

Elektrostatisches Feld

Das Elektrische Feld

Das Coulomb'sche Gesetz I

Charles Augustin de Coulomb: Untersuchung der Kräfte zwischen zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 im Abstand r

Punktladung: Ladungsmenge Q auf einem Punkt im Raum konzentriert

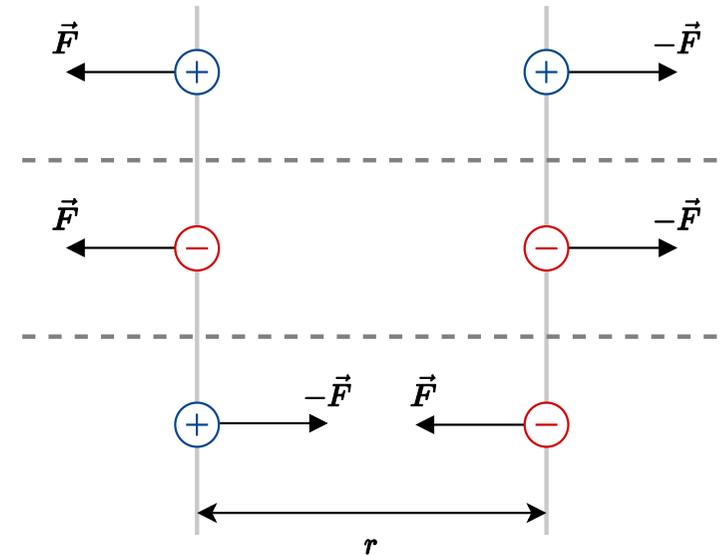
Experimentelle Ermittlung: Betrag der Kraft zwischen den Punktladungen

1. direkt proportional zur jeweiligen Ladungsmenge Q_1 bzw. Q_2
2. indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes r

$$F \sim \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Kraft zwischen zwei Punktladungen: *Coulomb-Kraft*

- Gleiche Ladungen stoßen sich ab
- Entgegengesetzte Ladungen ziehen sich an



Nach dem Newton'schen Prinzip *actio* *gegengleich* *reactio* ist die Kraft auf beide Punktladungen gleich.

Das Coulomb'sche Gesetz II

Ermittlung der Proportionalitätskonstante durch Messung

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

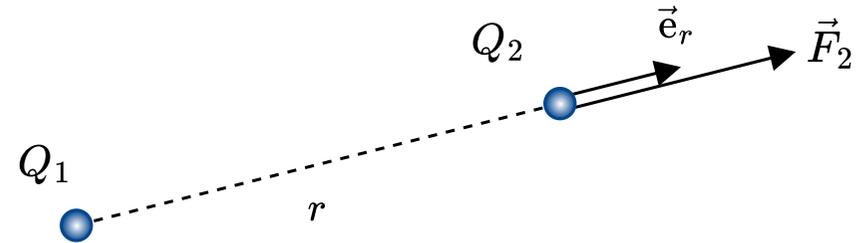
Dielektrizitätskonstante ϵ_0 mit

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

Kraft ist üblicherweise eine vektorielle Größe

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

\vec{e}_r : Einheitsvektor in Richtung der Verbindungsstrecke der beiden Punktladungen Q_1 und Q_2



Das elektrische Feld I

Ursache der Kraftwirkung auf Punktladung Q_1

$$\vec{F}_1 = Q_1 \cdot \vec{E}_2$$

\vec{E}_2 : Vektor der *elektrischen Feldstärke* verursacht von Q_2

Aus dem Coulomb'schen Gesetz folgt für das elektrische Feld der Ladung Q_2

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

Feldbegriff in der Physik:

- Beschreibung der räumlichen Verteilung einer physikalischen Größe
- Physikalische Größe kann gerichtet (Vektor) oder ungerichtet (Skalar) sein
- Nachweis durch Wirkung im Raum (z.B. durch Kraft)

Das elektrische Feld II

Das elektrische Feld entspricht dem Quotienten aus Kraft \vec{F} auf eine Punktladung Q

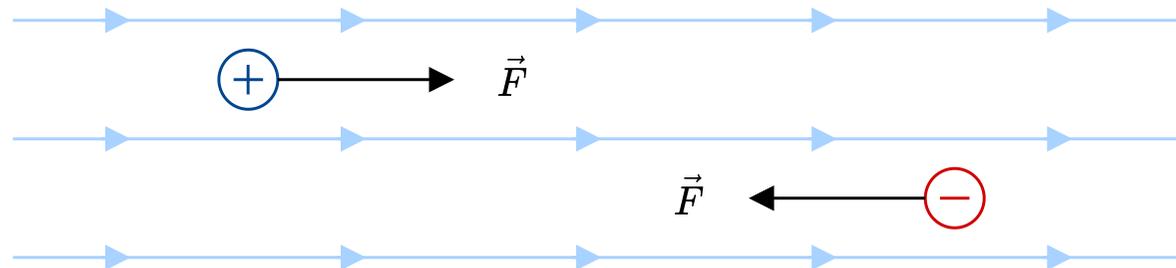
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

Einheit der elektrischen Feldstärke

$$[\vec{E}] = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Zusammenhang zwischen Richtung der Kraft und Richtung des E-Feldes

- Positive Punktladung ($Q > 0$): Feldstärkevektoren und die Kraftvektoren in die *gleiche* Richtung
- Negative Punktladung ($Q < 0$): Feldstärkevektoren und die Kraftvektoren in die *entgegengesetzte* Richtung



Das elektrische Feld einer Punktladung

Gegeben ist eine Punktladung Q im Ursprung (Nullpunkt) des Raumes

Das E-Feld dieser Punktladung an einem allgemeinen Punkt \vec{r}_P im Raum berechnet sich zu

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \text{mit} \quad r = |\vec{r}_P|$$

Dabei ist \vec{e}_r der Einheitsvektor im Kugelkoordinatensystem, der stets radial vom Ursprung weg zeigt

Befindet sich die Punktladung allgemein an einem Punkt \vec{r}_Q berechnet sich die Feldstärke zu

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q \quad \text{und} \quad r = |\vec{r}_P - \vec{r}_Q|$$

Überlagerung von elektrischen Feldern

Gegeben ist eine Anordnung mit mehreren Ladungen (im Beispiel zwei Punktladungen Q_1 und Q_2)

Das elektrische Feld \vec{E}_i jeder einzelnen Ladung ist bekannt

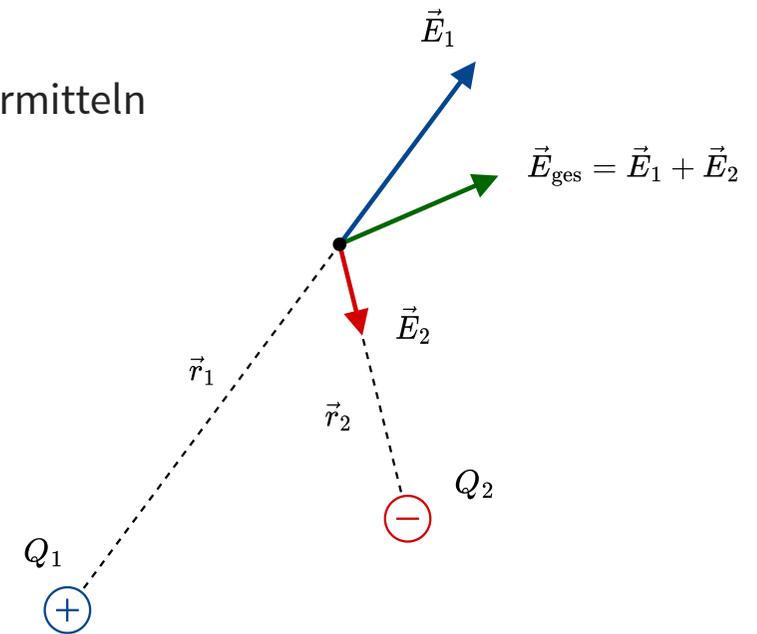
Die gesamte Feldstärke \vec{E}_{ges} lässt sich aus den einzelnen Feldstärken ermitteln

Nach dem Superpositions- oder Überlagerungsprinzip gilt

$$\vec{E}_{\text{ges}} = \sum_i \vec{E}_i$$

Im Beispiel

$$\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_1^2} \cdot \vec{r}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_2^2} \cdot \vec{r}_2$$



Wichtig: Die Überlagerung (Superposition) der einzelnen Feldstärken muss immer anhand der Feldstärkevektoren erfolgen und darf nicht anhand der Beträge der Feldstärken berechnet werden.

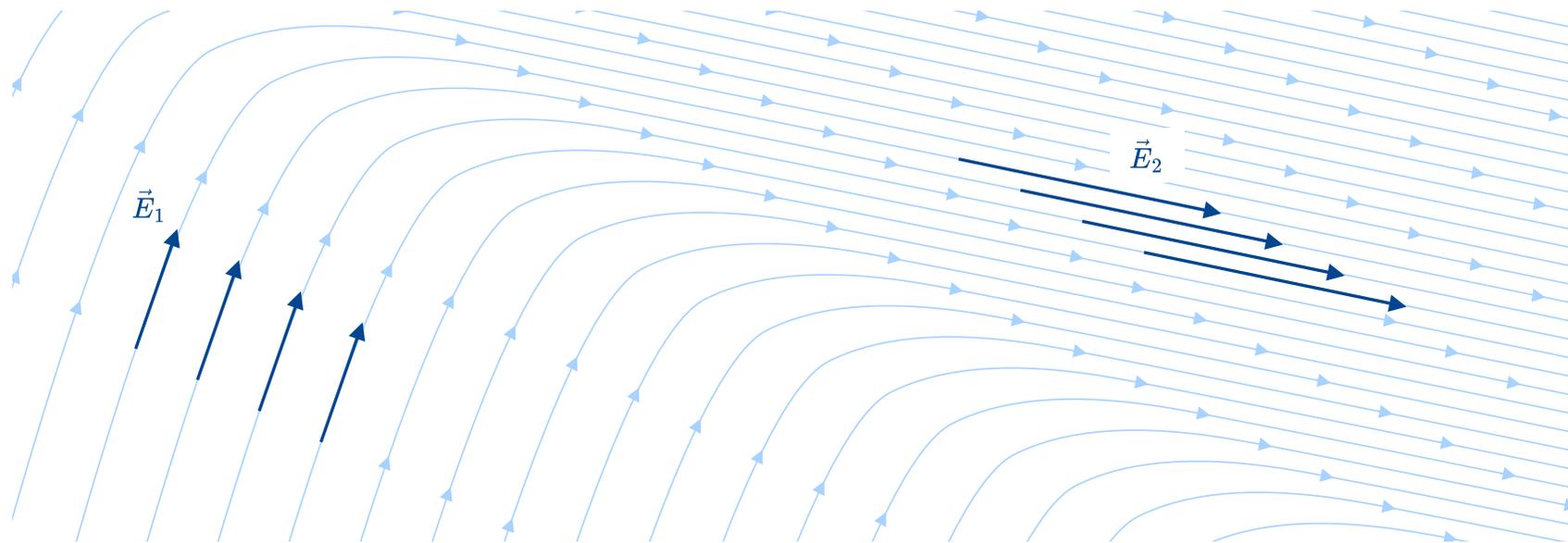
Feldlinien

Darstellung des Feldverlaufes mit Hilfe von Feldlinien

Tangenten der Feldlinien beschreiben Richtung des Feldstärkevektors

Dichte der Feldlinien beschreiben Stärke des Feldes (d.h. Länge des Feldstärkevektors)

Im Beispiel: Feldstärke $|\vec{E}_1|$ ist kleiner als $|\vec{E}_2|$, d.h. $|\vec{E}_1| < |\vec{E}_2|$



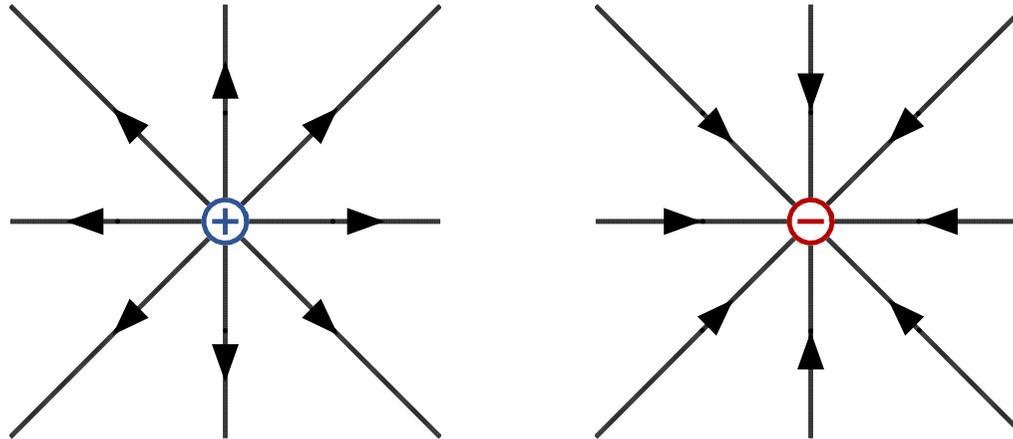
Feldlinien einer Punktladung

Feldlinien einer Punktladung sind radial gerichtet

- Positive Punktladung: Feldlinien zeigen von der Ladung weg
- Negative Punktladung: Feldlinien zeigen zur Ladung hin

Hohe Feldstärke nahe der Punktladung (hohe Dichte), niedrige Feldstärke in der Entfernung (geringe Dichte)

Ladung ist Anfang (bzw. Ende) der Feldlinie, d.h. E-Feld ist ein *Quellenfeld*

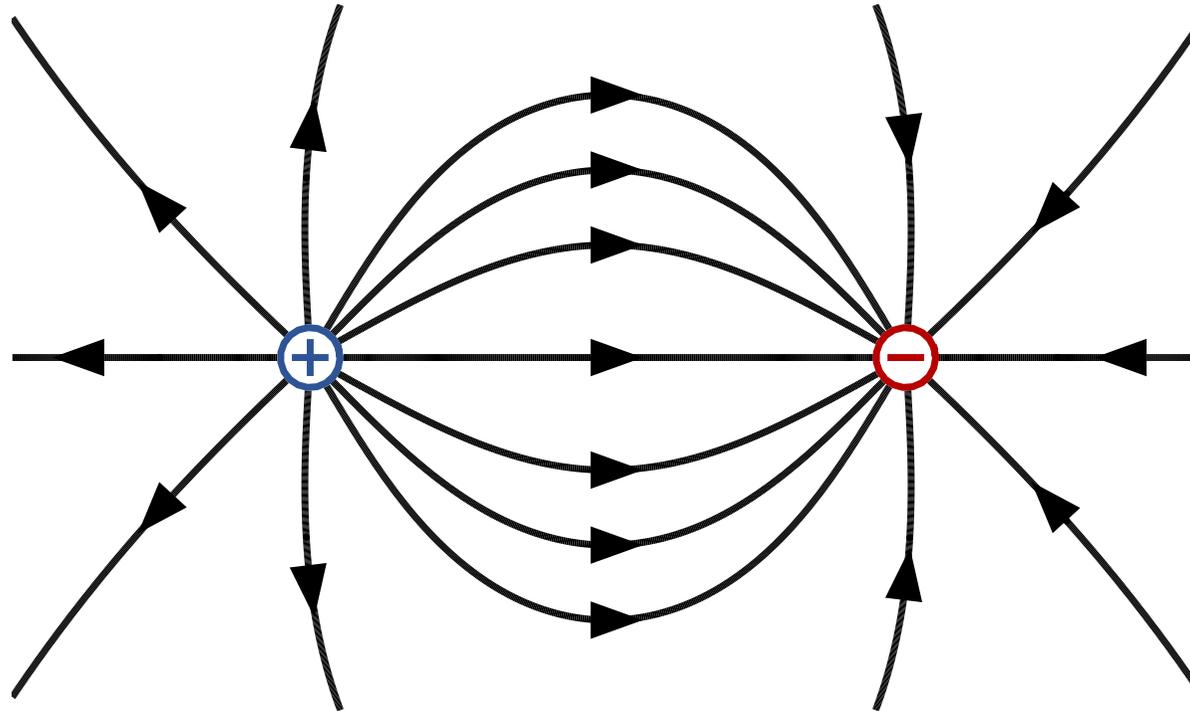


Feldlinien von zwei Punktladungen

Überlagerung der Feldstärken von zwei Punktladungen

Feldlinien zeigen von *Plus* nach *Minus*

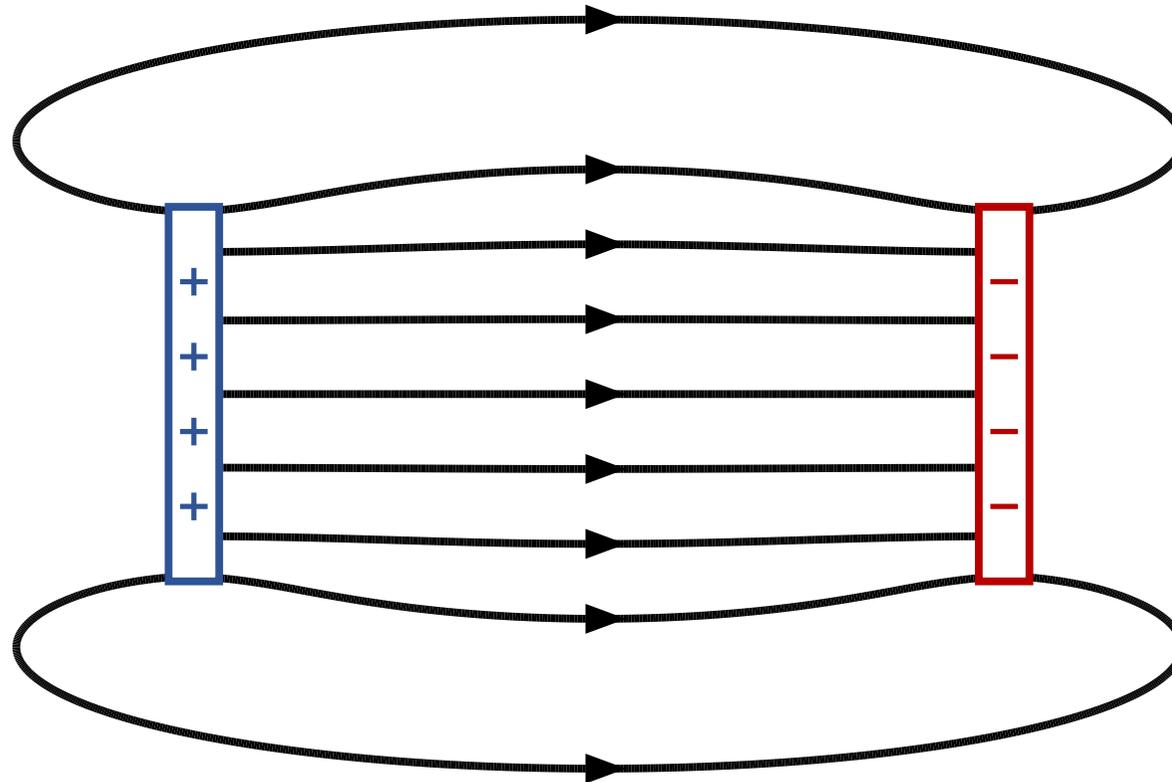
Betrag und Richtung des Feldes sind abhängig vom jeweiligen Punkt im Raum



