Systematische Netzwerkanalyse

Systematische Anwendung der Kirchhoff'schen Gleichungen

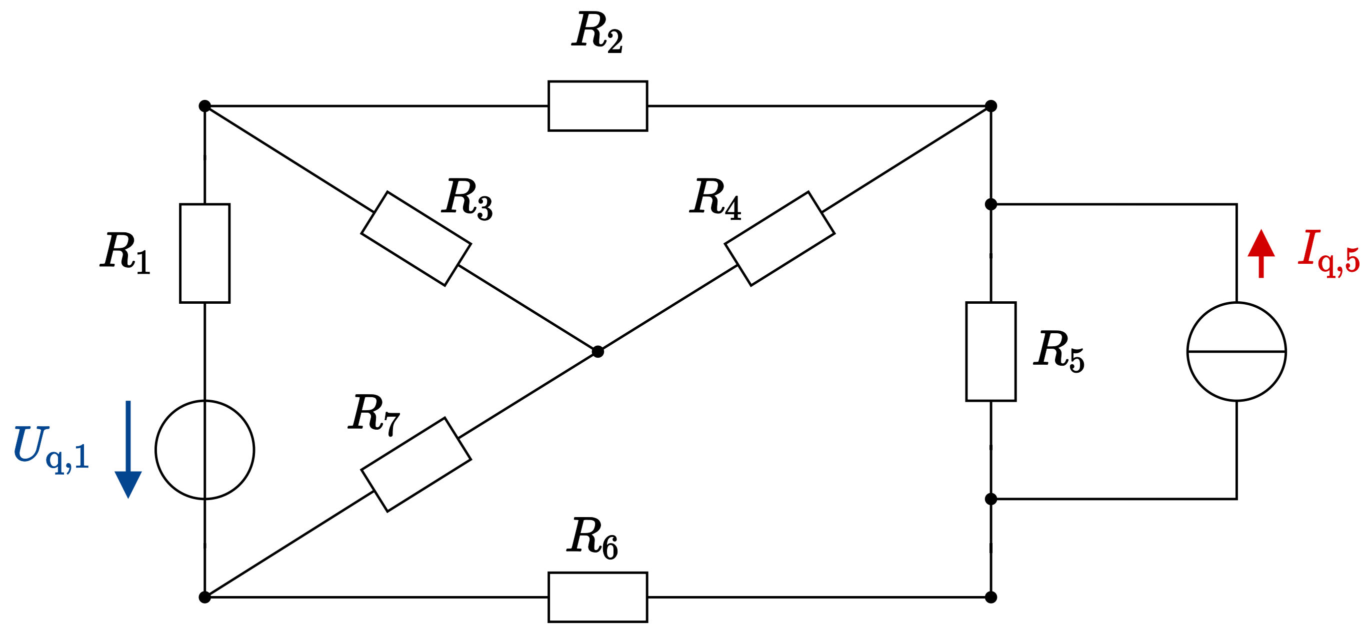
Systematische Analyse Elektrischer Netzwerke

Aufgabe: Bestimmung sämtlicher Ströme und Spannungen in einem Widerstandsnetzwerk

Vorgehen: Anwendung der Kirchhoff'schen Beziehungen erfolgt intuitiv

Problem: Welche und wieviele Knoten und Maschen sind zu wählen?

Voraussetzung: Reale Strom- und Spannungsquellen, d.h. mit Innenwiderstand



Systematische Zerlegung in Zweipole

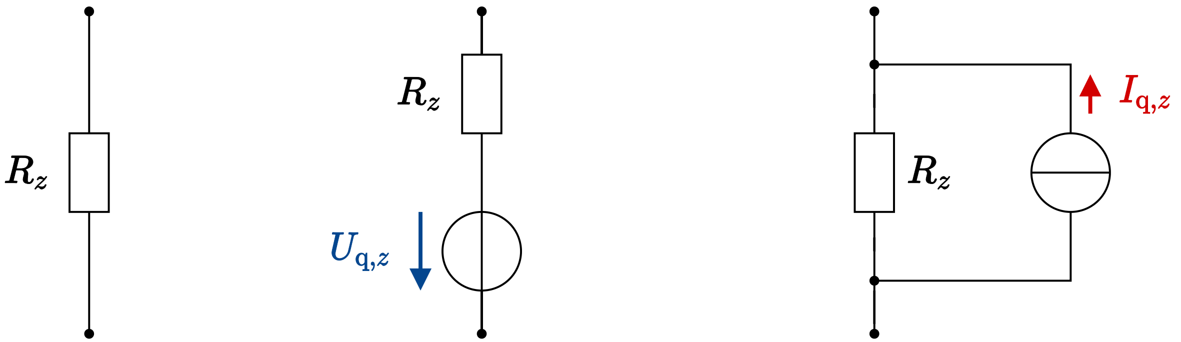
Betrachtung von Netzwerken aus Z Zweigen, bestehend aus folgenden Zweipolen:

- Widerstand
- Reale Stromquelle mit parallelem Innenwiderstand
- Reale Spannungsquelle mit seriellem Innenwiderstand

Das Netzwerk besteht somit aus insgesamt Z Widerständen

Gegeben sind Werte sämtlicher Widerstände R_z in allen Zweigen $z = 1, \ldots, Z$.

