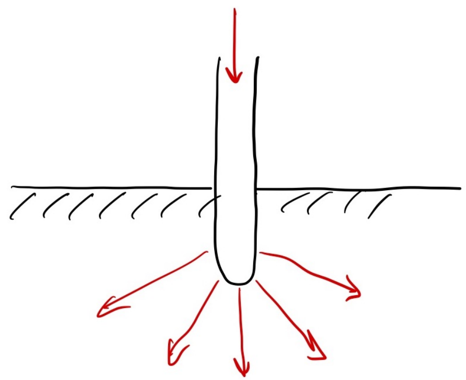
Bewegungsrichtung der Ladungsträger ist vektorielle Größe => Stromdichte ebenfalls vektorielle Größe

$$I = \iint\limits_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

Zussammenhang mit der Ladungsträgergeschwindigkeit

$$\vec{J} = e \cdot n \cdot \vec{v}$$





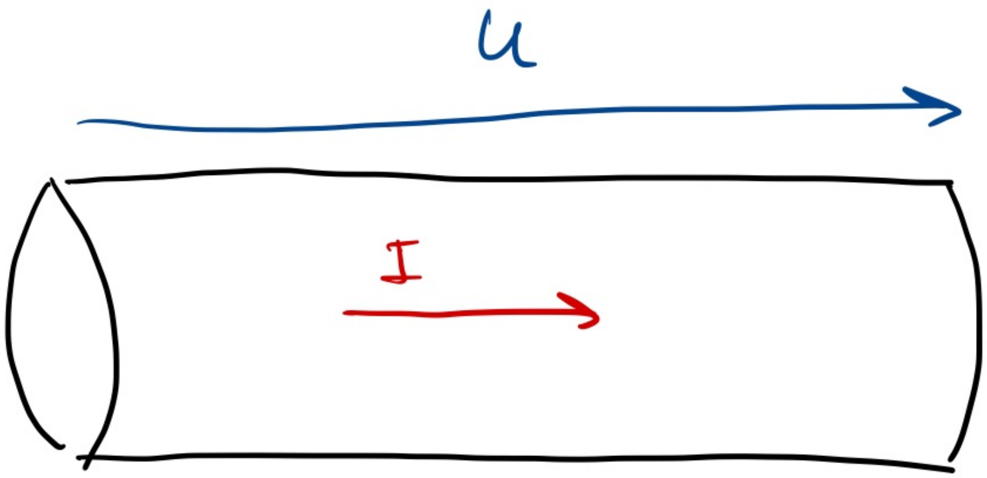
Quellenfreiheit des strömungsdynamischen Feldes

Betrachtung eines Volumenlementes im Strömungsdynamischen Feld

Ladungsträger pro Fläche, die in das Element eintritt muss im gleichen Zeitabschnitt wieder austreten

$$\oint\!\!\!\!\oint_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$$

Strömungsdynamische Feld ist *quellenfrei*



Ohm'sches Gesetz

Ursache für Bewegung der Ladungsträger ist Kraft auf Ladungsträger

Kraft wird verursacht durch äußeres elektrisches Feld

Ladungsträgergeschwindigkeit ist proportional zum elektrischen Feld

$$|\vec{v}| \sim |\vec{E}|$$

Ladungsträgergeschwindigkeit folgt Richtung des elektrischen Feldes womit

$\vec{v} = c \cdot \vec{E}$ mit Proportionalitätskonstante c

Somit folgt für den Zusammenhang von

$$\frac{\vec{J}}{e \cdot n} = c \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \underbrace{e \cdot n \cdot c}_{\text{Materialkonstante}} \cdot \vec{E}$$

Ohm'sches Gesetz mit spezifischem Leitwert κ

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}}$$

Spezifischer Leitwert und spezifischer Widerstand

Materialkonstante κ entspricht spezifischem Leitwert

$$[\kappa] = \frac{\mathrm{A/m^2}}{\mathrm{V/m}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$$

Spzifischer Widerstand entspricht Kehrwert des spezifischen Leitwertes

$$\varrho = \frac{1}{\kappa} \quad \text{mit} \quad [\varrho] = \Omega\mathrm{m}$$

Spezifische Leitwerte einiger Materialien [Albach - *Elektrotechnik*]