Feldlinien eines Plattenkondensators

(Nahzu) homogenes E-Feld zwischen den Platten

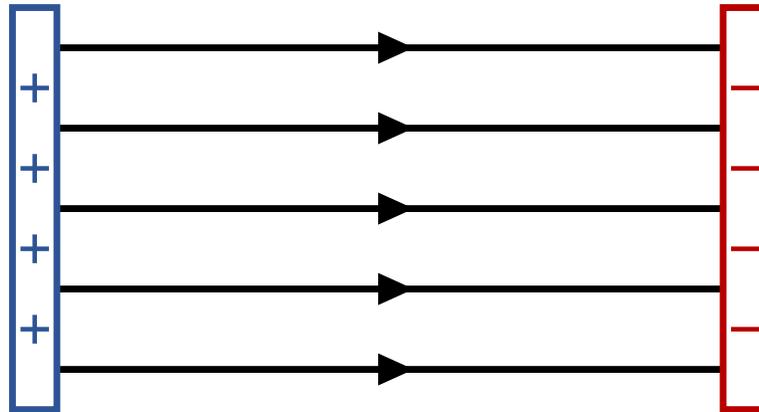
Streufeld im Außenbereich des Kondensators deutlich geringer



***Spezialfall:* Idealer Plattenkondensator**

In manchen Situationen ist die Annahme eines idealen Plattenkondensators hilfreich

- homogenes Feld im Innenbereich
- im Außenbereich feldfrei, d.h. Streufelder werden nicht berücksichtigt



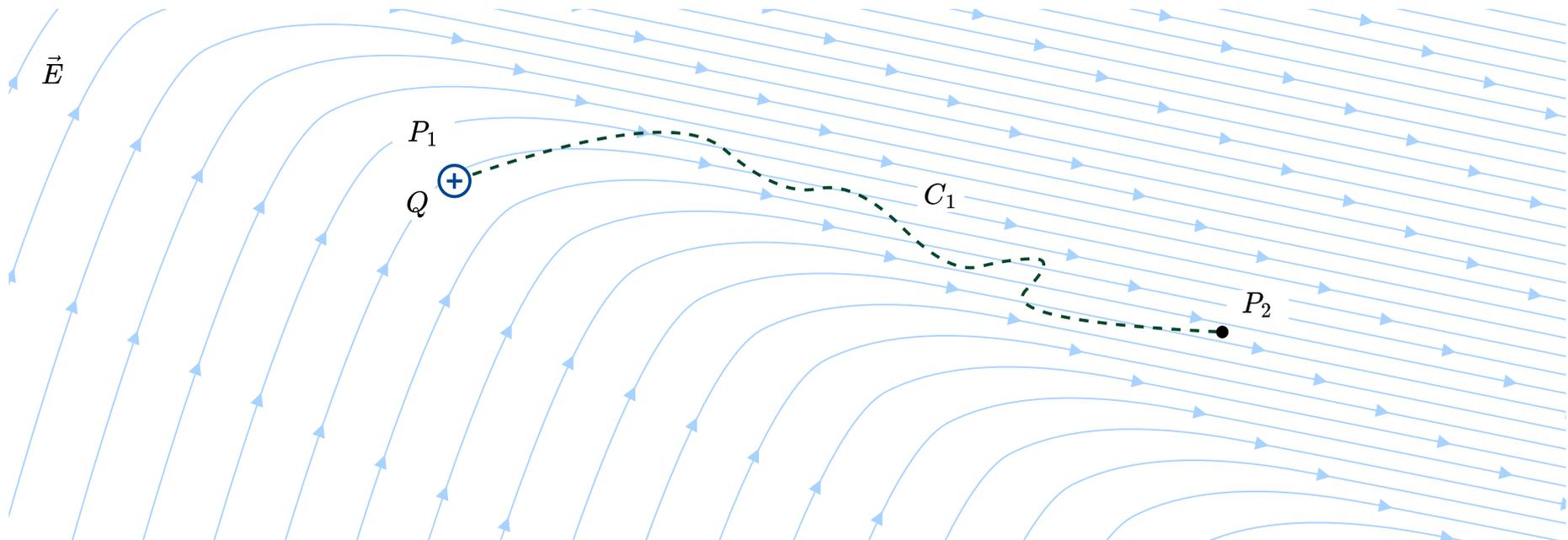
Das Elektrostatische Potential

Punktladung im Elektrischen Feld I

Elektrische Arbeit durch Bewegung der Punktladung entlang der Kontur C_1 vom Punkt P_1 zum Punkt P_2

$$W_{12} = \int_{C_1} \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = Q \cdot \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

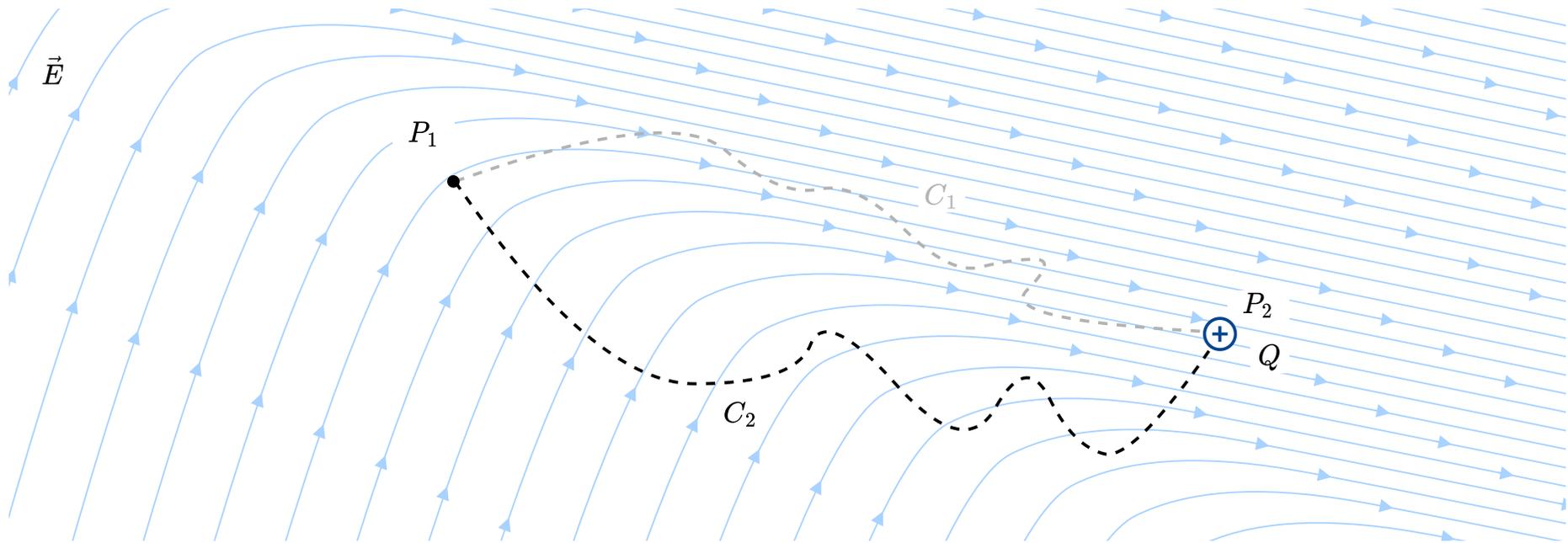
Elektrische Arbeit wird nur Weganteile parallel zum elektrischen Feld verrichtet (Skalarprodukt)



Punktladung im Elektrischen Feld II

Bewegung der Ladung zurück vom Punkt P_2 zu P_1 entlang einer anderen Kontur C_2

$$W_{21} = \int_{C_2} \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = \int_{P_2}^{P_1} \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = Q \cdot \int_{P_2}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Q \cdot \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

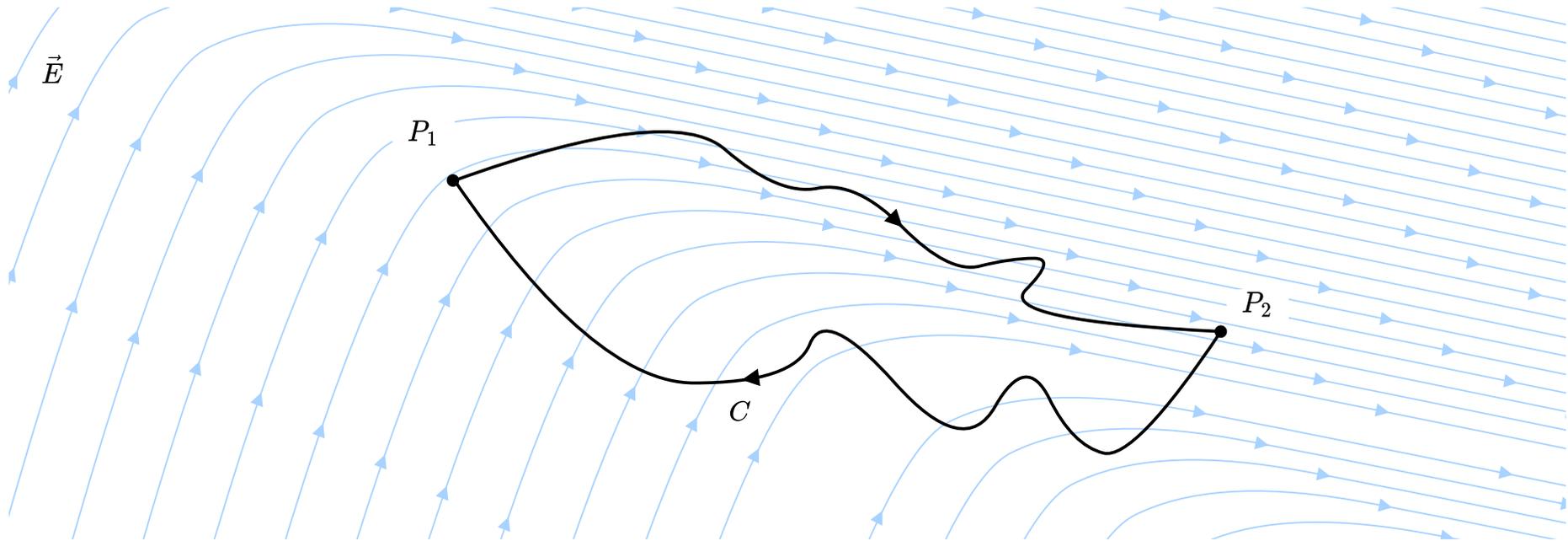


Punktladung im Elektrischen Feld III

Betrachtung der geschlossenen Kontur C (hier: bestehend aus den beiden Wegen C_1 und C_2)

Arbeit bei Bewegung entlang der geschlossenen Kontur C muss wegen Energieerhaltung Null sein

$$W_{\text{ges}} = Q \cdot \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \cdot \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + Q \cdot \int_{P_2}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \cdot \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} - Q \cdot \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \stackrel{!}{=} 0$$



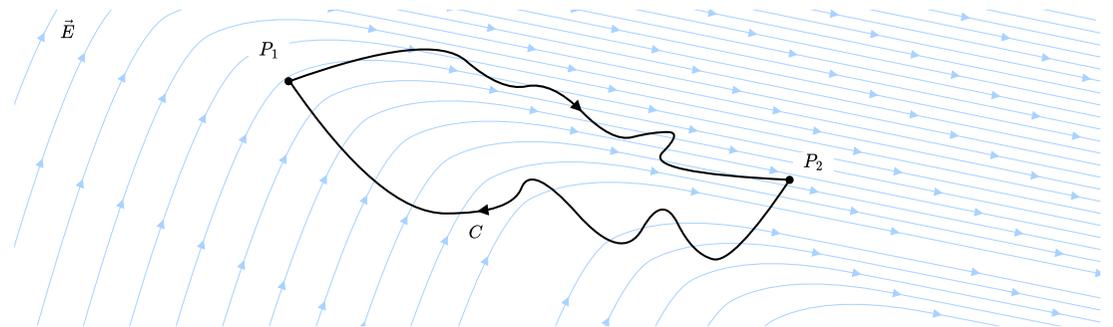
Wirbelfreiheit des Elektrischen Feldes

Somit folgt für das Ringintegral entlang eines geschlossenen Weges C über das elektrische Feld

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Damit besitzt das elektrische Feld folgende Eigenschaften

- wirbelfrei
- keine geschlossenen Feldlinien
- Potentialfeld (vgl. Gravitationsfeld)



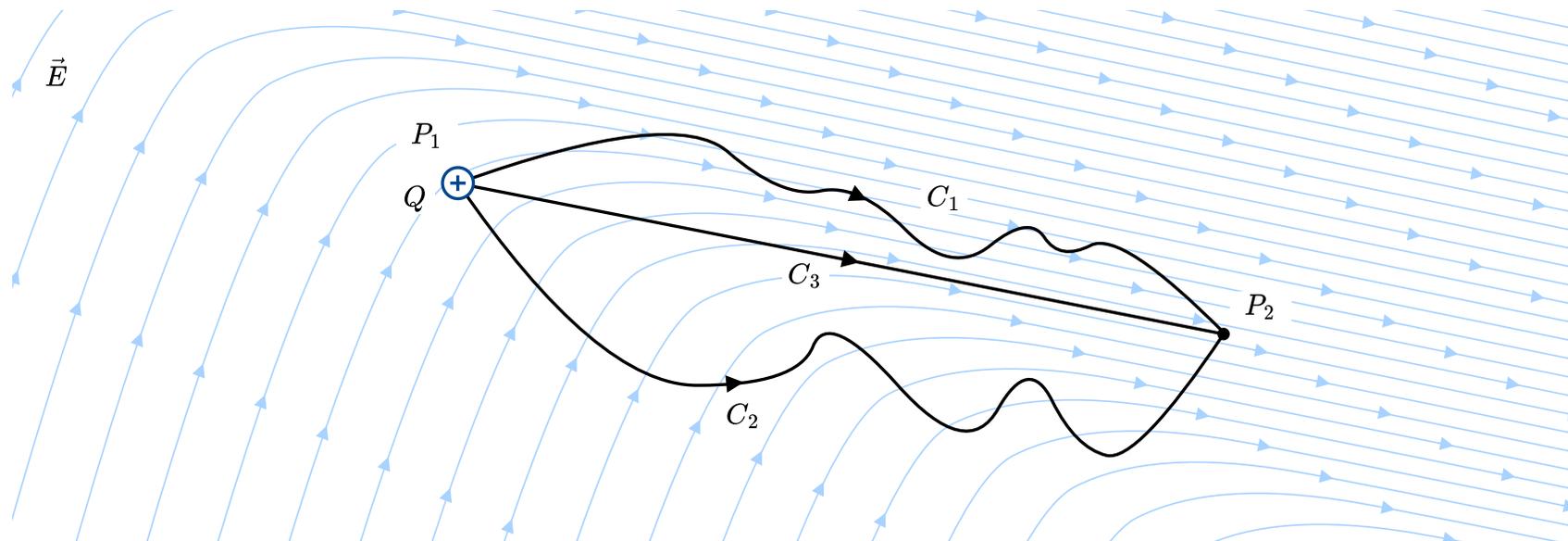
Das elektrostatische Potential I

Bewegung der Ladung Q vom Punkt P_1 zu P_2

Arbeit ist unabhängig von der Wahl des Weges (*hier*: Kontur C_1 , C_2 oder C_3)

$$W_{12} = Q \cdot \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \cdot \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \cdot \int_{C_3} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Elektrisches Feld ist Potentialfeld: Bewegung der Ladung führt zu Änderung der potentiellen Energie



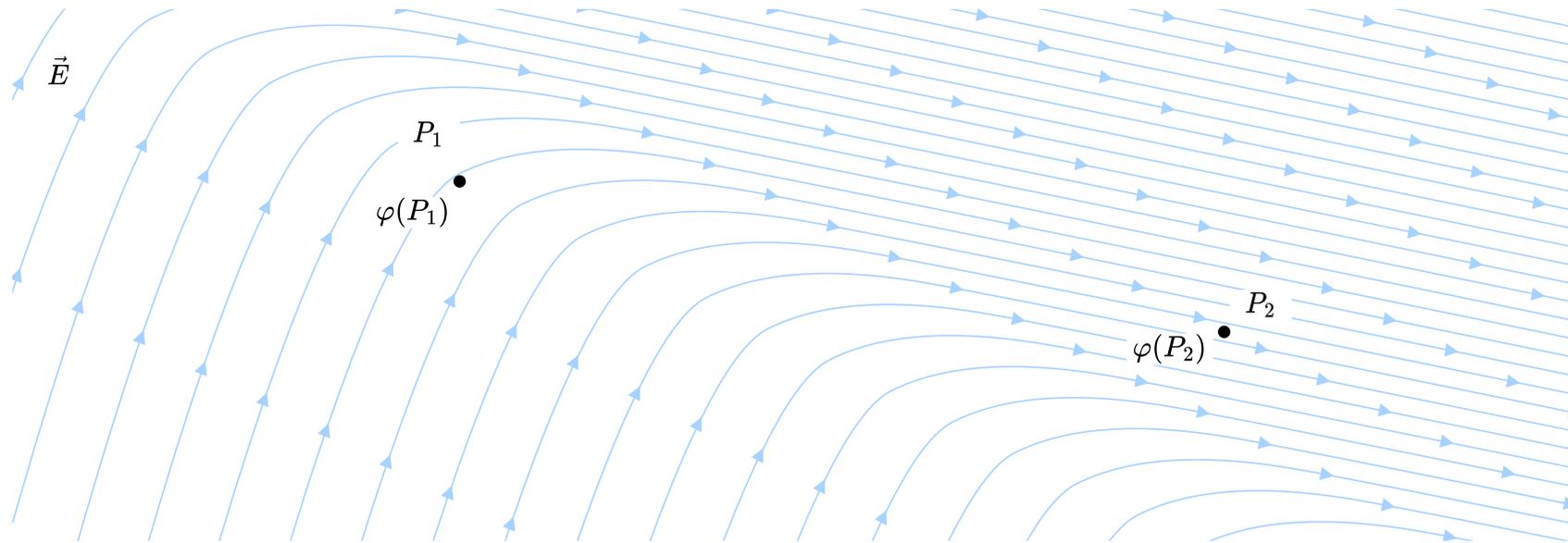
Das elektrostatische Potential II

Zuordnung einer potentiellen Energie (bezogen auf einem beliebigen Bezugspunkt) zu jedem Punkt im Raum

$$W_{12} = W(P_1) - W(P_2) = Q \cdot \varphi(P_1) - Q \cdot \varphi(P_2)$$

Normierung dieser potentiellen Energie auf Ladungsmenge Q entspricht *elektrostatischem Potential*

$$\varphi(P_1) = \frac{W(P_1)}{Q} \quad \text{mit} \quad [\varphi] = \text{Volt} = \text{V}$$