Den Spannungs- bzw. Stromquellen wird der jeweilige Zweigindex z zugeordnet, d.h. ($U_{\mathrm{q},z}$ bzw. $I_{\mathrm{q},z}$).



Festlegung der Zählpfeilrichtung der Zweipole

Die Festlegung der Richtung der Zählpfeile ist prinzipiell beliebig.

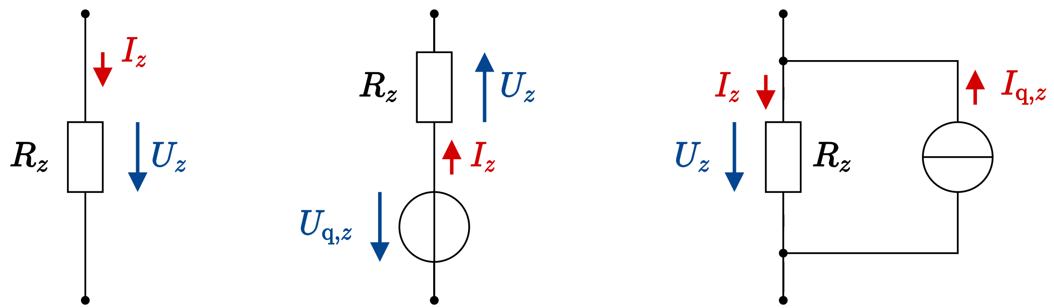
Für die hier vorgestellte Systematik sind trotzdem folgende Randbedingungen zu beachten:

– An Widerständen wird das *Verbraucherzählpfeilsystem (VZS)* verwendet

Strom- und Spannungszählpfeil zeigen in die gleiche Richtung

– Bei Spannungs- und Stromquellen wird das *Erzeugerzählpfeilsystem (EZS)* verwendet

Strom- und Spannungszählpfeil zeigen in die entgegengesetzte Richtung

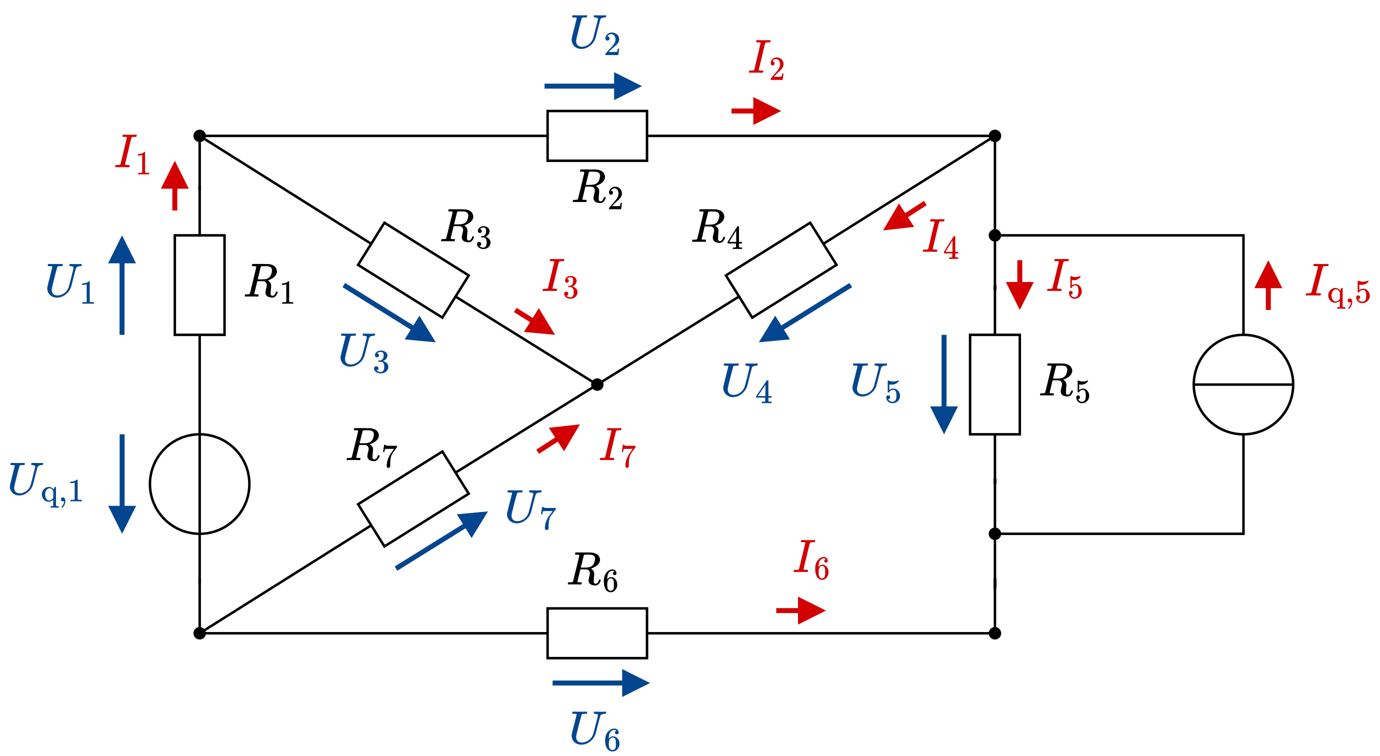


Aufgabe einer Systematischen Netzwerkberechnung

In jedem Zweig gilt somit der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung