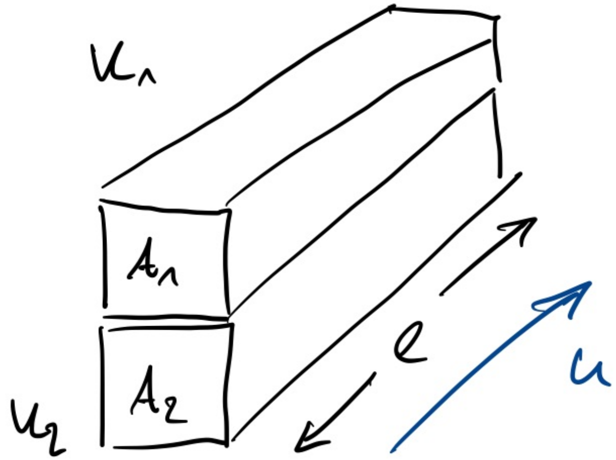
Material	κ [S/m]
Aluminium	$3{,}5 \cdot 10^7$
Kupfer	$5{,}6 \cdot 10^7$
Eisen	$1{,}0 \cdot 10^7$
Silber	$6{,}25 \cdot 10^7$
Gold	$4{,}4 \cdot 10^7$

Parallelschaltung von zwei Materialien

Betrachtung des Stromflusses durch zwei parallele Materialien über der gleichen Spannung

In beiden Materielen besteht das gleiche elektrische Feld

$$E_1 = \frac{U}{l} = E_2 = E$$



Daraus folgt für die jeweiligen Stromdichten

$$J_1 = \kappa_1 \cdot E \qquad J_2 = \kappa_2 \cdot E$$

$$\frac{J_1}{\kappa_1} = \frac{J_2}{\kappa_2}$$

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

Vergleiche: Stromteilerschaltung

Reihenschaltung von zwei Materialien

Betrachtung des Stromflusses durch zwei Materialien mit gleichem Querschnitt an der Schnittstelle

Stromfluss und Querschnitt in beiden Materialen gleich

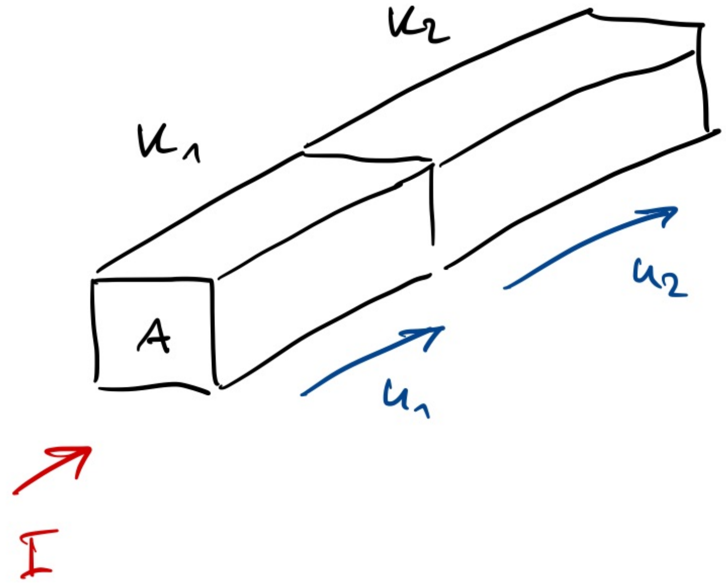
$$\Rightarrow \quad J_1 = J_2 = J$$

Damit folgt für die jeweiligen E-Felder

$$E_1 = \frac{J}{\kappa_1} \qquad E_2 = \frac{J}{\kappa_2}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