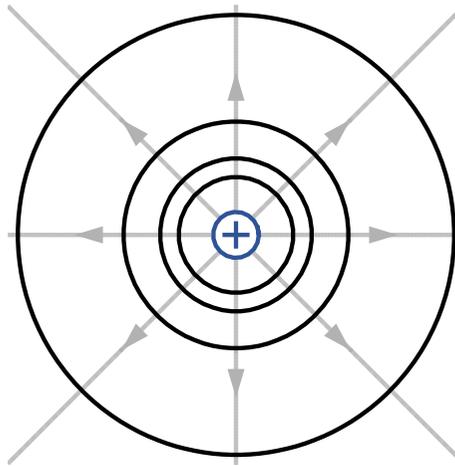


Äquipotentialflächen

Darstellung E-Felder mittels Äquipotentialflächen bzw. -linien:

- Konstantes Potential entlang einer Äquipotentialfläche
- Keine Verrichtung von elektrischer Arbeit bei Bewegung von Ladungen entlang Äquipotentialflächen
- Im Elektrostatischen Feld stehen Äquipotentialflächen senkrecht auf den Feldlinien

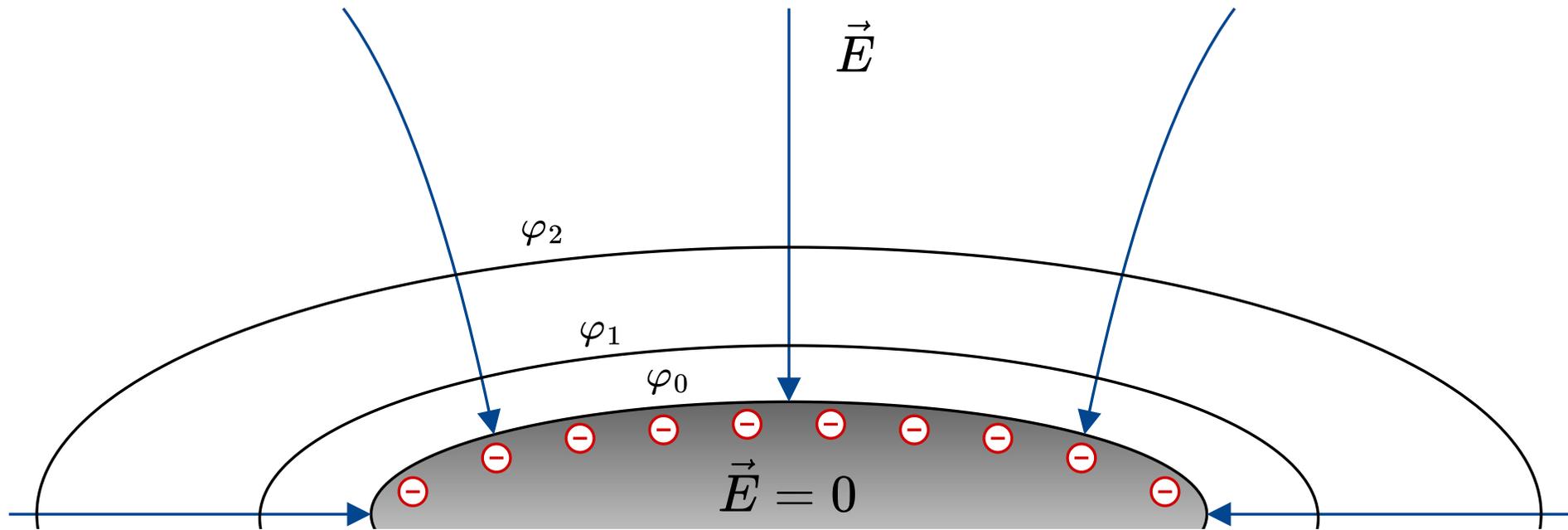
Vergleich mit Höhenlinien in einem Gravitationsfeld



Oberflächen Metallischer Leiter

Metallische Leiter besitzen immer konstantes Potential (wegen Ausgleich der Elektronen)

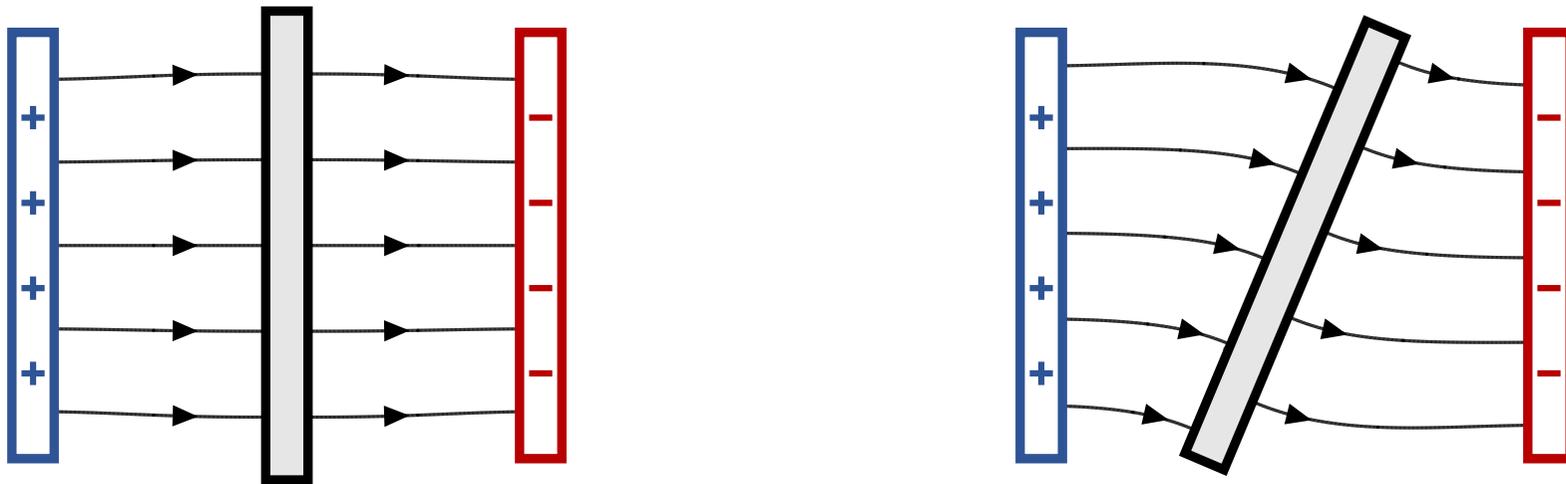
- Oberfläche von metallischen Leitern ist immer Äquipotentialfläche
- Elektrische Feldlinien stehen immer senkrecht auf Oberfläche metallischer Leiter
- Leiterinnere ist feldfrei



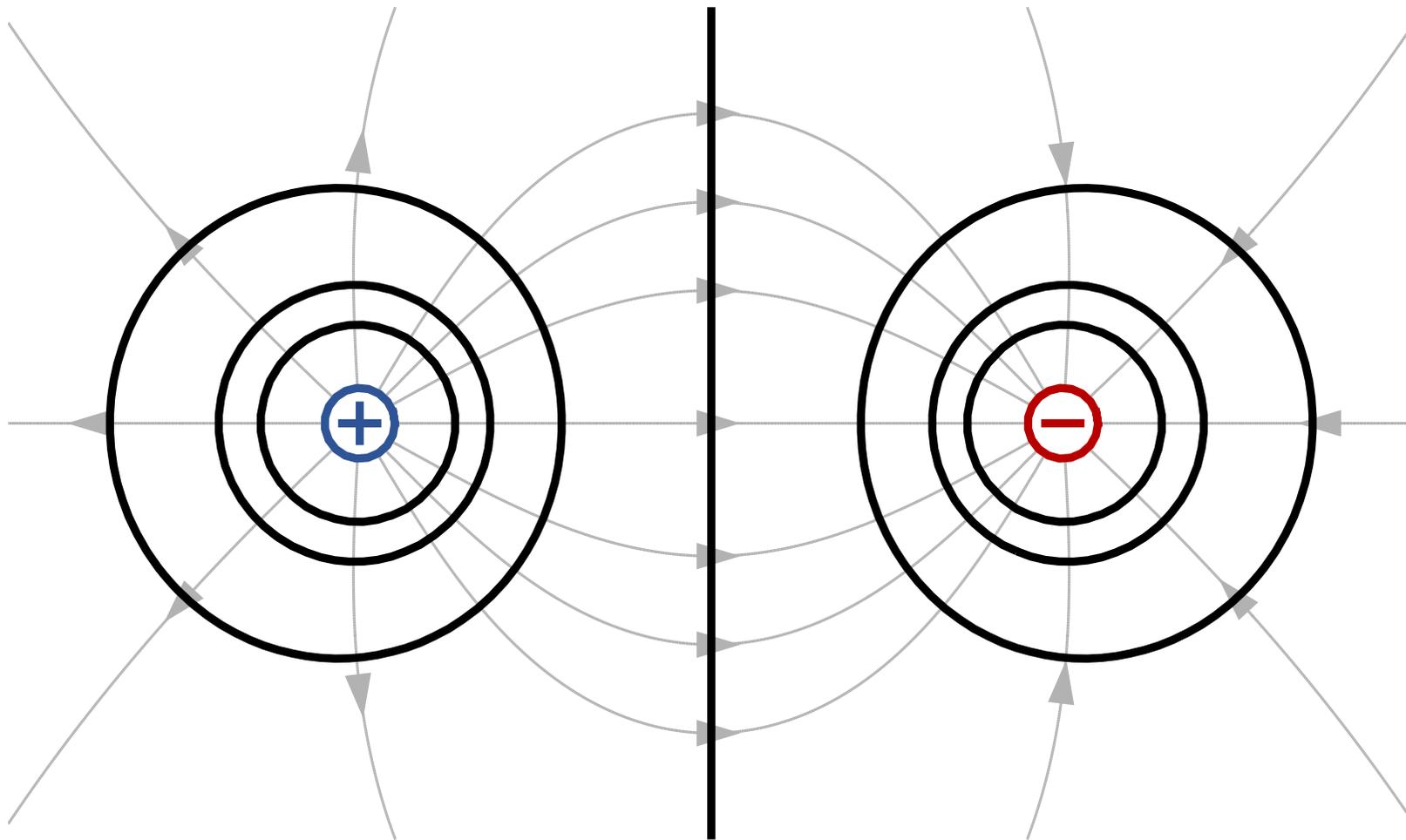
Metallplatte in Idealem Plattenkondensator

Metallischer Leiter entspricht immer eine Äquipotentialfläche

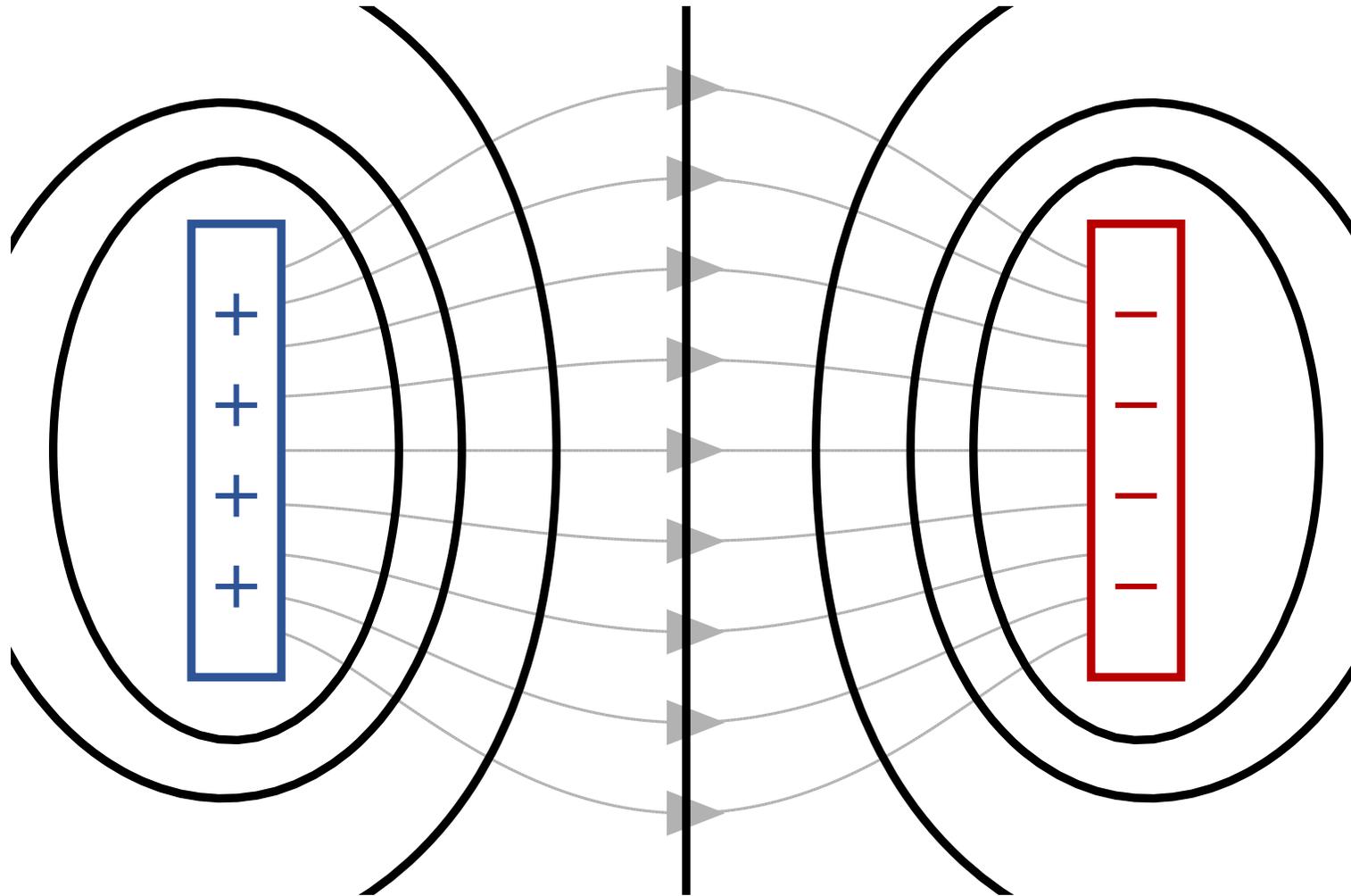
Feldlinien stehen immer senkrecht auf Metallplatte



Äquipotentialflächen von zwei Punktladungen



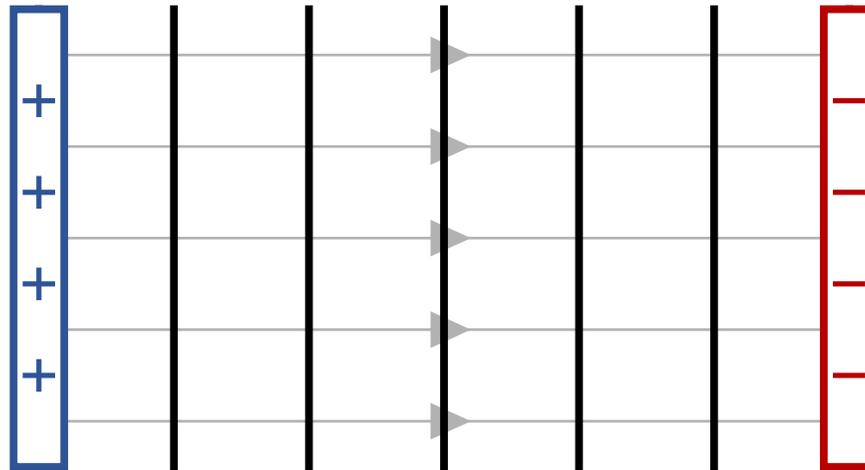
Äquipotentialflächen eines Plattenkondensators



Äquipotentialflächen eines idealen Plattenkondensators

Gleichmäßige Verteilung der Potentiale

Außenbereich ist feldfrei



Elektrische Spannung I

Normierung der Arbeit bei Bewegung einer Ladung von Punkt P_1 auf P_2 auf Ladungsmenge Q

$$\frac{W_{12}}{Q} = \frac{Q \cdot \varphi(P_1) - Q \cdot \varphi(P_2)}{Q} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2)$$

Potentialdifferenz entspricht *elektrischer Spannung* zwischen den Punkten P_1 und P_2