$$U_z = R_z \cdot I_z \quad \text{mit} \quad z = 1, \ldots, Z$$

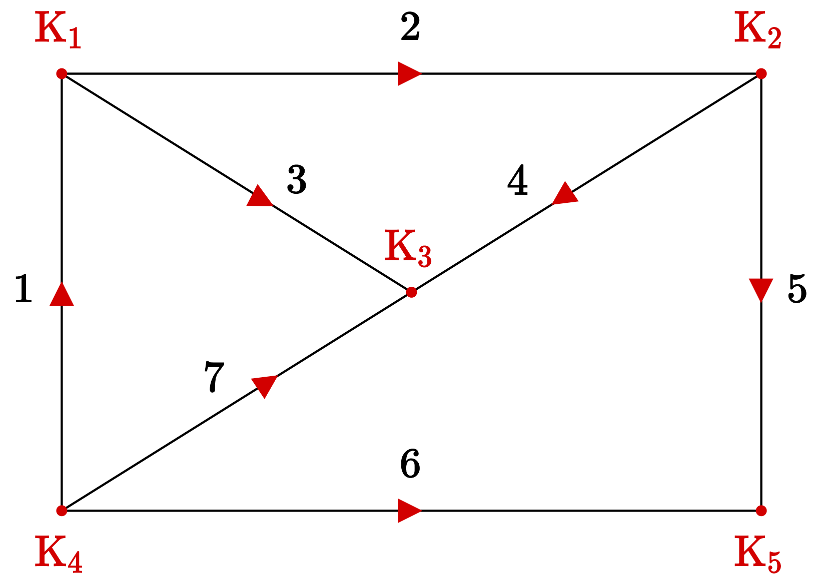
Zur Berechnung aller Ströme und Spannungen werden Z linear unabhängige Gleichungen benötigt.



Netzwerkgraph

Darstellung des Netzwerkes als *Netzwerkgraph* mit Z Kanten und K Knoten

- Nummerierung der einzelnen Kanten ($z = 1, \ldots, Z$)
- Festlegen einer Richtung der Kanten (gegeben durch Stromrichtung im jeweiligen Zweig)
- Nummerierung sämtlicher Knoten ($k = 1, \ldots, K$)



Aufstellen der Knotengleichungen des Netzwerkes

Festlegung der linear unabhängigen Knotengleichungen: Beliebige Wahl von $K-1$ Knoten

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K}_1: \quad & I_1 - I_2 - I_3 &= 0\\
\mathrm{K}_2: \quad & I_2 - I_4 - I_5 + I_{\mathrm{q},5} &= 0\\
\mathrm{K}_3: \quad & I_3 + I_4 + I_7 &= 0\\
\mathrm{K}_4: \quad & -I_1 - I_6 - I_7 &= 0
\end{aligned}
$$

Darstellung des Gleichungssystems als Matrix Multiplikation

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{Knotenmatrix } \mathbf{K}} \cdot \begin{bmatrix} I_1\\ I_2\\ I_3\\ I_4\\ I_5\\ I_6\\ I_7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0\\ -I_{\mathrm{q},5}\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Vektor der Stromquellen } \mathbf{I}_\mathrm{q}}
$$

Aufstellen der Maschengleichungen des Netzwerkes I

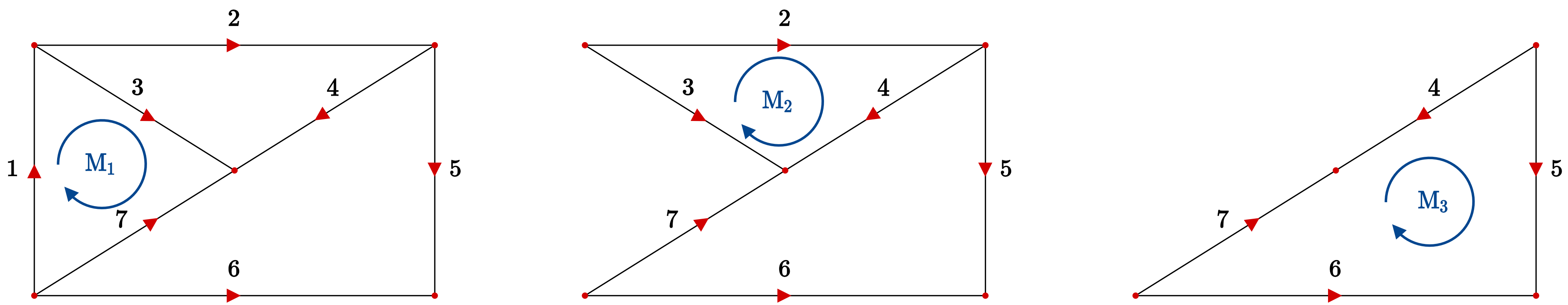
Zur vollständigen Berechnung aller Ströme des Netzwerkes werden noch

$$M = Z - (K - 1)$$

Maschen benötigt (*hier:* $M = 7 - (5 - 1) = 3$)