Vergleiche: Spannungsteilerschaltung



Allgemeine Grenzflächen von zwei Materialien

Tangentialkomponente

$$\frac{J_{1,||}}{J_{2,||}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

$$E_{1,||} = E_{2,||}$$

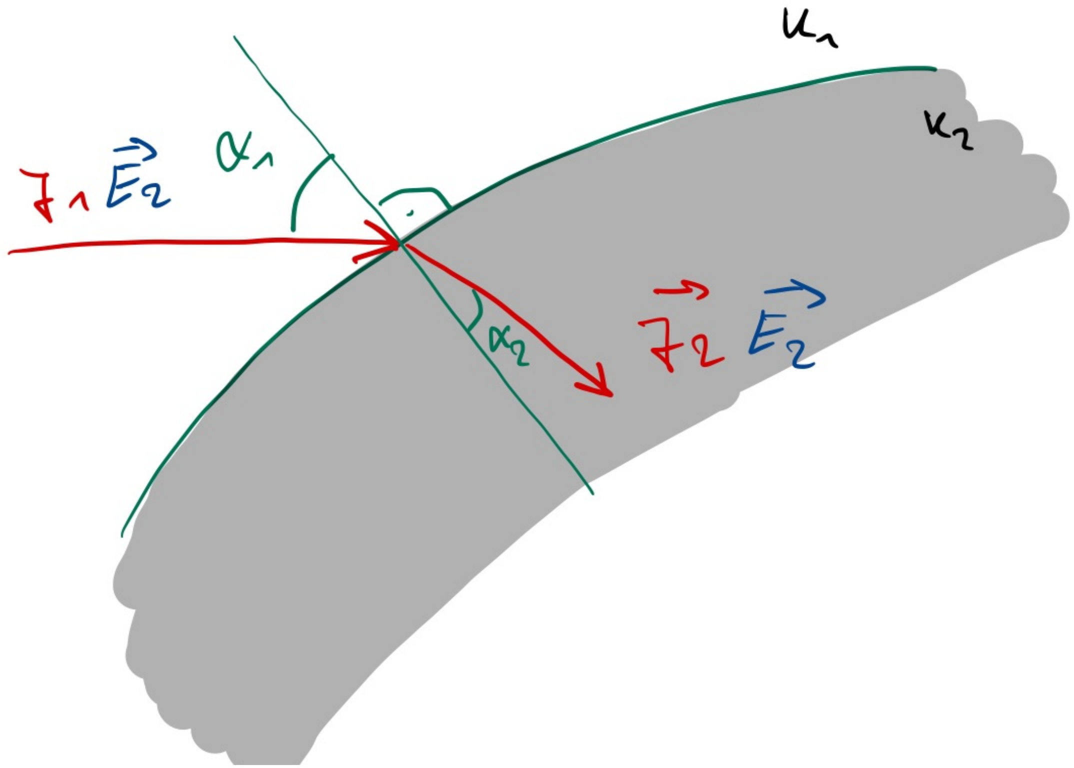
Normalkomponente

$$J_{1,\perp} = J_{2,\perp}$$

$$\frac{E_{1,\perp}}{E_{2,\perp}} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

Allgemeines Brechungsgesetz

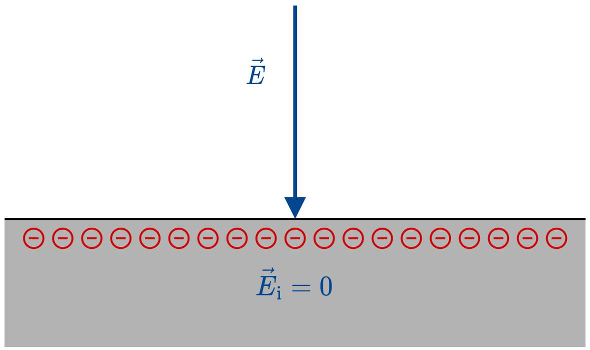
$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$



Elektrische Feldlinien auf Leiteroberflächen

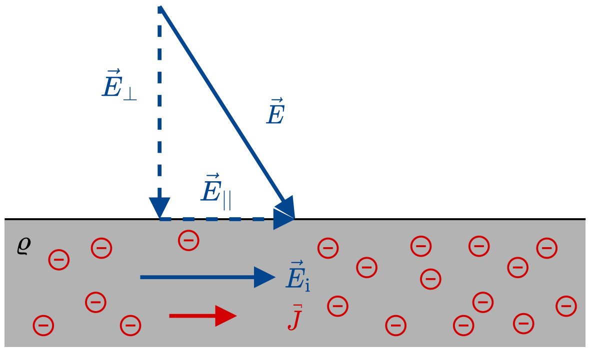
Elektrostatik

- Kein Stromfluss im Leiter
- Ladungsträger auf Leiteroberfläche
- Leiterinnere ist feldfrei $\vec{E}_\mathrm{i} = 0$
- Elektrische Feldstärkevektoren senkrecht auf Leiteroberfläche, d.h. $\vec{E}_{||} = 0$