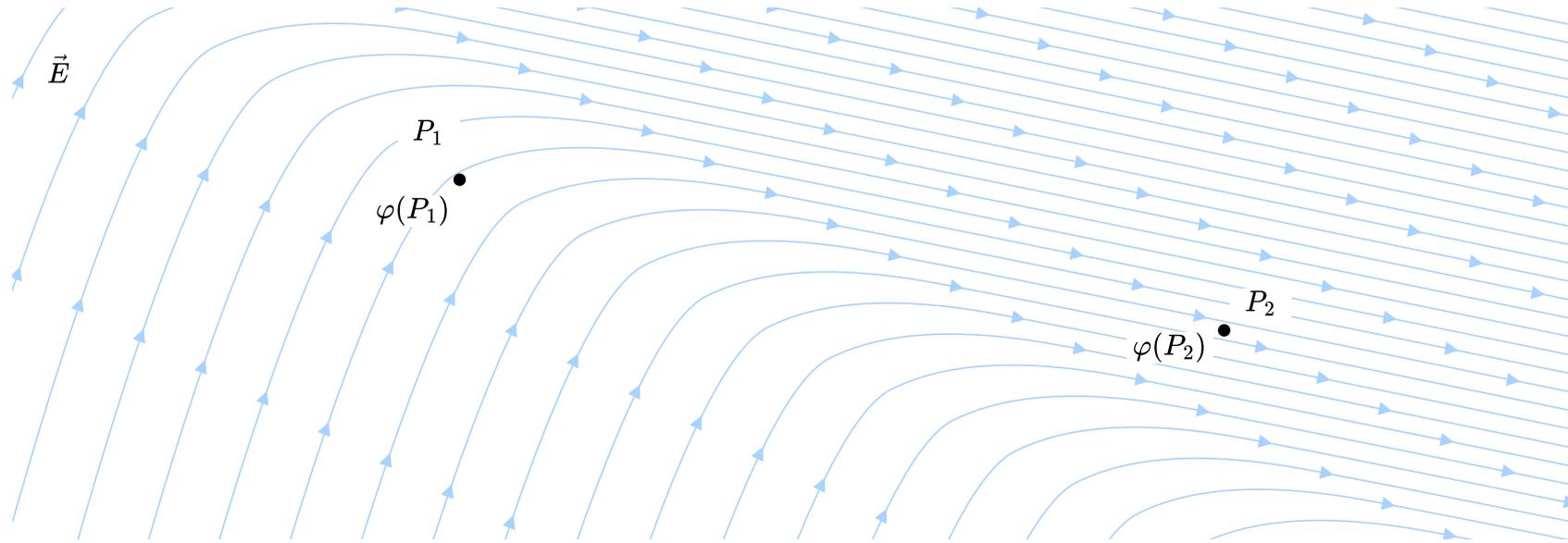
$$U_{12} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2) = \varphi_1 - \varphi_2$$



Elektrische Spannung II

Allgemeine Berechnung der elektrischen Spannung in Abhängigkeit des elektrischen Feldes

$$U_{12} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

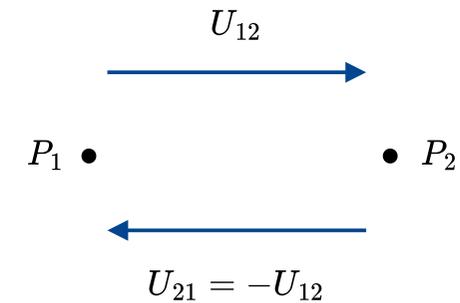


Elektrische Spannung III

Eigenschaften der elektrischen Spannung

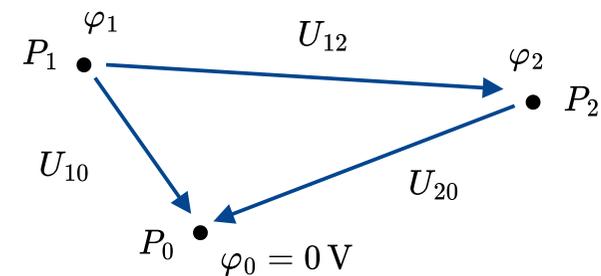
- Spannung wird immer zwischen *zwei* Punkten betrachtet
- Spannung ist eine *gerichtete* Größe, d.h.

$$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{P_2}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -U_{21}$$



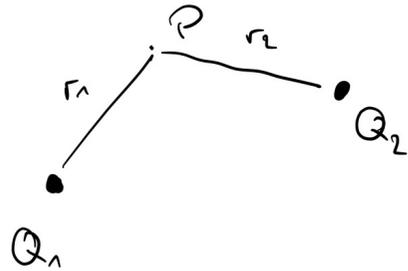
Bezugspotential φ_0 im Punkt P_0 notwendig zur Bestimmung der Spannung

- Wahl des Bezugspotentials prinzipiell willkürlich
- Häufige Wahl: $\varphi_0 = 0 \text{ V}$



Überlagerungsverfahren

Potential bei mehreren Ladungen



Bezugspunkt festlegen

$$\varphi_B = \varphi_1 + \varphi_2 = \dots$$

Potentialdifferenz überlagern
(vgl. Überlagerungsmethode)

Berechnung der Elektrischen Spannung im E-Feld

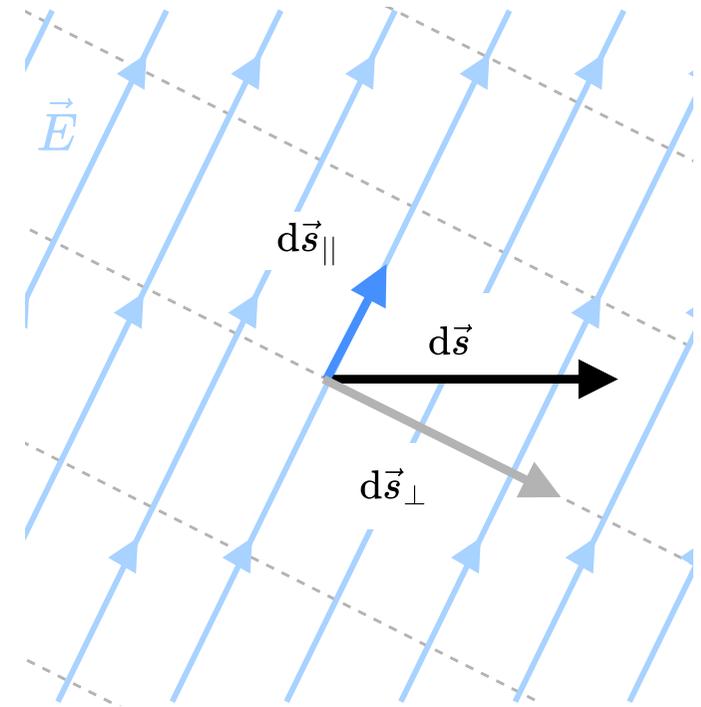
$$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2)$$

Aufgrund des Skalarproduktes $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ gilt

- Senkrechte Komponente (\vec{s}_\perp) liefert keinen Anteil zur Spannung
- Spannung entlang von Äquipotentialflächen ist stets Null
- Spannung wird nur parallel zu Feldlinien aufintegriert (Anteil \vec{s}_\parallel)

$$|\vec{E}| = -\frac{\partial \varphi}{\partial |\vec{s}_\parallel|} \quad \text{bzw.} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial |\vec{s}_\parallel|} \cdot \vec{e}_{\vec{s}_\parallel}$$

Feldstärkevektoren \vec{E} zeigen immer in Richtung des steilsten Abstieges des Potentialfeldes (sog. *Gradient*)



Allgemeiner Zusammenhang zwischen E-Feld und Potential

Berechnung des Potentials mittels der Integralfunktion

$$U(P) = \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi(P) - \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(P) = \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{s} + \varphi_0$$

Berechnung der elektrischen Feldstärkevektoren aus einem Potentialfeld φ mittels des Gradienten

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \varphi \\ \frac{\partial}{\partial y} \varphi \\ \frac{\partial}{\partial z} \varphi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \varphi = -\vec{\nabla} \cdot \varphi$$

Mit Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Die Elektrische Verschiebungsflussdichte

Influenz beim Plattenkondensator I

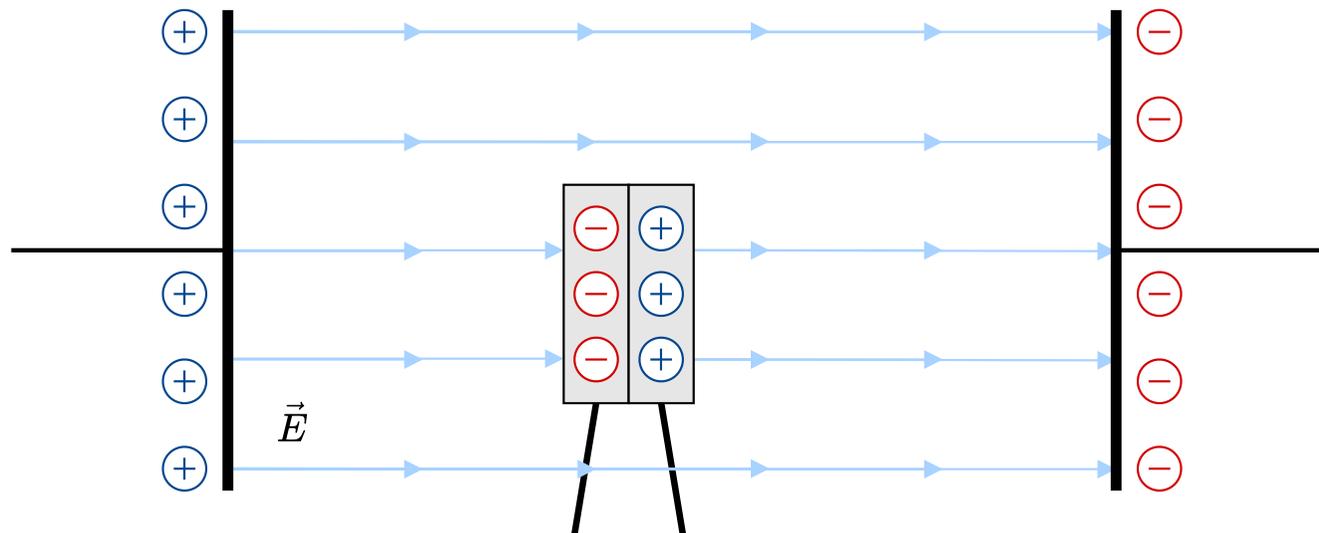
Gegeben: Idealer geladener Plattenkondensator

Ladungsdichte an der Oberfläche der Platten

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

Platzierung eines ungeladenen Metallkörpers bestehend aus zwei Scheiben in das E-Feld des Kondensators

Verschiebung der Ladungen an der Oberfläche des Metallkörpers mit gleicher Flächenladungsdichte σ



Influenz beim Plattenkondensator II

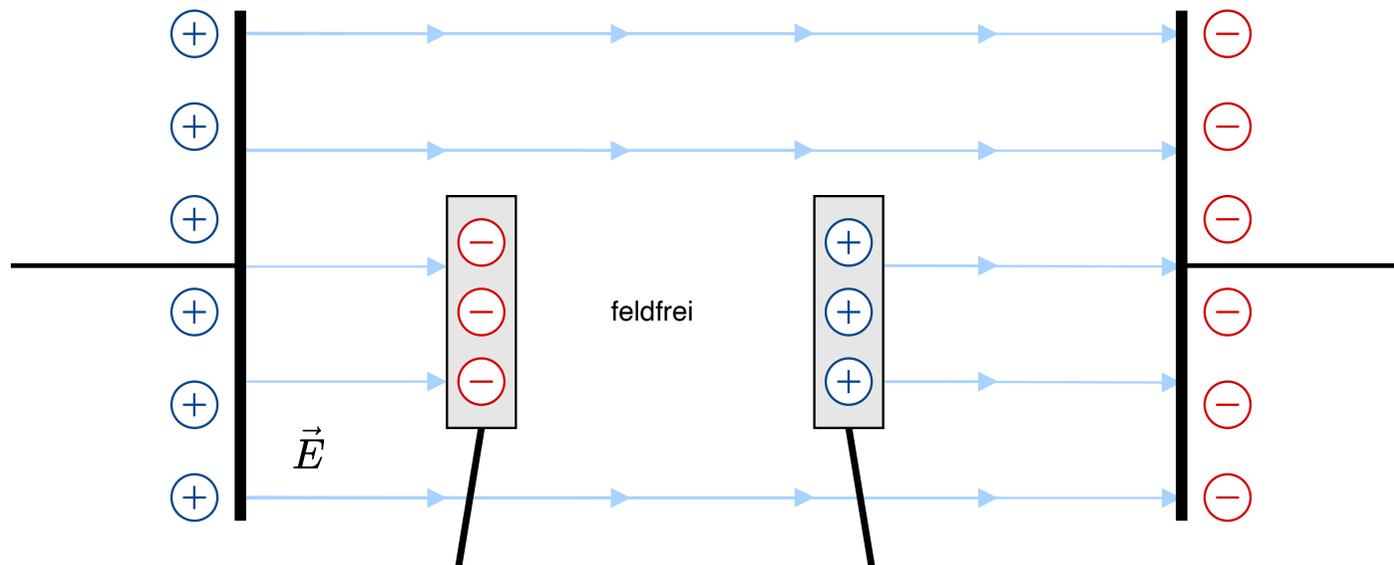
Trennung der beiden Scheiben bewirkt Trennung der Ladungen

Flächenladungsdichte σ jeweils an allen Oberflächen gleich

Zwischen Scheiben wird E-Feld aufgebaut, das gleich groß aber entgegengesetzt zu äußerem Feld ist

Wegen Überlagerung von äußerem und innerem Feld ist Bereich zwischen den Scheiben *feldfrei*

Feldabschirmung führt zu feldfreiem Bereich: *Faraday Käfig*

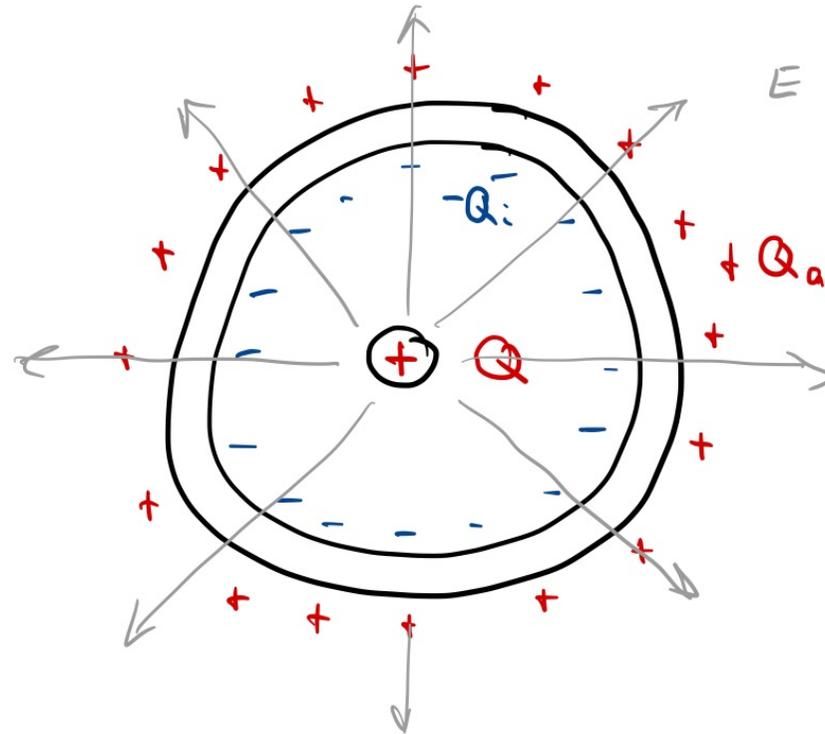


Influenz einer Hohlkugel

Gegeben: Punktladung Q von metallischer Hohlkugel umgeben

Influenz: An Oberfläche der metallischen Hohlkugel sammelt sich gleiche Ladungsmenge

$$|Q| = |Q_i| = |Q_a|$$



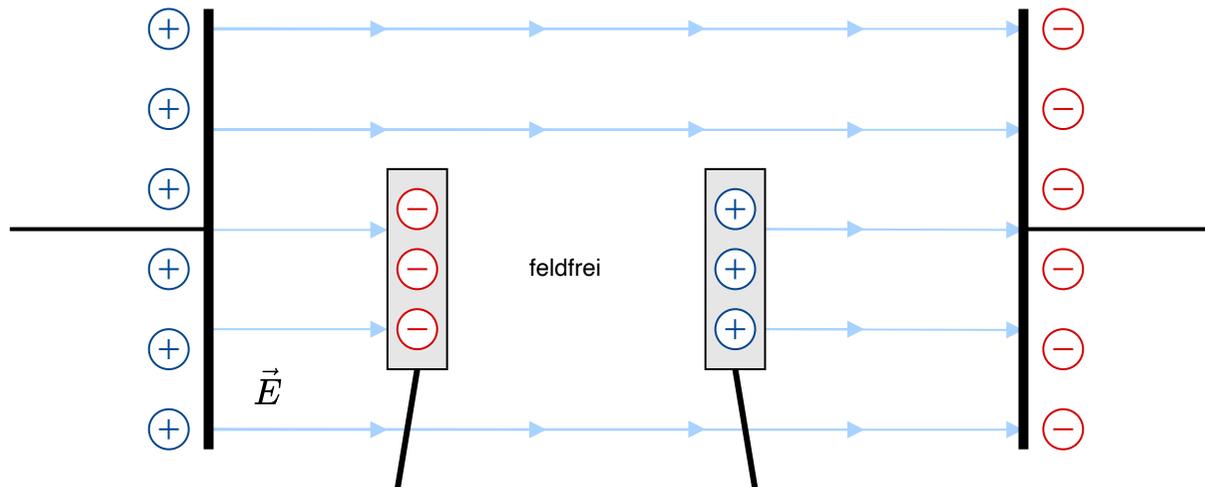
Der Elektrische Verschiebungsfluss

Ursache für Ladungsverschiebung bzw. Influenz:

- Gesamtheit des Feldes das auf die Oberfläche auftrifft
- Elektrische Verschiebungsfluss Ψ

Elektrische Verschiebungsfluss entspricht der gesamten verschobenen Ladung

$$\Psi = Q$$



Die Elektrische Verschiebungsflussdichte im homogenen Feld

Definition der elektrischen Flussdichte als *Fluss pro Fläche*

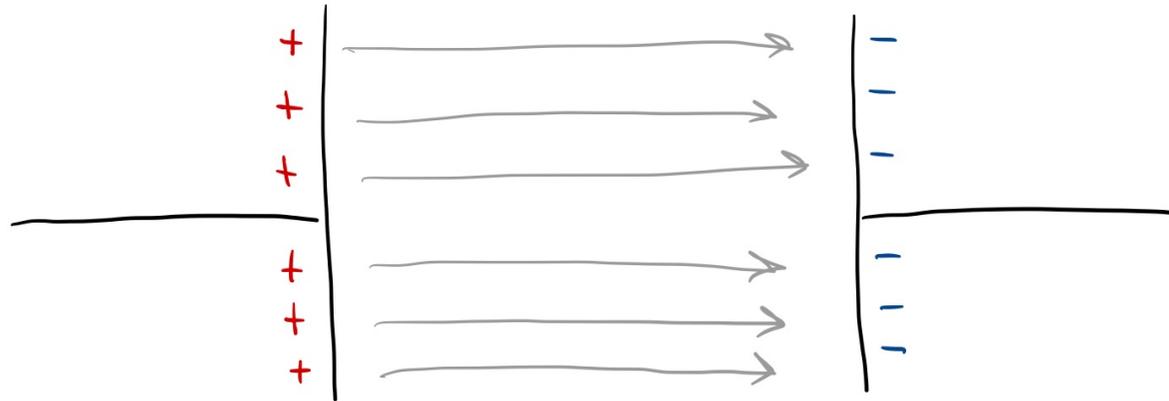
$$D = \frac{\Psi}{A} = \frac{Q}{A} = \sigma \quad \text{mit} \quad [D] = \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$$