Maschen können mit folgendem Vorgehen aus dem Netzwerkgraphen ermittelt werden:

1. Wahl einer beliebigen geschlossenen Masche aus dem Netzwerkgraphen
2. Streichen *einer* Kante aus dieser Masche



Aufstellen der Maschengleichungen des Netzwerkes II

Auswertung der Spannungsbeziehung entlang aller drei Maschen ergibt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_1: \quad -U_{\mathrm{q},1} + U_1 + U_3 - U_7 &= 0 \\
\mathrm{M}_2: \quad U_2 + U_4 - U_3 &= 0 \\
\mathrm{M}_3: \quad -U_4 + U_5 - U_6 + U_7 &= 0
\end{aligned}
$$

Umformung der Maschengleichungen

- Einsetzen der Beziehung $U_z = R_z \cdot I_z$
- Auflösen der Quellspannung auf die rechte Seite

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_1: \quad R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 - R_7 \cdot I_7 &= U_{\mathrm{q},1} \\
\mathrm{M}_2: \quad R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 &= 0 \\
\mathrm{M}_3: \quad -R_4 \cdot I_4 + R_5 \cdot I_5 - R_6 \cdot I_6 + R_7 \cdot I_7 &= 0
\end{aligned}
$$

Aufstellen der Maschengleichungen des Netzwerkes III

Auch dieses Gleichungssystem lässt sich als lineares Gleichungssystem darstellen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & -R_7 \\ 0 & R_2 & -R_3 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 & -R_6 & R_7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{\mathrm{q},1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Vektor der Spannungsquellen } \mathbf{u}_{\mathrm{q},1}}$$

Lösung des gesamten Gleichungssystems

Damit ergibt sich insgesamt ein System mit Z Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathrm{q},5} \\ \mathbf{U}_{\mathrm{q},1} \end{bmatrix}$$

Der Lösungsvektor $\mathbf{I}$ der Z Zweigströme ist eindeutig durch Lösen des Gleichungssystems bestimmt

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathrm{q},5} \\ \mathbf{U}_{\mathrm{q},1} \end{bmatrix}$$

Die Z Zweigspannungen ergeben sich mittels

$$U_z = R_z \cdot I_z \quad \text{mit} \quad z = 1, \ldots, Z$$

Lösung des gesamten Gleichungssystems im Beispiel

Für das Beispiel ergibt sich für den Lösungsvektor der Zweigströme

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & -R_7 \\ 0 & R_2 & -R_3 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 & -R_6 & R_7 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{\mathrm{q},5} \\ 0 \\ 0 \\ U_{\mathrm{q},1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die 7 Zweigspannungen ergeben sich mittels

$$U_z = R_z \cdot I_z \quad \text{mit} \quad z = 1, \ldots, 7$$

Systematik zur Aufstellung des Gleichungssystems I

Die Matrizen $\mathbf{K}$ und $\mathbf{R}$, sowie die Vektoren und $\mathbf{I}_\mathrm{q}$ und $\mathbf{U}_\mathrm{q}$ lassen sich auch direkt aus dem Netzwerk ermitteln:

1. Die Matrix $\mathbf{K}$ ist eine $(K-1) \times Z$ Matrix mit Elementen an der k-ten Zeile und z-ten Spalte
   - $+1$, falls die Richtung der z-Kante in den k-ten Knoten *hinein* zeigt
   - -1, falls die Richtung der z-Kante in den k-ten Knoten *heraus* zeigt
   - 0, falls die z-Kante nicht am k-ten Knoten anliegt
2. Die Matrix $\mathbf{R}$ ist eine $M \times Z$ Matrix mit Elementen an der m-ten Zeile und z-ten Spalte
   - $+R_z$, falls die Richtung der z-ten Kante *entlang* der Richtung der m-ten Masche ist
   - $-R_z$, falls die Richtung der z-ten Kante *entgegen* der Richtung der m-ten Masche ist
   - 0, falls die z-ten Kante nicht Bestandteil der m-ten Masche ist