Stromdichtefeld

- Ladungsträgerbewegung im Leiter: Stromdichte $\vec{J}$
- E-Feld im Leiterinneren $\vec{E}_\mathrm{i} = \vec{E}_{||} = \varrho \cdot \vec{J}$
- Elektrische Feldstärkevektoren nicht senkrecht auf Leiteroberfläche



Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes

Feldstärkevektoren von elektrischem Feld und Stromdichte-Feld zeigen in die gleiche Richtung

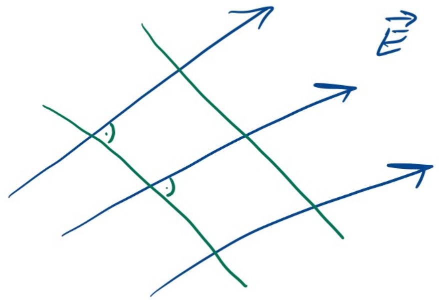
$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \quad \text{bzw.} \quad \vec{E} = \varrho \cdot \vec{J}$$

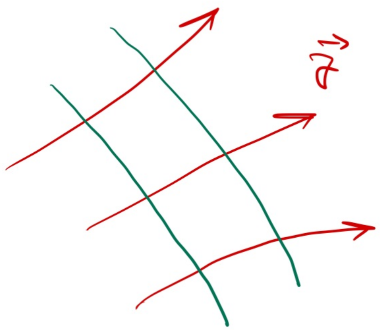
Feldstärkevektoren des elektrischen Feldes stehen senkrecht auf Äquipotentialflächen

Folglich stehen Feldstärkevektoren der Stromdichte ebenfalls senkrecht auf Äquipotentialflächen

Damit ist das Stromdichte-Feld ebenfalls *wirbelfrei*

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0}$$





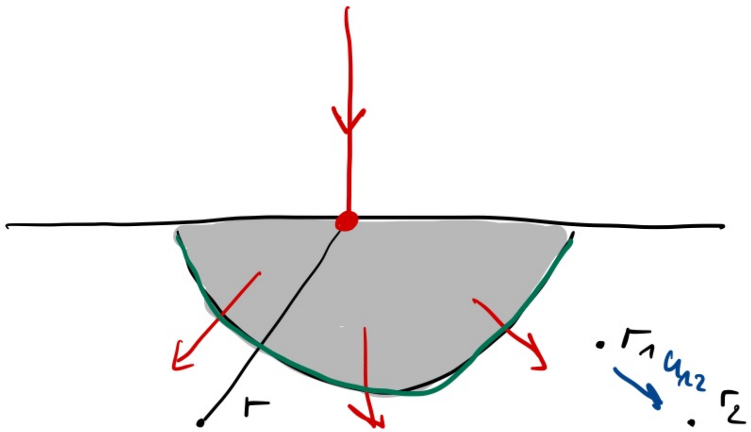
Beispiel: Punktueller Stromeintritt in Leiter

Stromdichte und elektrsiches Feld im Leiter mit spezifischem Widerstand ϱ

$$J(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \qquad E(r) = \varrho \cdot J(r) = \frac{\varrho \cdot I}{2\pi r^2}$$

Spannung zwischen zwei Äquipotentialflächen (Halbkugelschalen um Eintrittspunkt) im Abstand r_1 und r_2

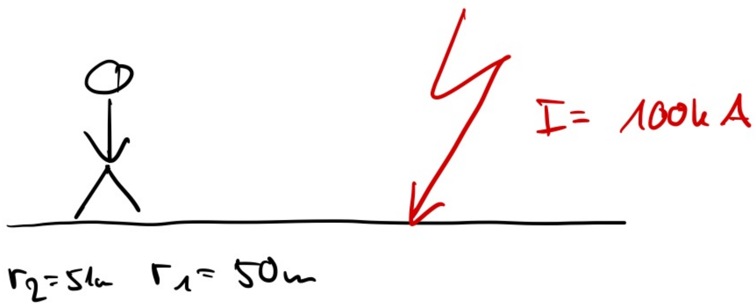
$$U_{12} = \int_{r=r_1}^{r_2} E(r)\,\mathrm{d}r = \int_{r=r_1}^{r_2} \frac{\varrho \cdot I}{2\pi r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\varrho \cdot I}{2\pi} \int_{r=r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\varrho \cdot I}{2\pi} \left[\frac{-1}{r}\right]_{r=r_1}^{r_2} = \frac{\varrho \cdot I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$



Beispiel: Schrittspannung bei Blitzeinschlag

Blitzeinschlag mit $I = 100\,\mathrm{kA}$. Person (Schrittbreite $1\,\mathrm{m}$) befindet sich in $50\,\mathrm{m}$ Entfernung zum Blitzeinschlag.