Durch Messung lässt sich ein Zusammenhang zwischen Ladung und E-Feld ermitteln

$$Q = \varepsilon_0 \cdot A \cdot E$$

Damit gilt für die elektrische Flussdichte

$$D = \varepsilon_0 \cdot E$$



Die Elektrische Verschiebungsflussdichte

Eigenschaften der elektrische Verschiebungsflussdichte

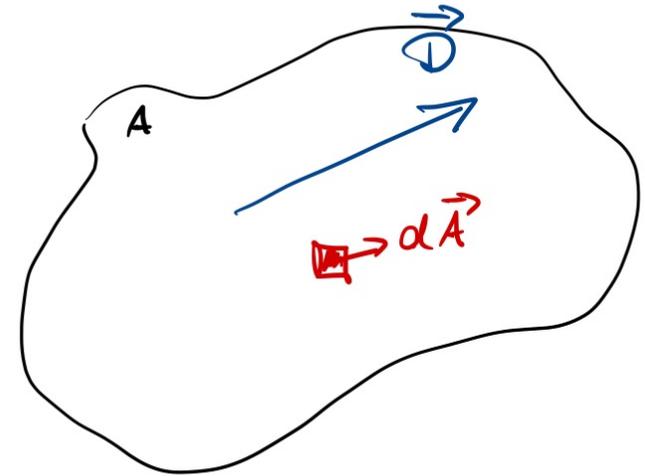
- vektorielle Größe
- richtungsgleich mit elektrischem Feld

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

Allgemeine Berechnung der elektrischen Verschiebungsflussdichte

$$d\Psi = \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$\Psi = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$



Gauß'sches Gesetz

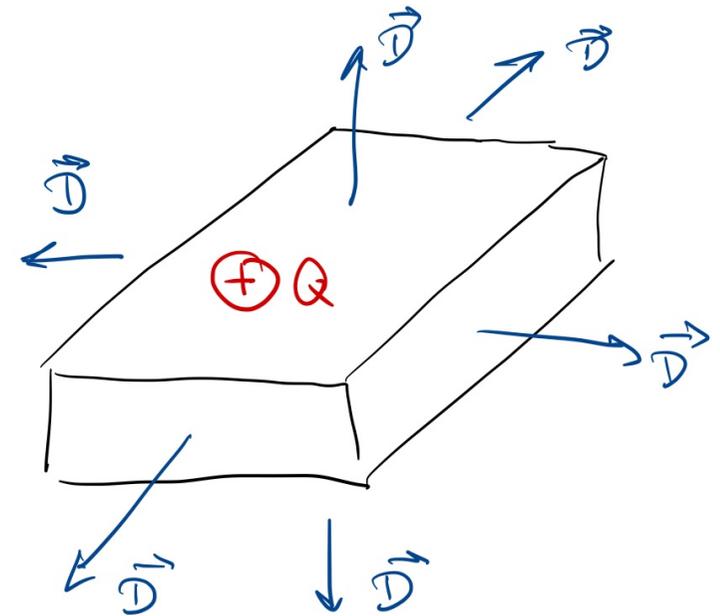
Integration der elektrischen Flussdichte über eine geschlossene Hüllfläche A um eine Ladungsmenge Q

$$\Psi = \oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

Hüllflächenintegral über beliebige Fläche A entspricht eingeschlossener Ladung

Eigenschaften der elektrischen Verschiebungsflussdichte

- Quantitätsgröße
- Ursache für den Raumzustand
- Bezeichnung als *elektrische Erregung*



E-Feld und Potential Verschiedener Anordnungen

Elektrisches Feld einer Punktladung

E- bzw. D-Feldvektoren stets radial zu Ursprung gerichtet

- $|\vec{D}|$ ist auf Kugelschale um Mittelpunkt gleich

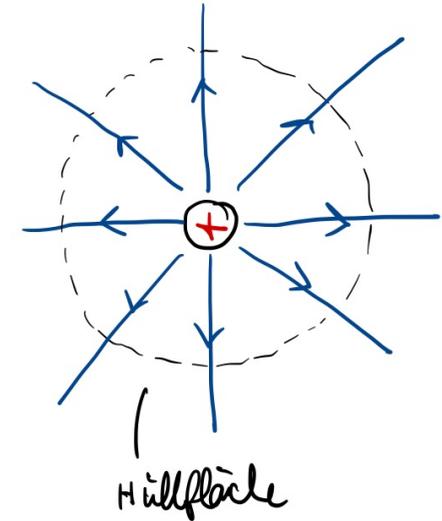
- $\vec{D} \parallel d\vec{A} \Rightarrow$ Skalarprodukt zwischen beiden Vektoren ist 1

Nach Gauß'schem Gesetz gilt

$$Q = \oiint_A \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \oiint_{\text{Kugelschale}} D(r) dA = D(r) \cdot 4\pi r^2$$

Damit lässt sich der Betrag des E- bzw. D-Feldes einer Kugelladung ermitteln

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \text{und} \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad \text{für} \quad r \geq r_0$$



Ladung einer geladenen Metallkugel

Nach Gauß'schem Gesetz folgt für den Aussenbereich:

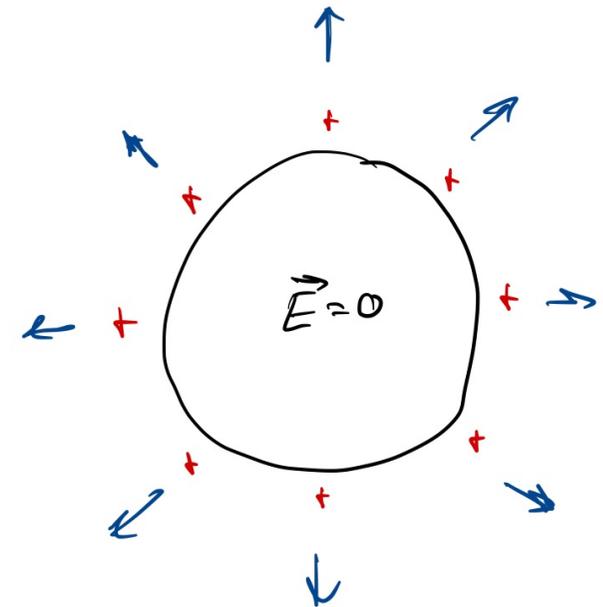
\vec{E} -Feld bzw. \vec{D} -Feld entspricht dem einer Punktladung im Mittelpunkt der Kugel

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} \quad \text{und} \quad \vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}$$

Ladungsträger sammeln sich an Kugeloberfläche:

Das Kugelinne ($r < r_0$) ist feldfrei

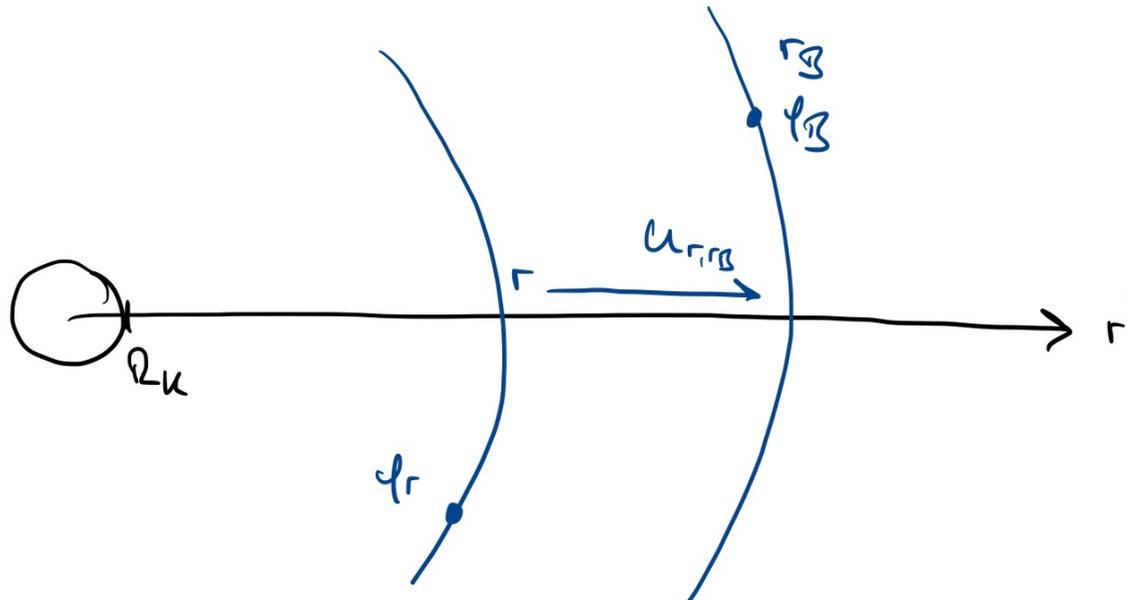
$$D(r) = 0 \quad E(r) = 0$$



Potential einer geladenen Metallkugel I

Festlegen eines Bezugspotentials $\varphi(r_B)$

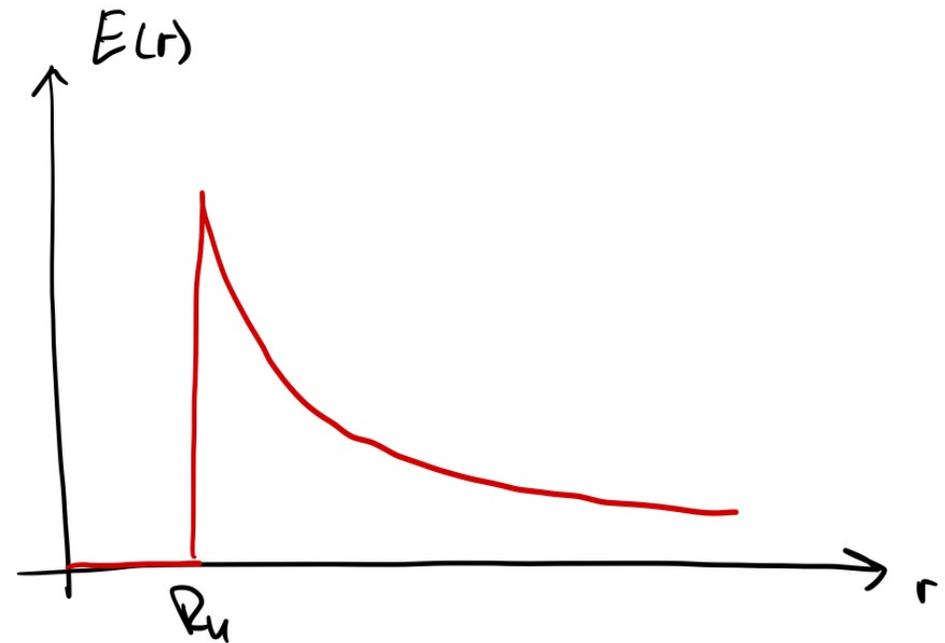
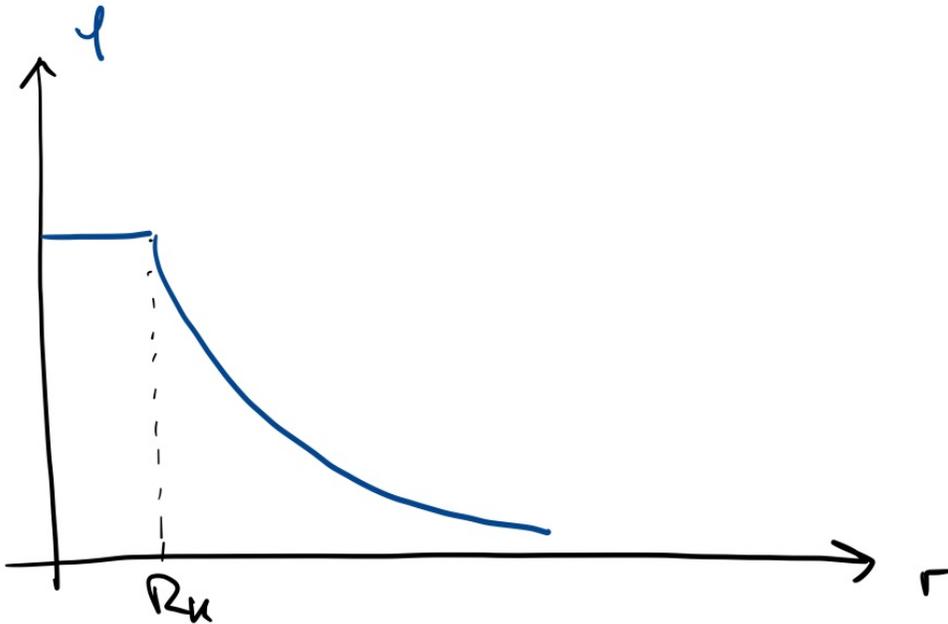
$$\begin{aligned} U = \varphi(r) - \varphi(r_B) &= \int_r^{r_B} E(r') \, dr' = \int_r^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon r'^2} \, dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \int_r^{r_B} \frac{1}{r'^2} \, dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left[-\frac{1}{r'} \right]_r^{r_B} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_B} \right) \end{aligned}$$



Potential einer geladenen Metallkugel II

Häufige Annahme: Bezugspotential mit $\varphi(r_B) = 0$ unendlich weit entfernt, d.h. $r_B \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= U + \varphi(r_B) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_B} \right) + \varphi(r_B) \stackrel{r_B \rightarrow \infty}{=} \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r} + 0 = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon \cdot r}\end{aligned}$$



Elektrisches Feld einer Linienladung I

Linienladung: Unendlich lange geradlinige Ladungsverteilung

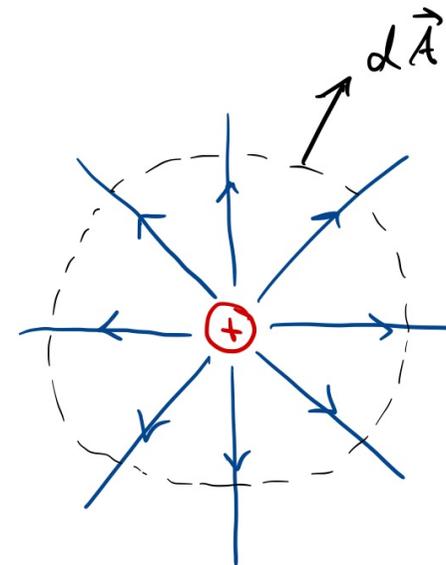
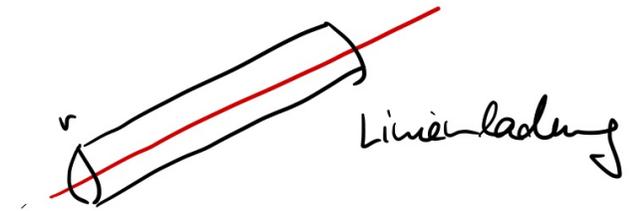
Linienladungsdichte

$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

Gauß'sches Gesetz mit Zylinder als Hüllfläche

- $|\vec{D}(r)|$ auf Mantelfläche mit Radius r gleich
- $\vec{D} \parallel d\vec{A} \Rightarrow$ Skalarprodukt zwischen beiden Vektoren ist 1
- kein Fluss durch Zylinderdeckel und -boden

$$Q = \lambda \cdot l = \iint_A \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \iint_{\text{Mantelfläche}} D(r) dA = D(r) \cdot 2\pi r \cdot l$$



Elektrisches Feld einer Linienladung II

Damit lässt sich der Betrag des E- bzw. D-Feldes einer Linienladung ermitteln

$$D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad \text{und} \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$$

Elektrisches Feld eines geladenen Zylinders

Bei zylindrischen Linienladungen (mit Zylinderradius r_Z) folgt nach Gauß'schem Gesetz

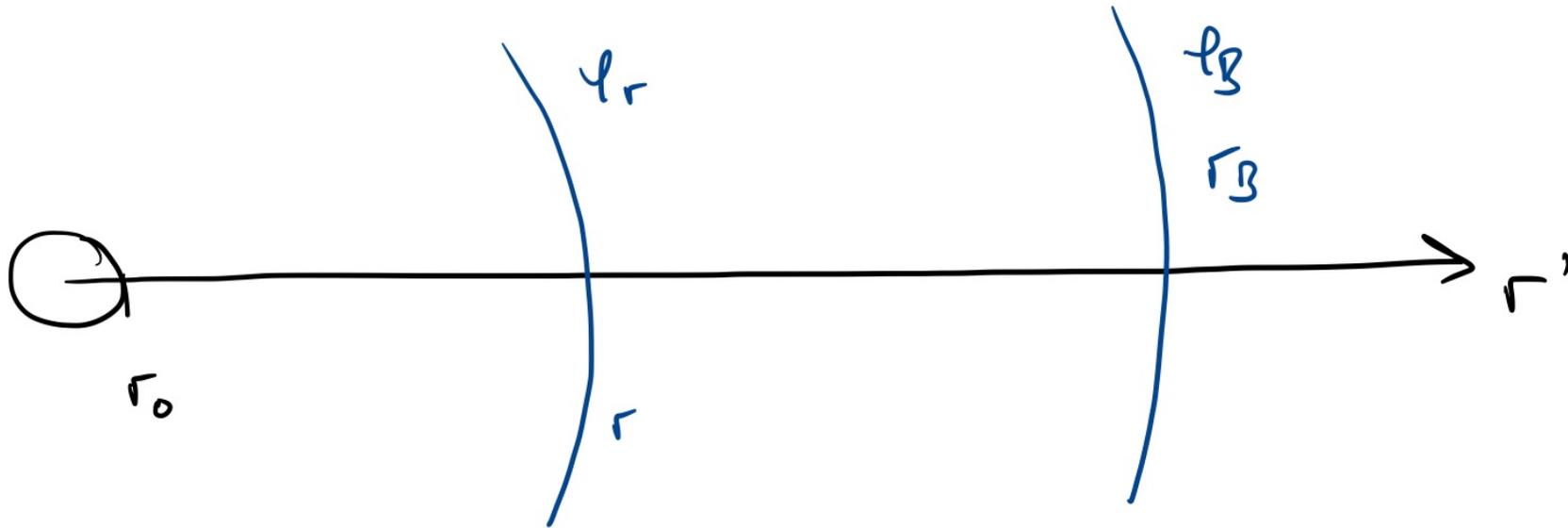
- Aussenbereich ($r \geq r_Z$): Gleiche Gesetzmäßigkeit wie bei Linienladung
- Innenbereich ($r < r_Z$): feldfrei

$$D(r) = 0 \quad \text{und} \quad E(r) = 0$$

Potential eines geladenen Zylinders I

Festlegen eines Bezugspotentials $\varphi(r_B)$

$$\begin{aligned} U = \varphi(r) - \varphi(r_B) &= \int_r^{r_B} E(r') \, dr' = \int_r^{r_B} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r'} \, dr' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \int_r^{r_B} \frac{1}{r'} \, dr' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \left[\ln(r') \right]_r^{r_B} = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \left(\ln(r_B) - \ln(r) \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{r_B}{r}\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_B}\right) \end{aligned}$$