Systematik zur Aufstellung des Gleichungssystems II

3. Der Spaltenvektor der Stromquellen $\mathbf{I}_\mathrm{q}$ besitzt die Länge $K-1$ mit Wert an der k-ten Position
   - Summe aller Stromquellen, die am k-ten Knoten anliegen
   - Stromquellen in Zweigen, die in den k-ten Knoten *hinein* zeigen werden *positiv* gewichtet
   - Stromquellen in Zweigen, die in den k-ten Knoten *heraus* zeigen werden *negativ* gewichtet
4. Der Spaltenvektor der Spannungsquellen $\mathbf{U}_\mathrm{q}$ besitzt die Länge M mit Werten an der m-ten Position
   - Summe aller Spannungsquellen entlang der m-ten Masche
   - Spannungsquellen, die in Zweigen *entlang* der Richtung der Masche führen werden *positiv* gewichtet
   - Spannungsquellen, die in Zweigen *entgegen* der Richtung der Masche führen werden *negativ* gewichtet

Wichtig für diese Zählweise: Verwendung des Erzeugerzählpfeilsystems (EZS) für Strom- und Spannungsquellen, d.h. die Zählpfeile von Strom und Spannung sind jeweils entgegengerichtet.

Problematik dieser Systematik

- Zur Lösung des oben genannten Gleichungssystems muss eine $Z \times Z$ Matrix invertiert werden
- Komplexität der Berechnung der inversen Matrix besitzt die Ordnung $\mathcal{O}(Z^3)$
- Zu invertierende Matrix besitzt sehr viele Null-Elemente

Zerlegung der Berechnung in mehrere Schritte mit geringer Komplexität (*divide and conquer*)

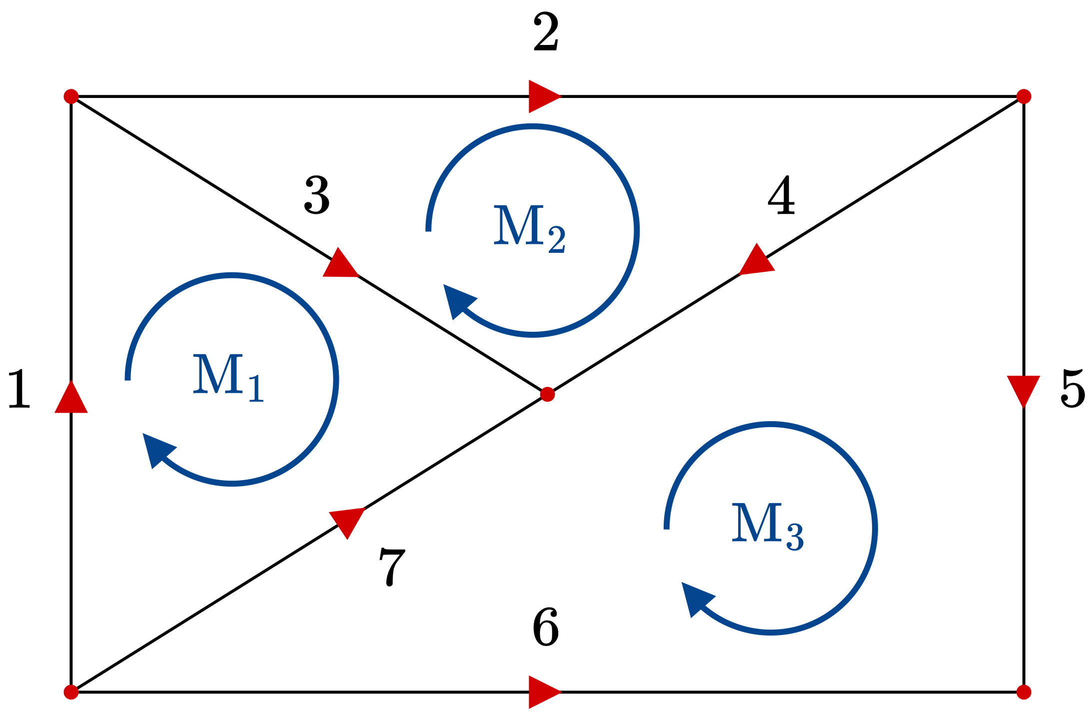
Zwei Verfahren, die jeweils diese Zerlegung durchführen

- Maschenstromverfahren
- Knotenpotentialverfahren

Maschenstromverfahren

Maschenstromverfahren

Ausgangspunkt ist der gerichtete Netzwerkgraph mit $M = Z - (K - 1)$ Maschen:



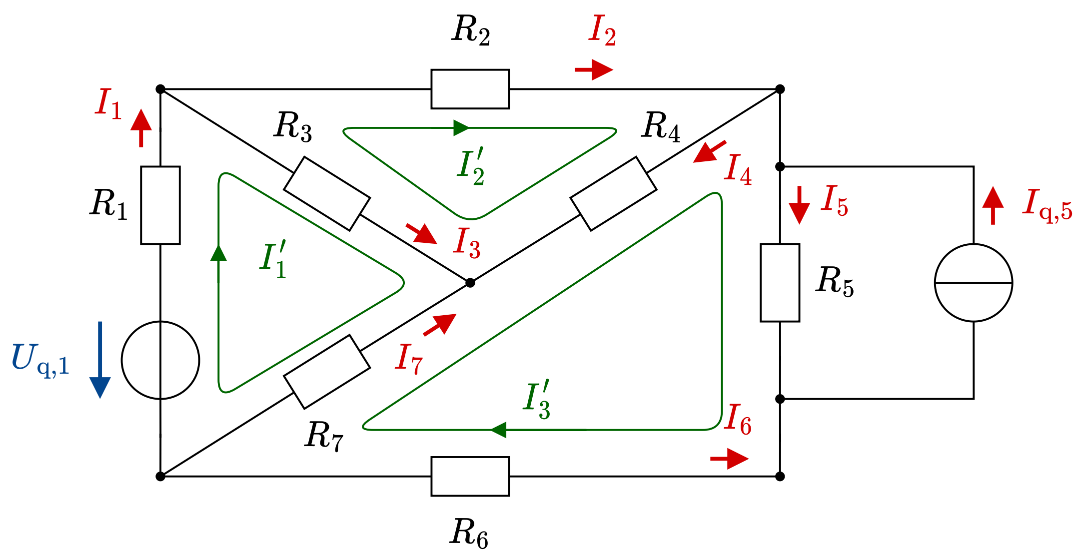
Annahme: Entlang dieser Maschen fließen Maschenströme I'_m mit $m = 1, \ldots, M$

Maschenströme sind fiktive Ströme und innerhalb einer Masche konstant

Zusammenhang zwischen Zweigströmen und Maschenströmen

Zweigströme ergeben sich aus Maschenströmen mittels der Abbildung

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ I_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{q,5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

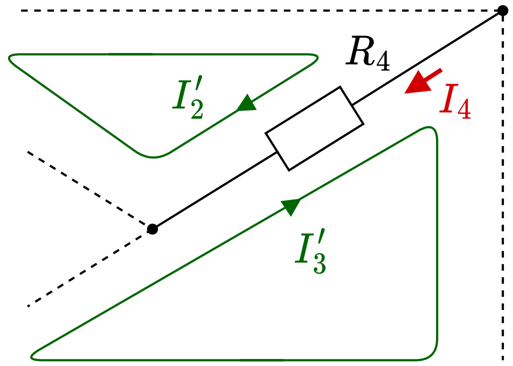


Kurz dargestellt

$$\mathbf{I} = \mathbf{Q}_{\mathrm{M}} \cdot \mathbf{I}' + \mathbf{I}_{\mathrm{q,M}}$$

Beispiele für den Zusammenghang von Zweigströmen und Maschenströmen

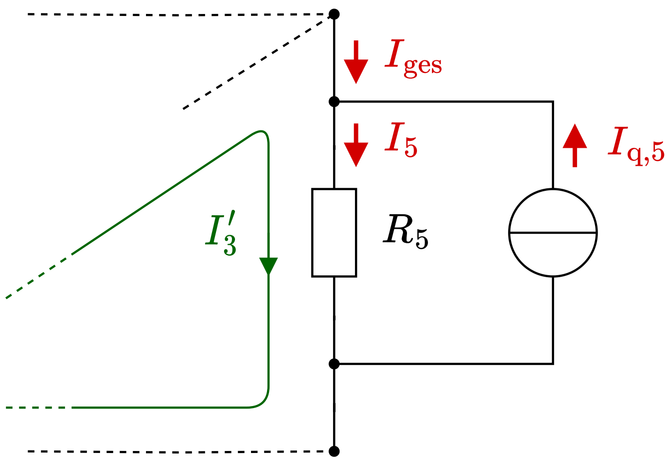
Berechnung des Zweigstromes $z = 4$:



- Der Zweig $z = 4$ liegt sowohl entlang Masche $m = 2$ als auch $m = 3$
- Die entgegengesetzte Zählrichtung von I_3' gegenüber I_4 führt zu

$$I_4 = I_2' - I_3'$$

Berechnung des Zweigstromes $z = 5$:



- Gesamtstrom aus Strom durch Widerstand I_5 und Stromquelle $I_{q,5}$

$$I_{ges} = I_5 - I_{q,5}$$

- Zweig liegt nur entlang der Masche $m = 5$

$$I_{ges} = I_3' \qquad \Rightarrow \qquad I_5 = I_3' + I_{q,5}$$

Aufstellen der Maschengleichungen

Mit Hilfe der Maschenströme lassen sich nun die drei Maschengleichungen aufstellen

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_1: \quad -U_{\mathrm{q},1} + R_1 \cdot I'_1 + R_3 \cdot (I'_1 - I'_2) + R_7 \cdot (I'_1 - I'_3) &= 0 \\
\mathrm{M}_2: \quad R_3 \cdot (I'_2 - I'_1) + R_2 \cdot I'_2 + R_4 \cdot (I'_2 - I'_3) &= 0 \\
\mathrm{M}_3: \quad R_6 \cdot I'_3 + R_7 \cdot (I'_3 - I'_1) + R_4 \cdot (I'_3 - I'_2) + R_5 \cdot (I'_3 + I_{\mathrm{q},5}) &= 0
\end{aligned}$$