Betrachtung von zwei Szenarian der Bodenbeschaffenheit



1. Wiese im Flachland: $\varrho_{\mathrm{Flachland}} = 20\,\Omega\mathrm{m}$
2. Felsiges Gebirge: $\varrho_{\mathrm{Gebirge}} = 1\,\mathrm{k}\Omega\mathrm{m}$

Flachland $U = \frac{20\,\Omega\mathrm{m} \cdot 100\,\mathrm{kA}}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{50\,\mathrm{m}} - \frac{1}{51\,\mathrm{m}}\right) = 125\,\mathrm{V}$

Gebirge $U = \frac{1\,\mathrm{k}\Omega\mathrm{m} \cdot 100\,\mathrm{kA}}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{50\,\mathrm{m}} - \frac{1}{51\,\mathrm{m}}\right) = 6{,}24\,\mathrm{kV}$

Annahme: Körperwiderstand (Fuß-zu-Fuß mit entsprechendem Schuhwerk) $8\,\mathrm{k}\Omega$

Körperstrom im Flachland $I_{\mathrm{K}} = 125\,\mathrm{V}/8\,\mathrm{k}\Omega = 16\,\mathrm{mA}$ (deutlich spürbar)

Körperstrom im Gebirge $I_{\mathrm{K}} = 6{,}24\,\mathrm{kV}/4\,\mathrm{k}\Omega = 780\,\mathrm{mA}$ (tödlich)

Energie und Leistung I

Änderung der elektrischen Energie durch Ladungstransport

$$\Delta W_{\mathrm{e}} = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \Delta Q = U \cdot \Delta Q = U \cdot I \cdot \Delta t$$

Elektrische Leistung über einem Betrachtungszeitraum Δt

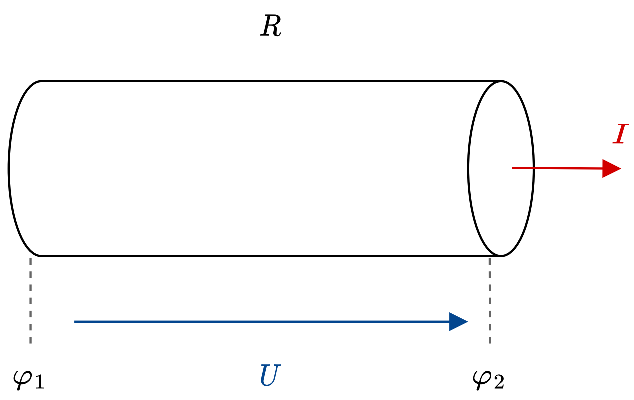
$$P = \frac{\Delta W_{\mathrm{e}}}{\Delta t} = U \cdot I \qquad \text{mit} \quad [P] = V \cdot \mathrm{A} = \mathrm{Watt} = W$$

Definition einer Momentanleistung

$$p(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W_{\mathrm{e}}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}$$

Gegeben eines Widerstandswertes R

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

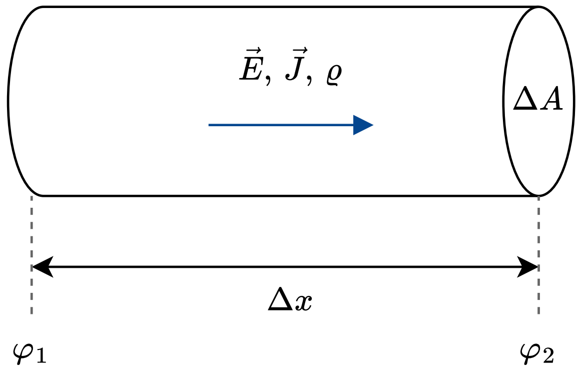


Energie und Leistung II

Betrachtung eines Volumenelementes $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta A$