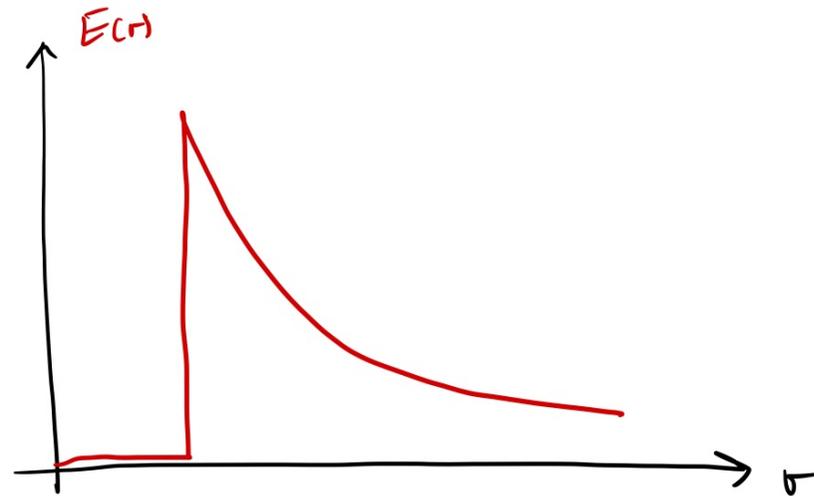
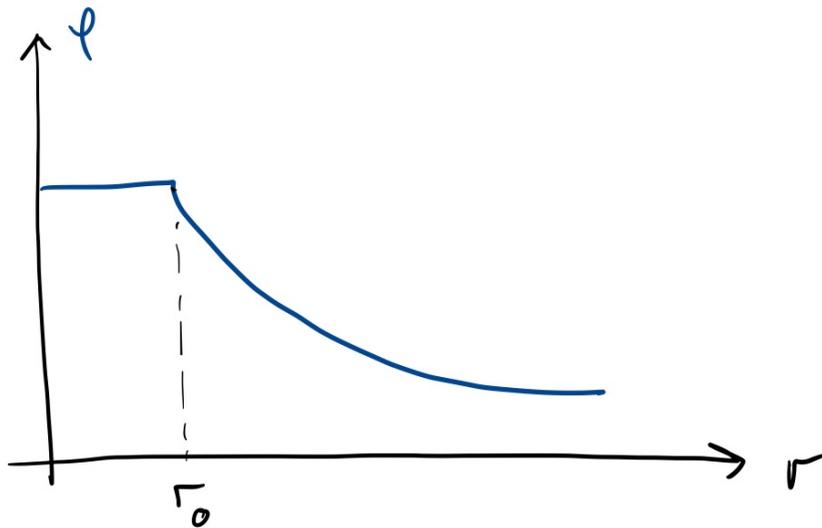
Potential eines geladenen Zylinders II

Wahl des Bezugspotentials ($\varphi_{r_B} = \varphi_B$) bei $r_B \rightarrow \infty$ nicht sinnvoll, da

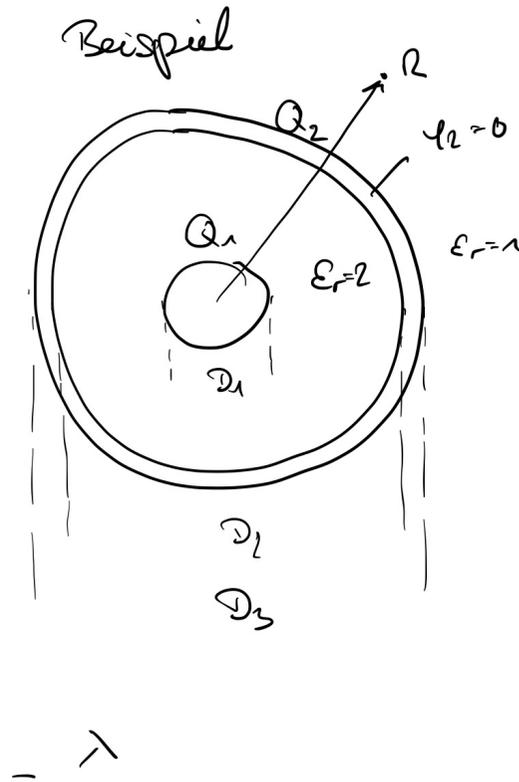
$$\lim_{r_B \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{r}{r_B} \right) = -\infty$$

Häufige Annahme: Festlegung des Bezugspotentials auf Zylinderoberfläche, d.h. $r_B = r_Z$

$$\varphi(r) = \varphi_B - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \left(\frac{r}{r_Z} \right)$$



E-Feld eines Koaxialleiters I



$$Q_1 = -1,2 \mu\text{C} \quad Q_2 = 0,7 \mu\text{C}$$

$$D_1 = 20\text{ cm} \quad D_2 = 8\text{ cm} \quad D_3 = 10\text{ cm}$$

$$R = 20\text{ cm} \quad L = 8\text{ cm}$$

$$\lambda_1 = \frac{Q_1}{L} = -1,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}}$$

$$\lambda_2 = \frac{Q_2}{L} = 8,75 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{m}}$$

$$E_1(r) = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 \cdot r} \quad E_2(r) = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

$$E_{\text{ges}}(r) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

$$U_R = \int_{D_2/2}^R E_{\text{ges}}(r) dr = \int_{5\text{ cm}}^{20\text{ cm}} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 \cdot r} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{20}{5} =$$

$$= 311\text{ V} = 1,5\text{ cmV} ?$$

E-Feld eines Koaxialleiters II

$$E_{\text{ges}}(r) = \begin{cases} 0 & r < \rho_{1/2} \\ E_1(r) & \rho_{1/2} < r < \rho_{2/2} \\ 0 & \rho_{2/2} < r < \rho_{1/2} \\ E_1(r) + E_2(r) & r > \rho_{1/2} \end{cases}$$

Einfluss verschiedener Materialien

Zusammenhang zwischen E-Feld und D-Feld bei verschiedenen Materialien I

Versuch: Zwei Kondensatorplatten (Fläche A , Abstand d) befinden sich in einem luftgefüllten Behälter

1. Kondensator wird mit Spannung $U_{\text{Luft}} = 100 \text{ V}$ geladen und von Spannungsquelle getrennt
2. Behälter wird mit einem nichtleitenden Öl gefüllt
3. Spannungsmessgerät zeigt nun eine Spannung von $U_{\text{Öl}} = 43 \text{ V}$

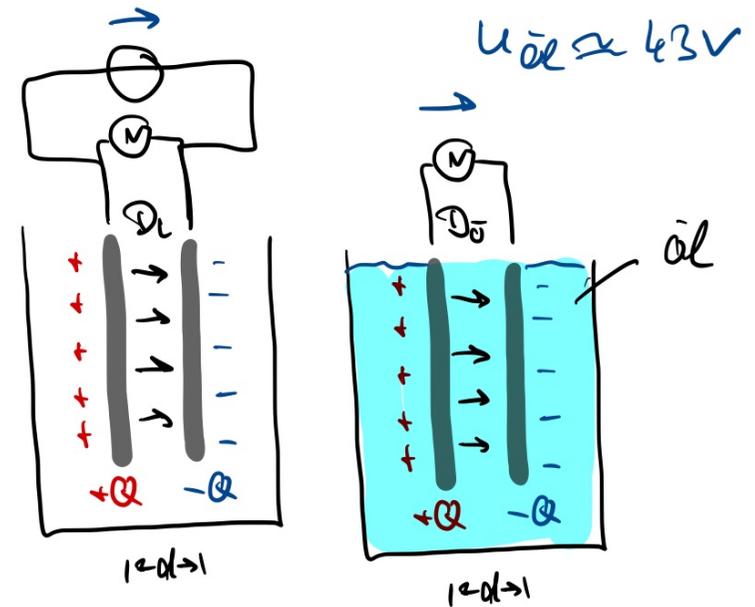
Folgerungen:

1. Elektrisches Feld in Luft größer als in Öl

$$E_{\text{Luft}} = \frac{U_{\text{Luft}}}{d} > E_{\text{Öl}} = \frac{U_{\text{Öl}}}{d}$$

2. Verschiebungsdichte in beiden Materialien gleich

$$D_{\text{Luft}} = \frac{Q}{A} = D_{\text{Öl}}$$



Zusammenhang zwischen E-Feld und D-Feld bei verschiedenen Materialien II

\vec{E} -Feld und \vec{D} -Feld zeigen in gleiche Richtung sind aber materialabhängig

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

ϵ : Dielektrizitätskonstante bzw. Permittivität

$$[\epsilon] = \frac{[D]}{[E]} = \frac{\frac{\text{As}}{\text{m}^2}}{\frac{\text{V}}{\text{m}}} = \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

Im Vakuum gilt: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

Beschreibung der Dielektrizität in verschiedenen Materialien über *relative Dielektrizitätszahl* ϵ_r

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad \text{mit} \quad [\epsilon_r] = 1$$

Ursache für den Einfluss verschiedener Materialien

Dielektrische Materialien oder Dielektrikum sind Nichtleiter

Unterschiedlicher Einfluss auf äußere elektrische Felder entstehen durch Polarisation auf molekularer Ebene

Praktische Anwendung bei der Verwendung verschiedener Materialien

- Erhöhung der Kapazität von Kondensatoren
- Elektretmikrofon
- Schwingquarze (piezoelektrischer Effekt)

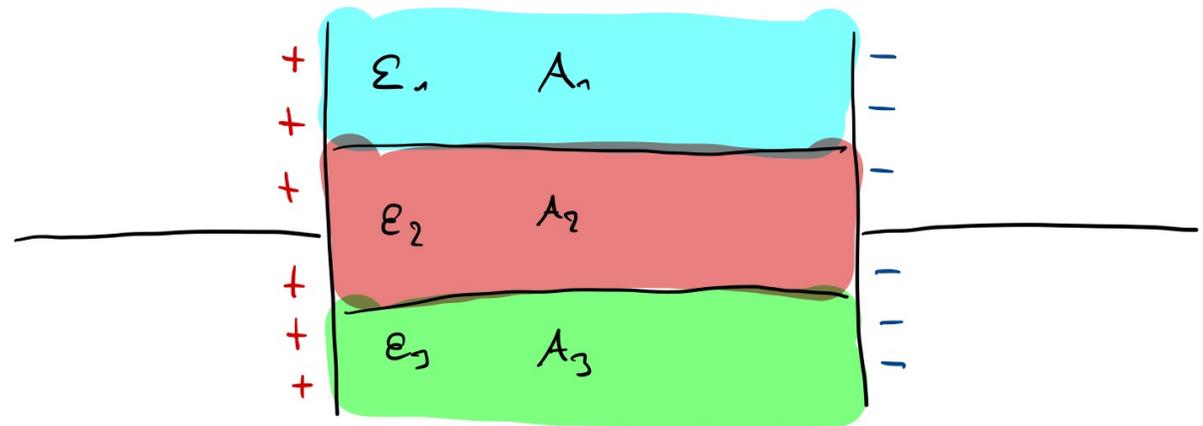
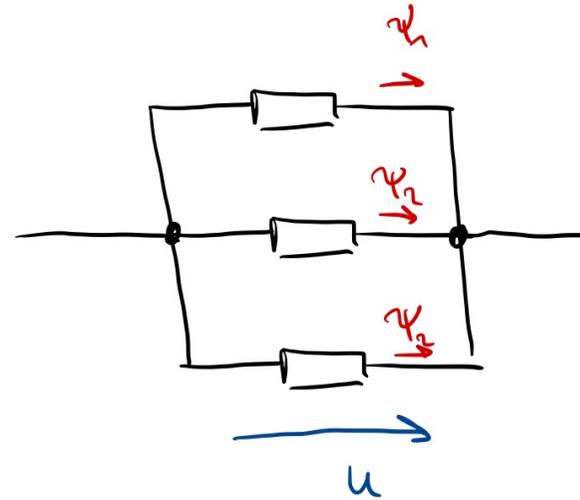
Schichtdielektrikum in einem Plattenkondensator I

Über jeder Schicht liegt gleiche Spannung U

$$E_1 = E_2 = E_3 = E = \frac{U}{d}$$

$$D_1 = \varepsilon_1 \cdot E \quad D_2 = \varepsilon_2 \cdot E \quad D_3 = \varepsilon_3 \cdot E$$

$$\Psi_1 = \frac{U}{\frac{d}{\varepsilon_1 \cdot A_1}} \quad \Psi_2 = \frac{U}{\frac{d}{\varepsilon_2 \cdot A_2}} \quad \Psi_3 = \frac{U}{\frac{d}{\varepsilon_3 \cdot A_3}}$$



Schichtdielektrikum in einem Plattenkondensator II

Jede Schicht wird durch dem gleichen elektrischen Verschiebungsfluss polarisiert

$$D_1 = D_2 = D_3 = D = \frac{\Psi}{A}$$

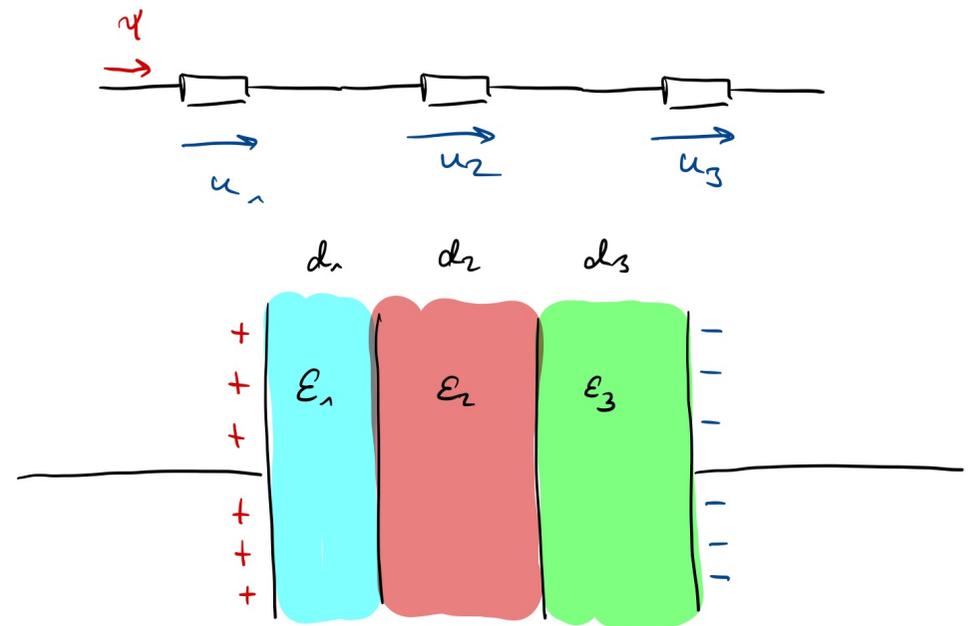
$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} \quad E_3 = \frac{D}{\epsilon_3}$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2 + E_3 \cdot d_3 =$$

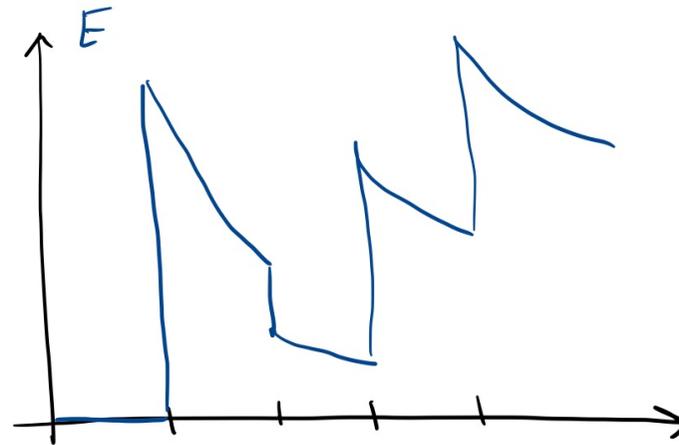
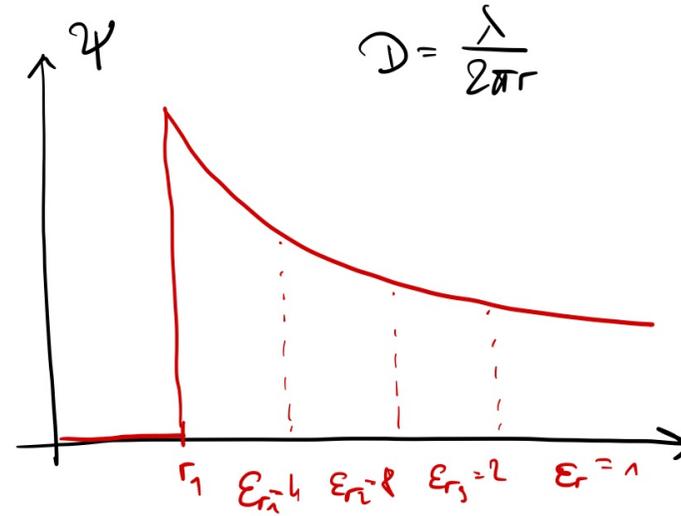
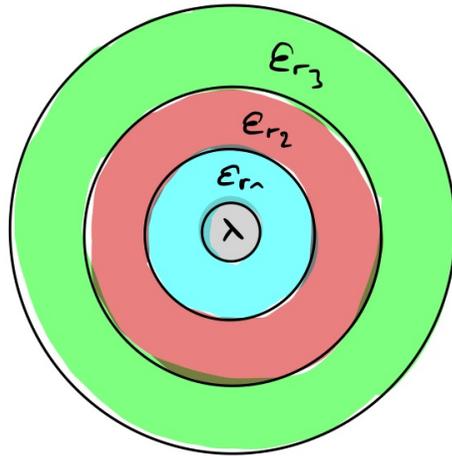
$$= \Psi \cdot \left(\frac{d_1}{\epsilon_1 \cdot A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 \cdot A} + \frac{d_3}{\epsilon_3 \cdot A} \right)$$

$$\Psi = \frac{U}{\frac{d_1}{\epsilon_1 \cdot A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 \cdot A} + \frac{d_3}{\epsilon_3 \cdot A}}$$

$$U_1 = \Psi \cdot \frac{d_1}{\epsilon_1 \cdot A} \quad U_2 = \Psi \cdot \frac{d_2}{\epsilon_2 \cdot A} \quad U_3 = \Psi \cdot \frac{d_3}{\epsilon_3 \cdot A}$$