Umformung der Maschengleichungen

- Sortieren dieses Gleichungssystems nach den Maschenströmen I'_1, I'_2 und I'_3
- Auflösen der Quellengrößen auf die rechte Seite

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_1: \quad (R_1 + R_3 + R_7) \cdot I'_1 - R_3 \cdot I'_2 - R_7 \cdot I'_3 &= U_{\mathrm{q},1} \\
\mathrm{M}_2: \quad -R_3 \cdot I'_1 + (R_2 + R_3 + R_4) \cdot I'_2 - R_4 \cdot I'_3 &= 0 \\
\mathrm{M}_3: \quad -R_7 \cdot I'_1 - R_4 \cdot I'_2 + (R_4 + R_5 + R_6 + R_7) \cdot I'_3 &= -R_5 \cdot I_{\mathrm{q},5}
\end{aligned}$$

Lösung des linearen Gleichungssystems Maschenströme

Damit ergibt sich ein lineares $M \times M$ Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_7 & -R_3 & -R_7 \\ -R_3 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 \\ -R_7 & -R_4 & R_4+R_5+R_6+R_7 \end{bmatrix}}_{\text{Maschenwiderstandsmatrix } \mathbf{R}_\mathrm{M}} \cdot \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ I_3' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{\mathrm{q},1} \\ 0 \\ -R_5 \cdot I_{\mathrm{q},5} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_\mathrm{q}'}$$

Die einzelnen Maschenströme lassen sich nun durch Lösen dieses Gleichungssystems ermitteln

$$\mathbf{I}' = \mathbf{R}_\mathrm{M}^{-1} \cdot \mathbf{U}_\mathrm{q}'$$

Daraus können sämtliche Ströme und Spannungen des Netzwerkes berechnet werden.

Vorgehen beim Maschenstromverfahren I

1. Zeichnen eines gerichteten Netzwerkgraphen mit Z Zweigen und M gerichteter Maschenumläufe
2. Aufstellen der $M \times M$ Maschenwiderstandsmatrix $\mathbf{R}_\mathrm{M} = [R_{i,j}]$
   - Hauptdiagonale ($i = j = m$): $R_{m,m}$ ist Summe der Widerstände der m-ten Masche
   - Nebendiagonale: Kopplungswiderstände zwischen den Maschen i und j
     - $R_{i,j}$ ist Summe der gemeinsamen Widerstände der Maschen i und j
     - Vorzeichen ist *positiv* falls Richtung der Maschen i und j *gleich* ist.
     - Vorzeichen ist *negativ* falls Richtung der Maschen i und j *gegengleich* ist.

Vorgehen beim Maschenstromverfahren II

3. Aufstellen des Vektors $\mathbf{U}'_\mathrm{q} = [U'_{\mathrm{q},m}]$ der Quellenspannungen (Länge M)

$$U'_{\mathrm{q},m} = \sum_{\forall z \in \mathcal{M}_m} (U_{\mathrm{q},z} - I_{\mathrm{q},z} \cdot R_z) \qquad \mathcal{M}_m \text{ Menge aller Zweige entlang der Masche } m$$

   - *Positive* Gewichtung von $U_{\mathrm{q},z}$ bzw. $I_{\mathrm{q},z}$ falls Zählpfeilrichtung der Quelle und der Masche m *gegengleich*
   - *Negative* Gewichtung von $U_{\mathrm{q},z}$ bzw. $I_{\mathrm{q},z}$ falls Zählpfeilrichtung der Quelle und der Masche m *gleich*

4. Lösung des $M \times M$ Gleichungssystems der Maschenströme

$$\mathbf{I}' = \mathbf{R}_\mathrm{M}^{-1} \cdot \mathbf{U}'_\mathrm{q}$$

Vorgehen beim Maschenstromverfahren III

5. Aufstellen der $Z \times M$ Matrix $\mathbf{Q}_\mathrm{M} = [Q_{z,m}]$ mit
   - $Q_{z,m} = +1$, falls die Richtung der z-ten Kante *gleich* der Richtung der m-ten Masche ist
   - $Q_{z,m} = -1$, falls die Richtung der z-ten Kante *entgegen* der Richtung der m-ten Masche ist
   - $Q_{z,m} = 0$, falls die z-te Kante nicht Bestandteil der m-ten Masche ist
6. Aufstellen des Vektors (Länge Z) $\mathbf{I}_\mathrm{q,M} = [I_{\mathrm{q},z}]$ der Stromquellen der Zweige (0 sonst)
7. Berechnung der Zweigströme

$$\mathbf{I} = \mathbf{Q}_\mathrm{M} \cdot \mathbf{I}' + \mathbf{I}_\mathrm{q,M}$$