Änderung (d.h. Verlust) der Leistung innerhalb dieses Volumenelemntes

$$\Delta P = U \cdot I = E \cdot \Delta x \cdot J \cdot \Delta A = \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot \Delta V$$



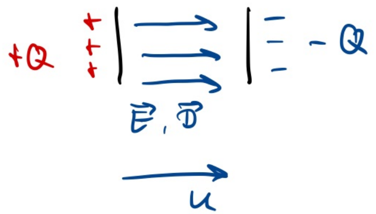
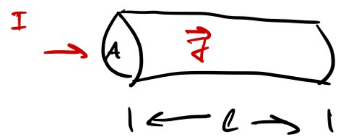
Definition der Verlustleistungsdichte

$$p_\mathrm{V} = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \vec{E} \cdot \vec{J} = \varrho \cdot |\vec{J}|^2 = \frac{|\vec{E}|^2}{\varrho}$$

Berechnung der Verlustleistung eines Volumens V

$$P = \iiint\limits_V p_\mathrm{V}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \vec{E} \cdot \vec{J}\,\mathrm{d}V$$

Vergleich zwischen elektrostatischem Feld und Stromdichte Feld

E-Feld	J-Feld
$\vec{E}$ - Feld 	$\vec{J}$ - Feld 
$\Psi = \iint_A \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$	$I = \iint_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$
$\Psi = C \cdot U$	$I = G \cdot U$
$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$	$G = \kappa \cdot \frac{A}{l}$
$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$	$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$
$\oiint_A \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q$ (Quellenfeld)	$\oiint_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$ (quellenfreies Feld)

Wichtige Eigenschaften des elektrostatischen und Stromdichte Feldes

$\vec{E}$, $\vec{D}$ und $\vec{J}$ *vektorielle* Feldgrößen

Potential φ *skalare* Feldgrößen

U, I *abstrakte* Größen: keine Feldgrößen aber mit Zählrichtung (dargestellt mittels Zählpfeile)

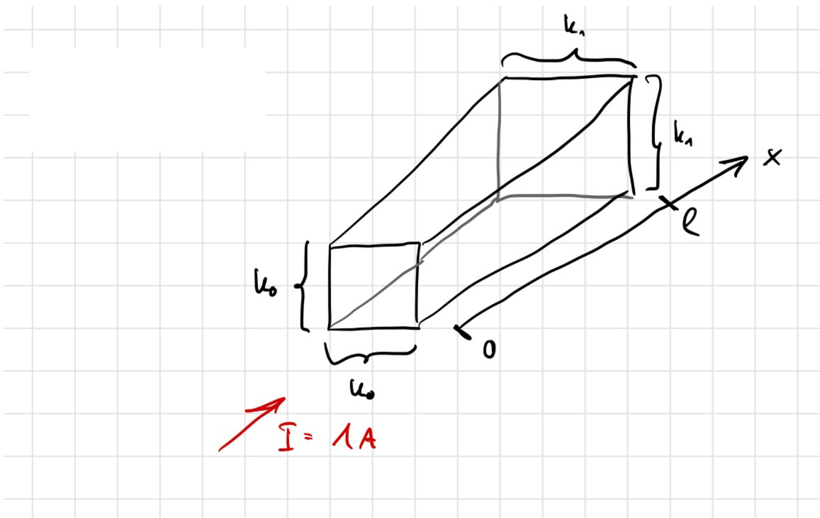
Ohm'scher Widerstand verschiedener Anordnungen

Ebene Symmetrie

Ebene Symmetrieeigenschaften

- Feldeigenschaften ändern sich nur entlang einer Achse $\vec{e}$
- Ebenen senkrecht zu dieser Achse ($\perp \vec{e}$) sind Äquipotentialflächen
- Sonderfall: Homogenes Feld, d.h. Betrag und Richtung der Feldstärkevektoren überall gleich