Schichtdielektrikum um eine Linienladung



Grenzflächen von dielektrischen Materialien I

Vorraussetzung: Grenzfläche ist ladungsfrei

Betrachtung der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke

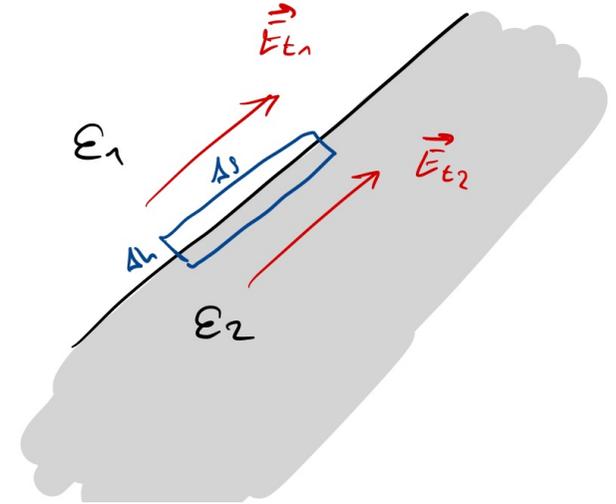
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Rechteckige Kontur C mit $\Delta h \rightarrow 0$

$$E_{t,1} \cdot \Delta s - E_{t,2} \cdot \Delta s = 0$$

Folglich ist die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke in beiden Materialien gleich

$$E_{t,1} = E_{t,2}$$



Grenzflächen von dielektrischen Materialien II

Betrachtung der Normalkomponente der elektrischen Flussdichte

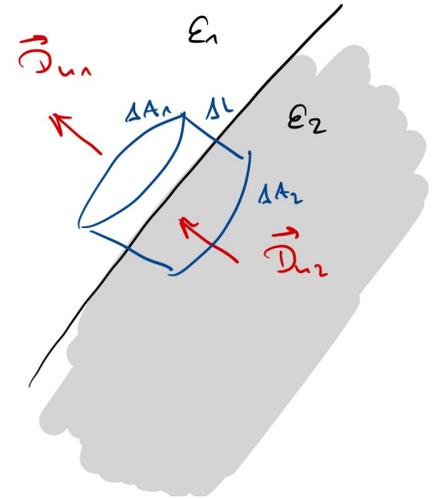
$$\oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0$$

Zylinderförmige Hüllkurve mit $\Delta h \rightarrow 0$

$$D_{n,1} \cdot \Delta A - D_{n,2} \cdot \Delta A = 0$$

Folglich ist die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte in beiden Materialien

$$D_{n,1} = D_{n,2}$$



Grenzflächen von dielektrischen Materialien III

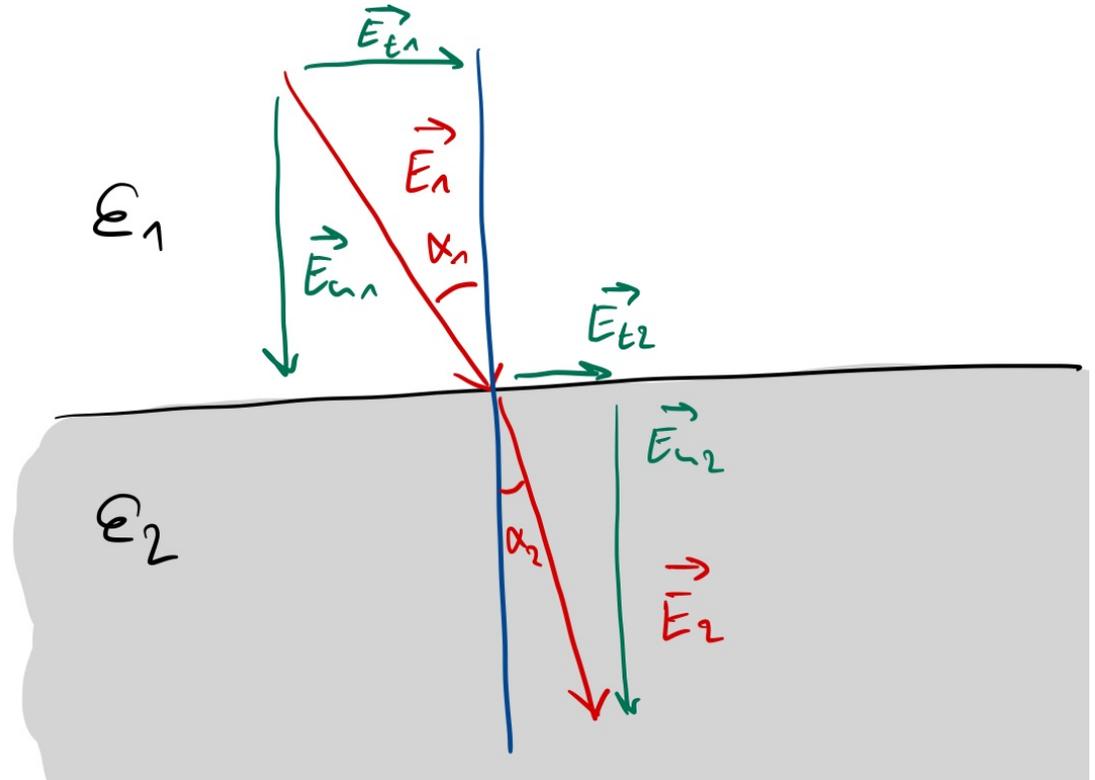
Allgemeines Brechungsgesetz

$$E_{t,1} = E_{t,2} \quad D_{n,1} = D_{n,2}$$

$$\frac{D_{t,1}}{D_{t,2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad \frac{E_{n,1}}{E_{n,2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

Bestimmung der Brechungswinkel

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$



Kondensator

Kondensator

Betrachtung eines idealen Plattenkondensators: Erhöhung der Spannung U führt zu Erhöhung der Ladung Q

$$\text{Erhöhung } U \quad \Rightarrow \quad E = U/d \quad \Rightarrow \quad D = \varepsilon E \quad \Rightarrow \quad Q = DA$$

Daraus folgt ein proportionaler Zusammenhang zwischen Q und U

$$Q \sim U$$

Der Proportionalitätsfaktor wird als *Kapazität* C bezeichnet mit

$$C = \frac{Q}{U}$$

Einheit der Kapazität

$$[C] = \frac{\text{As}}{\text{V}} = \text{F} = \text{Farad}$$

Berechnung der Kapazität

Allgemeine Berechnung der Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Kapazität ist Kenngröße einer Anordnung zur Speicherung elektrischer Feldenergie

Beschreibung der Anordnung im Hinblick auf

- Geometrie (Verteilung der Feldgrößen im Raum)
- Material (Zusammenhang zwischen \vec{E} und \vec{D} mittels Dielektrizität ϵ)

Kapazität eines (idealen) Plattenkondensators

Eigenschaften des idealen Plattenkondensators

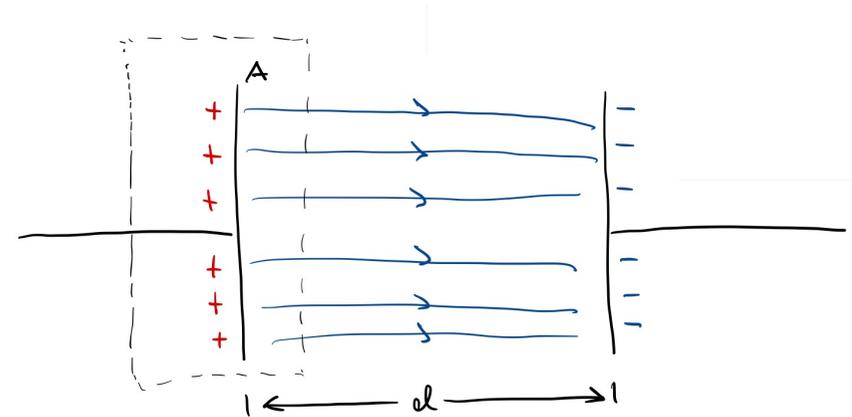
- Homogenes Feld zwischen den Platten
- Außenbereich ist feldfrei

Somit folgt aus der allgemeinen Kapazitätsberechnung

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \frac{D \cdot A}{E \cdot d} = \frac{\epsilon \cdot E \cdot A}{E \cdot d} = \frac{\epsilon \cdot A}{d}$$

Damit ist die Kapazität eines idealen Plattenkondensators

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$$



Beispiel: Schicht-Kondensator aus drei Dielektrika

Plattenfläche und Verschiebungsflussdichte jeweils gleich

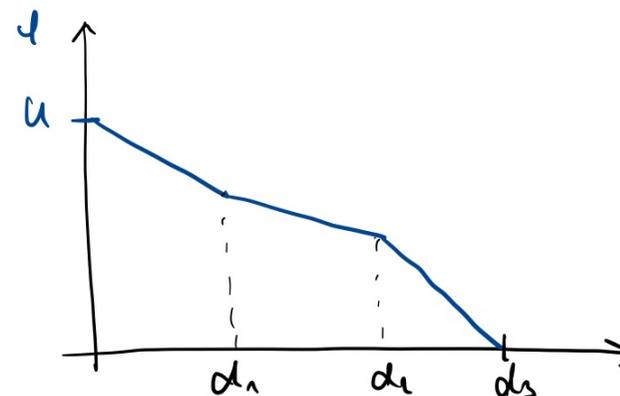
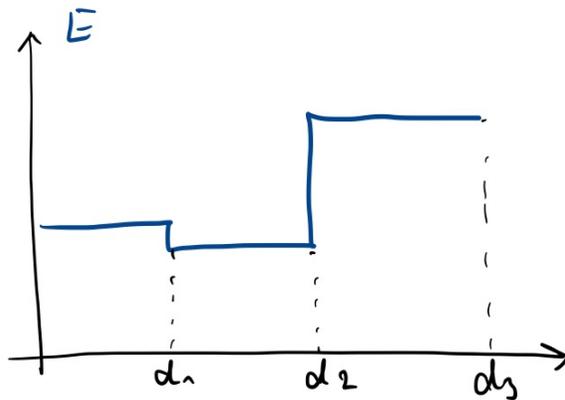
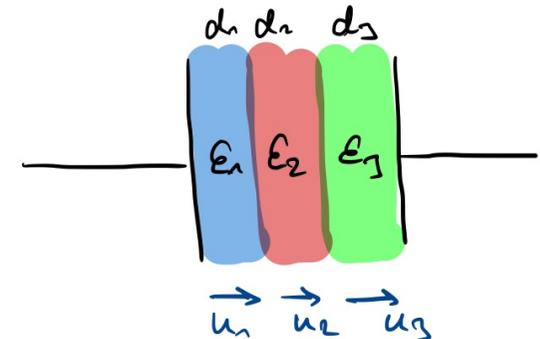
$$A_1 = A_2 = A_3 = A \quad D_1 = D_2 = D_3 = D$$

Gesamtspannung entspricht Summer der Teilspannungen über den einzelnen Dielektrika-Schichten

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

Interpretation als eine Reihenschaltung aus drei Teilkapazitäten

$$C_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 \cdot A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 \cdot A} + \frac{d_3}{\epsilon_3 \cdot A}} = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{\frac{d_1}{\epsilon_{r,1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r,2}} + \frac{d_3}{\epsilon_{r,3}}}$$



Zylinderkondensator

Feldfrei im Innenleiter (freie Ladungsträger nur an Oberfläche) und im Aussenbereich (wegen Influenz)

$$E = 0 \quad \text{und} \quad D = 0 \quad \text{für} \quad r < r_i \quad \text{und} \quad r > r_a$$

Im Innenbereich ist das E-Feld und damit die Spannung

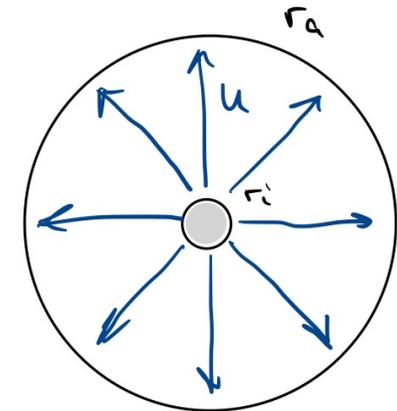
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \quad \Rightarrow \quad U = \int_{r_i}^{r_a} E(r) \, dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

Damit ist die Kapazität der Anordnung

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda \cdot l}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} = \frac{2\pi\epsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$$

Definition des Kapazitätsbelags

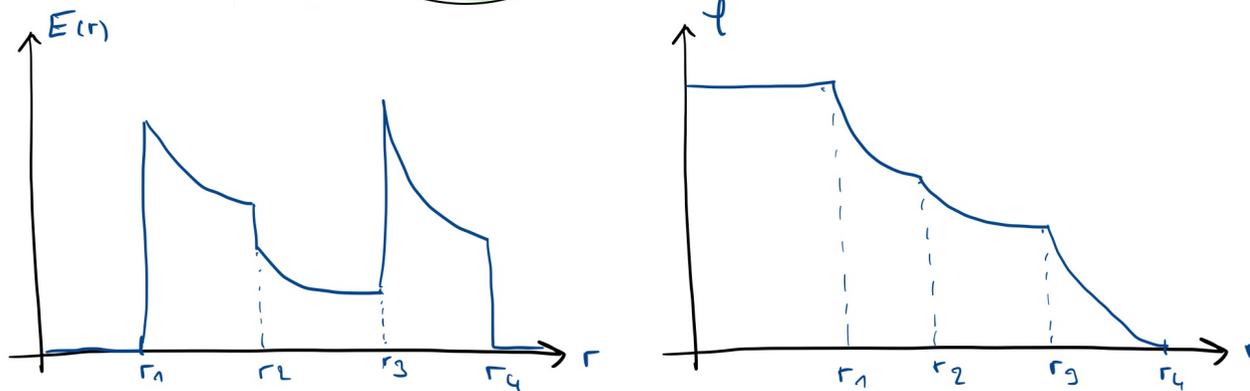
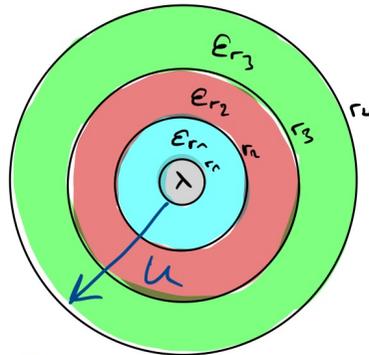
$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$$



Beispiel: Zylinderkondensator mit Schicht-Dielektrikum

Interpretation als drei Kondensatoren in Serienschaltung (vgl. Plattenkondensator mit Schichtdielektrikum)

$$C_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_i}\right)}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r,1}\cdot l} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r,2}\cdot l} + \frac{\ln\left(\frac{r_a}{r_2}\right)}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r,3}\cdot l}} = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot l}{\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_i}\right)}{\epsilon_{r,1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\epsilon_{r,2}} + \frac{\ln\left(\frac{r_a}{r_2}\right)}{\epsilon_{r,3}}}$$



Kugelkondensator

Feldfrei in Innenkugel (freie Ladungsträger nur an Oberfläche) und im Aussenbereich (wegen Influenz)

$$E = 0 \quad \text{und} \quad D = 0 \quad \text{für} \quad r < r_i \quad \text{und} \quad r > r_a$$

Im Innenbereich ist das E-Feld und damit die Spannung

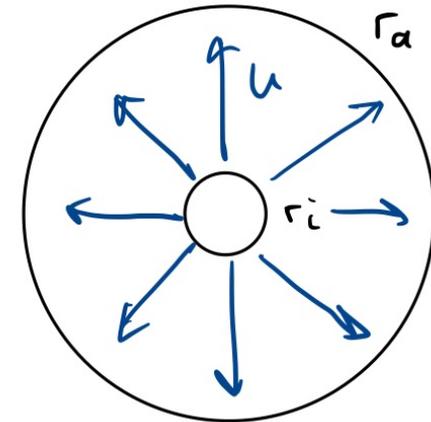
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad \Rightarrow \quad U = \int_{r_i}^{r_a} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)$$

Damit ist die Kapazität der Anordnung

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}} = 4\pi\epsilon \cdot \frac{r_i \cdot r_a}{r_a - r_i}$$

Im Grenzfall $r_a \rightarrow \infty$, d.h. Kapazität einer Kugel ohne Außenelektrode

$$C_\infty = \lim_{r_a \rightarrow \infty} \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}} = 4\pi\epsilon \cdot r_i$$



Kapazität einer Doppelleitung I

Berechnung der Kapazität von zwei Leitern (Radios r) der Länge l im Abstand a

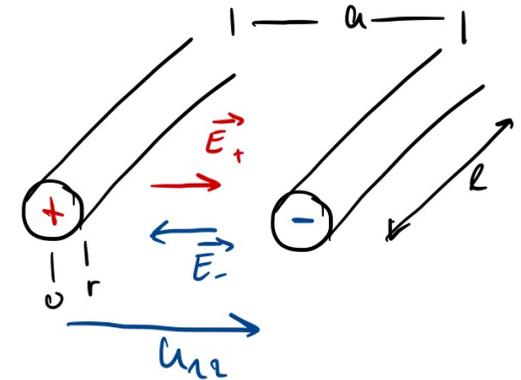
Anwendung des Überlagerungsverfahrens zur Berechnung des E-Feldes

$$E_+(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon \cdot r} \quad E_-(r) = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon \cdot (r - a)}$$

$$E_{\text{ges}}(r) = E_+(r) + E_-(r)$$

Spannung ausgehend der positiven Ladung

$$\begin{aligned} U_{12} &= \int_r^{a-r} E_{\text{ges}}(r') \, dr' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \int_r^{a-r} \frac{1}{r'} - \frac{1}{r' - a} \, dr' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \left[\ln(r') - \ln(r' - a) \right]_r^{a-r} = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \left[\ln\left(\frac{r'}{r' - a}\right) \right]_r^{a-r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \left[\ln\left(\frac{a-r}{-r}\right) - \ln\left(\frac{r}{r-a}\right) \right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{(a-r) \cdot (r-a)}{-r \cdot r}\right) = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{(a-r)^2}{r^2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{a-r}{r}\right)^2 = \frac{\lambda}{\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{a-r}{r}\right) \stackrel{a \gg r}{\approx} \frac{\lambda}{\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) \end{aligned}$$



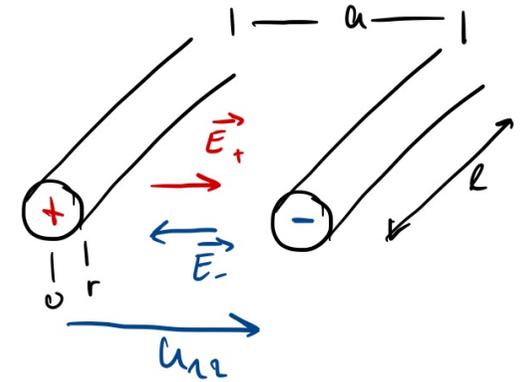
Kapazität einer Doppelleitung II

Damit ist die Kapazität der Doppelleitung

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda \cdot l}{U} = \frac{\lambda \cdot l}{\frac{\lambda}{\pi \epsilon} \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right)} = \frac{\pi \epsilon l}{\ln(a/r)} = \pi \epsilon l \cdot \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

Entsprechend lässt sich der Kapazitätsbelag berechnen

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{\pi \epsilon}{\ln(a/r)} = \pi \epsilon \cdot \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$



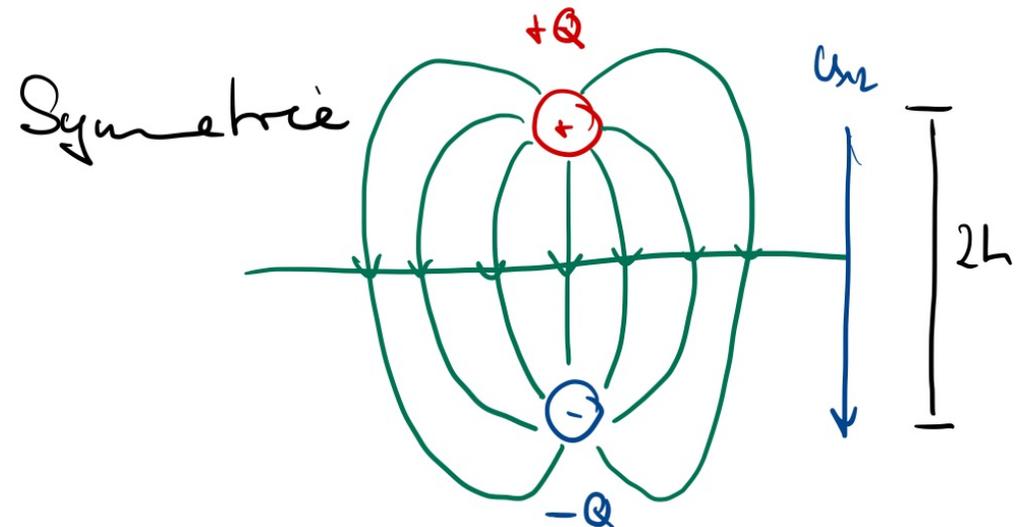
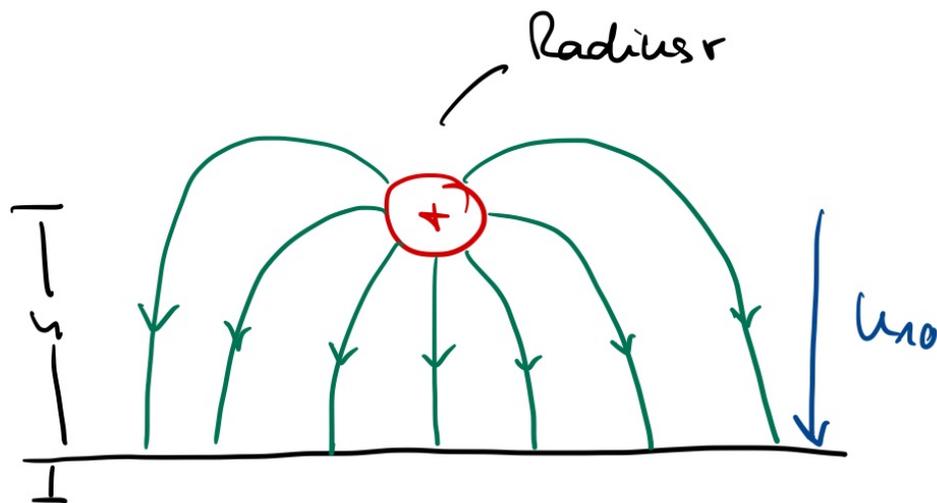
Kapazität einer Einzelleitung über Erde

Berechnung der Kapazität einer Einzelleitung über Erde durch Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften

$$C = \frac{Q}{U_{10}} = \frac{Q}{U_{12}/2} = \frac{2Q}{U_{12}} = \frac{2\lambda \cdot l}{\frac{\lambda}{\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{2h}{r}\right)} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{2h}{r}\right)}$$

Kapazitätsbelag

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{2h}{r}\right)}$$



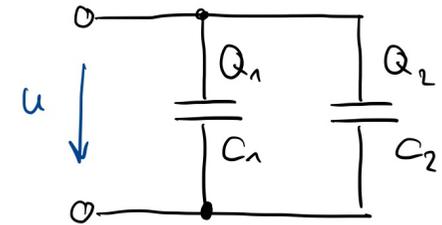
Parallelschaltung von Kondensatoren

Parallelschaltung von zwei Kondensatoren C_1 und C_2 : gleiche Spannung über beiden Kondensatoren

$$Q_1 = C_1 \cdot U \quad Q_2 = C_2 \cdot U$$

Damit gilt für die Gesamtkapazität der Parallelschaltung

$$C_{\text{ges}} = \frac{Q_{\text{ges}}}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} = C_1 + C_2$$



Allgemeine Berechnung der Gesamtkapazität bei einer Reihenschaltung beliebiger Kapazitäten

$$C_{\text{ges}} = \sum_i C_i$$

Für die Ladungsverhältnisse gilt entsprechend

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{Q_1}{Q_{\text{ges}}} = \frac{C_1}{C_{\text{ges}}}$$

Reihenschaltung von Kondensatoren

Ladung können nur über äußere Beschaltung fließen und innere Ladungen folgen durch Influenz

$$|Q_1| = |-Q_2| \quad \text{und} \quad |-Q_1| = |Q_2| \quad \Rightarrow \quad Q_1 = Q_2 = Q$$

Gesamtspannung über beide Kondensatoren

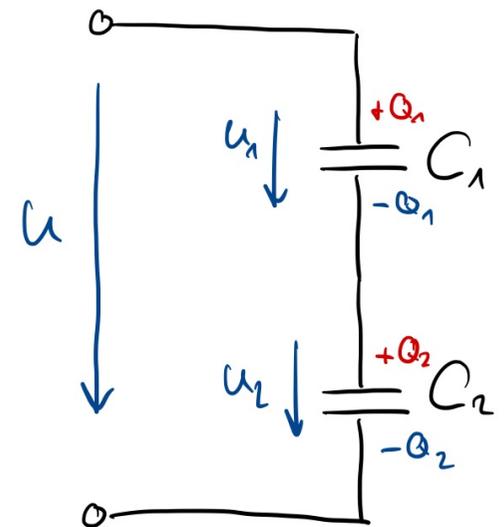
$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{\text{ges}}}$$

Damit gilt für die Gesamtkapazität der Parallelschaltung zweier Kondensatoren

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C_{\text{ges}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

Allgemeine Berechnung der Gesamtkapazität

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{\sum_i C_i}$$



Stern-Dreieck-Umwandlung von Kondensatoren

$$C_1 = \frac{C_{12} \cdot C_{13} + C_{12} \cdot C_{23} + C_{13} \cdot C_{23}}{C_{23}}$$

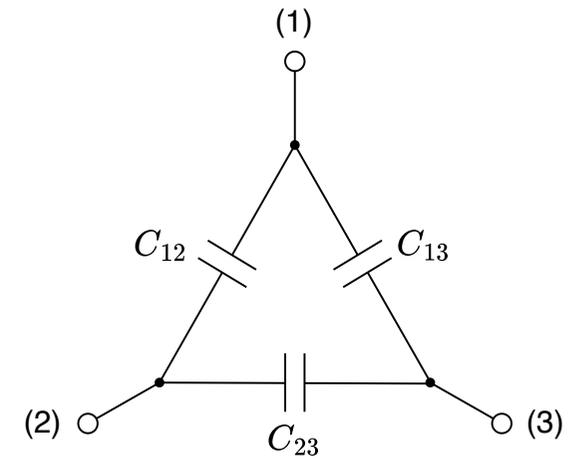
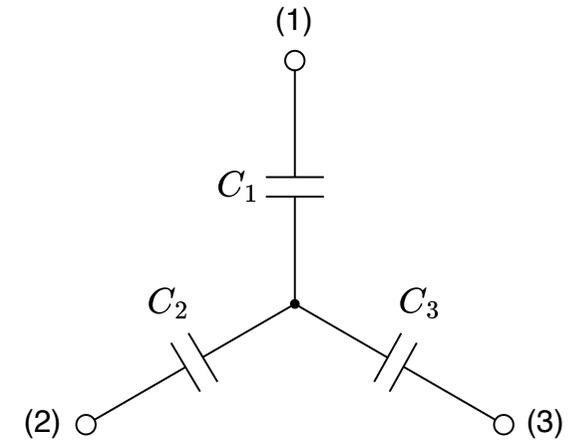
$$C_2 = \frac{C_{12} \cdot C_{13} + C_{12} \cdot C_{23} + C_{13} \cdot C_{23}}{C_{13}}$$

$$C_3 = \frac{C_{12} \cdot C_{13} + C_{12} \cdot C_{23} + C_{13} \cdot C_{23}}{C_{12}}$$

$$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$C_{23} = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$C_{13} = \frac{C_1 \cdot C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$



Energiedichte des Elektrischen Feldes

Energieinhalt des Kondensators

Kondensator speichert Energie in Form von elektrischer Feldenergie

Erhöhung der Ladung um dQ führt zu Erhöhung der Spannung um dU

$$dU = \frac{1}{C} \cdot dQ$$

Zur Erhöhung der Spannung muss elektrische Arbeit verrichtet werden

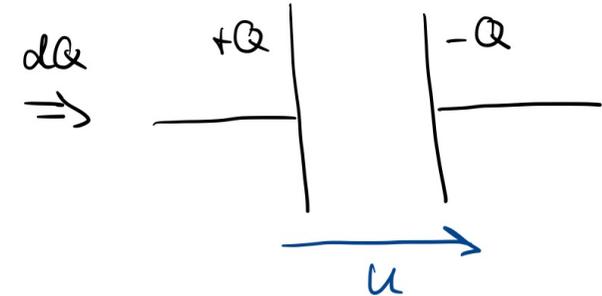
$$dW = U \cdot dQ = C \cdot U \cdot dU$$

Energieinhalt des Kondensators bei Spannung U ist verrichtete Arbeit beim Laden von $\tilde{U} = 0$ auf $\tilde{U} = U$

$$W = \int_{\tilde{U}=0}^{\tilde{U}=U} dW = \int_{\tilde{U}=0}^{\tilde{U}=U} C \cdot \tilde{U} \cdot d\tilde{U} = C \cdot \left[\frac{\tilde{U}}{2} \right]_0^U = \frac{1}{2} CU^2$$

Allgemeine

$$W = \frac{1}{2} CU^2 \quad W = \frac{1}{2} QU \quad W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$



Energiedichte des elektrischen Feldes

Energieinhalt eines idealen Plattenkondensators (d.h. homogene Feldverteilung)

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{D \cdot A}{E \cdot d} \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \cdot EDV$$

Feldvektoren des E- und D-Feldes zeigen stets in die gleiche Richtung

$$W = \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \cdot \vec{D} \cdot V$$

Bei inhomogener Feldverteilung => Energie pro Volumenelement, sog. *Energiedichte* von Interesse

$$w_e = \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Allgemeine Berechnung des Energieinhaltes des elektrischen Feldes eines Volumenelementes V

$$W = \iiint_V w_e dV = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

Kraft auf Kondensatorplatten

Idealer Plattenkondensator mit Fläche A und Abstand d mit Dielektrikum ε

Energieänderung bei Bewegung der Platten um $\Delta s \ll d$

$$\Delta W_{\text{mechanisch}} = \Delta W_{\text{elektrisch}}$$

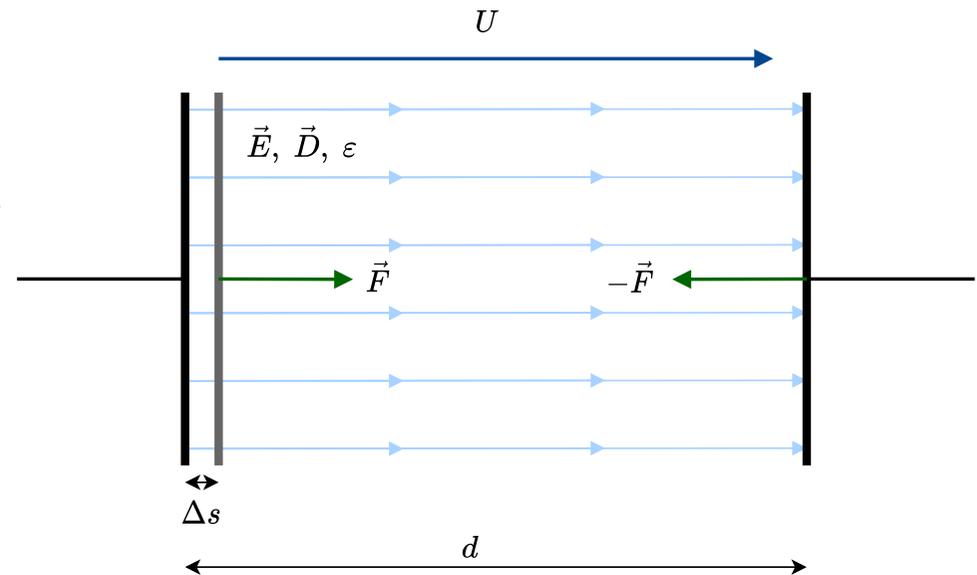
$$F \cdot \Delta s = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D \cdot A \cdot \Delta s$$

Damit ist der Betrag der Kraft auf die Plattenfläche

$$F = \frac{\varepsilon \cdot E^2 \cdot A}{2} = \frac{\varepsilon \cdot U^2 \cdot A}{2 \cdot d^2}$$

Zusammenhang von Kraft und Kapazität mit $C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$

$$F = \frac{U^2 \cdot C}{2 \cdot d}$$



Kraft auf Grenzschicht von zwei Dielektrika

Idealer Plattenkondensator mit Fläche $A = b \cdot c$ und Abstand d mit beweglichem Schichtdielektrikum ϵ_1 und ϵ_2

Betrachtung eines Volumenausschnittes $\Delta V = \Delta s \cdot c \cdot d$ mit $\Delta s \ll b$

Energieänderung des elektrischen Feldes bei Bewegung der Dielektrika um Δs

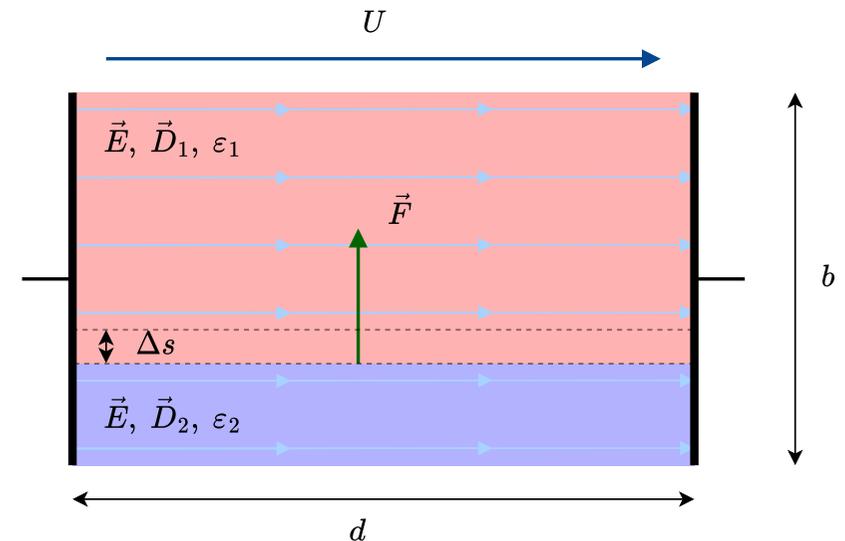
$$\Delta W_{\text{elektrisch}} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D_1 \cdot \Delta V - \frac{1}{2} \cdot E \cdot D_2 \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \cdot E^2 \cdot \Delta V \cdot (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

Änderung der mechanischen Energie

$$\Delta W_{\text{mechanisch}} = F \cdot \Delta s = \Delta W_{\text{elektrisch}}$$

Kraft auf die Grenzschicht der Dielektrika

$$F = \frac{E^2 \cdot c \cdot d}{2} \cdot (\epsilon_1 - \epsilon_2) = \frac{U^2 \cdot c}{2 \cdot d} \cdot (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$



Referenzen

- [1] M. Albach, *Elektrotechnik*, Pearson Verlag.
- [2] G. Hagmann, *Grundlagen der Elektrotechnik*, Aula Verlag.
- [3] R. Pregla, *Grundlagen der Elektrotechnik*, Hüthig Verlag.