Beispiel: Stromfluss durch Pyramidenstumpf



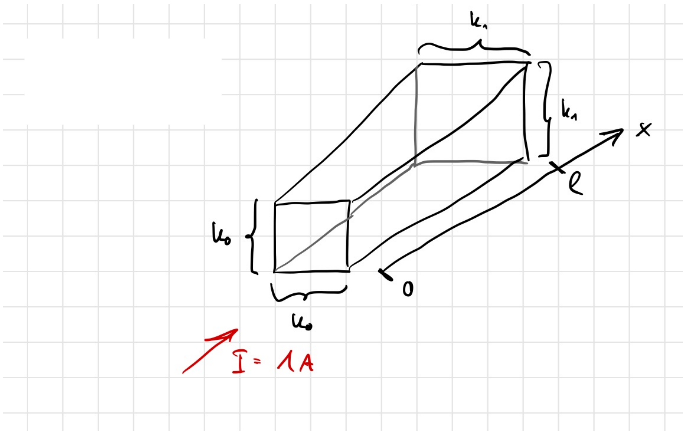
Ohm'scher Widerstand eines Pyramidenstumpfes I

$$l = 1\,\mathrm{m}$$

$$k_0 = 0{,}5\,\mathrm{mm}$$

$$k_1 = 1\,\mathrm{mm}$$

$$\varrho = 0{,}5\,\frac{\Omega\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$$



Parametrierung der ebenen Fläche

$$A(x) = (k(x))^2 = \left(k_0 + \frac{k_1 - k_0}{l} \cdot x\right)^2 = (a + b \cdot x)^2 \quad \text{mit} \quad a = k_0 \quad \text{und} \quad b = \frac{k_1 - k_0}{l}$$

Berechnung von Stromdichte und E-Feld

$$J(x) = \frac{I}{A(x)} = \frac{I}{(a + b \cdot x)^2} \quad \text{und} \quad E(x) = \frac{1}{\kappa} \cdot J(x) = \varrho \cdot J(x) = \frac{\varrho \cdot I}{(a + b \cdot x)^2}$$

Ohm'scher Widerstand eines Pyramidenstumpfes II

Spannung über der gesamten Anordnung

$$U = \int_{x=0}^{l} E(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{l} \frac{\varrho \cdot I}{(a + b \cdot x)^2}\,\mathrm{d}x = \varrho \cdot I \cdot \int_{x=0}^{l} \frac{1}{(a + b \cdot x)^2}\,\mathrm{d}x = \varrho \cdot I \cdot \left[\frac{-1}{a + b \cdot x} \cdot \frac{1}{b}\right]_{x=0}^{l} =$$

$$= \frac{\varrho \cdot I}{b} \cdot \left(\frac{-1}{a + b \cdot l} - \frac{-1}{a}\right) = \frac{\varrho \cdot I}{b} \cdot \frac{-a + a + b \cdot l}{(a + b \cdot l) \cdot a} = \frac{\varrho \cdot I \cdot l}{(a + b \cdot l) \cdot a} = \frac{\varrho \cdot I \cdot l}{k_0 \cdot k_1}$$

Berechnung des Widerstandes des Pyramidenstumpfes

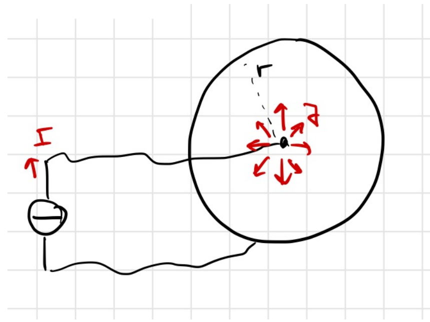
$$R = \frac{U}{I} = \frac{\frac{\varrho \cdot I \cdot l}{k_0 \cdot k_1}}{I} = \frac{\varrho \cdot l}{k_0 \cdot k_1} =$$

$$= \frac{0{,}5\,\frac{\Omega\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} \cdot 1\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{mm} \cdot 1\,\mathrm{mm}} = 1\,\Omega$$

Ohm'scher Widerstand einer Kugel

Bereich zwischen Innenelektrode (Kugel mit Radius r_1) und Außenelektrode (Hohlkugel mit Radius r_2) ist mit Material (Spezifischer Widerstand ϱ) gefüllt

Berechnung der Stromdichte und des elektrischen Feldes



$$J(r) = \frac{I}{4\pi r^2} \qquad E(r) = \varrho \cdot J(r) = \frac{\varrho \cdot I}{4\pi r^2}$$

Spannung zischen Innen- und Außenelektrode

$$U = \int\limits_{r=r_1}^{r_2} E(r)\,\mathrm{d}r = \int\limits_{r=r_1}^{r_2} \frac{\varrho \cdot I}{4\pi r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\varrho \cdot I}{4\pi} \cdot \int\limits_{r=r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\varrho \cdot I}{4\pi} \cdot \left[\frac{-1}{r}\right]_{r=r_1}^{r_2} = \frac{\varrho \cdot I}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

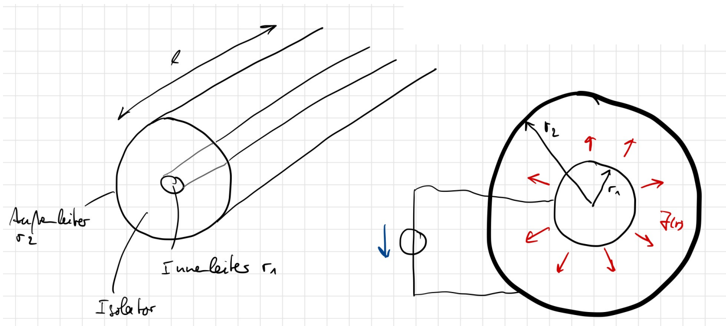
Berechnung des Widerstandes

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\frac{\varrho \cdot I}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{I} = \frac{\varrho}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Ohm'scher Widerstand eines Zylinders

Bereich zwischen Innenelektrode (Zylinder mit Radius r_1) und Außenelektrode (Hohlzylinder mit Radius r_2) ist mit Material (Spezifischer Widerstand ϱ) gefüllt (Situation bei einem Koaxialkabels)

Berechnung der Stromdichte und des elektrischen Feldes



$$J(r) = \frac{I}{A(r)} = \frac{I}{2\pi r \cdot l} \qquad E(r) = \varrho \cdot J(r) = \frac{\varrho \cdot I}{2\pi r \cdot l}$$

Spannung zischen Innen- und Außenelektrode

$$U = \int\limits_{r=r_1}^{r_2} E(r)\,\mathrm{d}r = \int\limits_{r=r_1}^{r_2} \frac{\varrho \cdot I}{2\pi r \cdot l}\,\mathrm{d}r = \frac{\varrho \cdot I}{2\pi \cdot l} \cdot \int\limits_{r=r_1}^{r_2} \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r = \frac{\varrho \cdot I}{2\pi \cdot l} \cdot \Big[\ln(r)\Big]_{r=r_1}^{r_2} = \frac{\varrho \cdot I}{2\pi \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Berechnung des Widerstandes

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\frac{\varrho \cdot I}{2\pi \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{I} = \frac{\varrho \cdot I}{2\pi \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Kondensator

Zusammenhang zwischen E- und J-Feld an Kapazitäten

Bisher: Stromdichte und E-Feld sind zeitunabhängige

Nun: Berücksichtigung von zeitabhängigen Feldgrößen $\vec{J}(t)$, $\vec{E}(t)$, $\vec{D}(t)$ und $\varphi(t)$

Gegeben: Beliebige Anordnung mit zeitlich fixer Gemoetrie

$$\iint\limits_{A} \vec{J}(t) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t) = \oint\!\!\!\oint\limits_{A} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{D}(t) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = C \cdot \int\limits_{C'} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{E}(t) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Mit diesem Zusammenhang lässt sich die zeitliche Veränderung von E- und J-Feld unter kapazitivem Einfluss beschreiben. Viel interessanter ist allerdings der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung bei Kapazitäten.

Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Kondensator

Definition eines beliebig zeitveränderlichen Stromes

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} C \cdot u(t) = C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t)$$

Damit ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Kondensator

$$\boxed{i(t) = C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t)}$$

Nach dem *Fundamentalsatz der Analysis* lässt sich dieser Zusammenhang auch umkehren

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int\limits_{t_0}^{t} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u(t_0)}$$

Oft ist nur der prinzipielle Zusammenhang von Interesse und man schreibt verkürzt

$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)\,\mathrm{d}t$$

Referenzen

[1] M. Albach, *Elektrotechnik,* Pearson Verlag.

[2] R. Pregla, *Grundlagen der Elektrotechnik,* Hüthig Verlag.