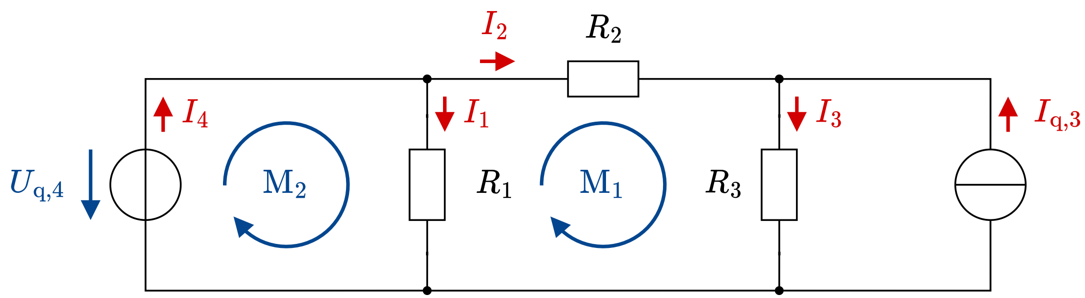
8. Berechnung der Zweigspannungen

$$U_z = R_z \cdot I_z \quad \text{für} \quad z = 1, \ldots, Z$$

Ideale Spannungsquelle beim Maschenstromverfahren

Anwendung idealer Stromquellen beim Maschenstromverfahren prinzipiell möglich

Beispiel: Netzwerkes mit $Z = 4$ Zweigen und $K = 3$ Knoten und somit $M = 4 - (3 - 1) = 2$ Maschen



Beim Aufstellen der Maschenwiderstandsmatrix ist Spannungsquelle als *Kurzschluss* zu betrachten

Ansonsten bleibt die Konstruktion der verbleibenden Matrizen gleich

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{M,1} \\ I_{M,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{q,3} \cdot R_3 \\ U_{q,4} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{M,1} \\ I_{M,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{q,3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

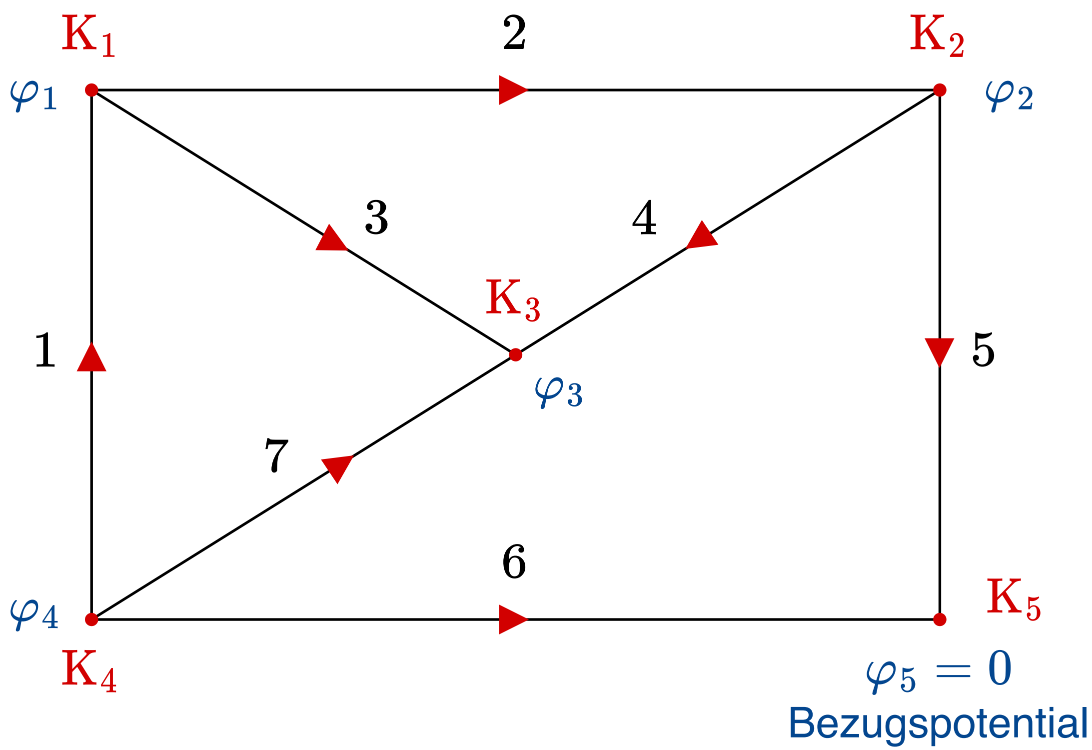
Knotenpotentialverfahren

Knotenpotentialverfahren

Ausgangspunkt für das Knotenpotentialverfahren ist der gerichtete Netzwerkgraph mit K Knoten

Jeden der K Knoten wird nun ein Knotenpotential φ_k für $k = 1, \ldots, K$ zugeordnet

Ein Knoten wird nun als Bezugsknoten oder Nullpotential festgelegt (*hier*: Knoten $k = 5$)



Festlegung der Knotenspannungen

Mit Hilfe dieser $K-1$ Knotenpotentiale lassen sich die Z Zweigspannungen ermitteln

$$U_1 = \varphi_4 - \varphi_1 + U_{q,1}$$

$$U_2 = \varphi_1 - \varphi_2$$

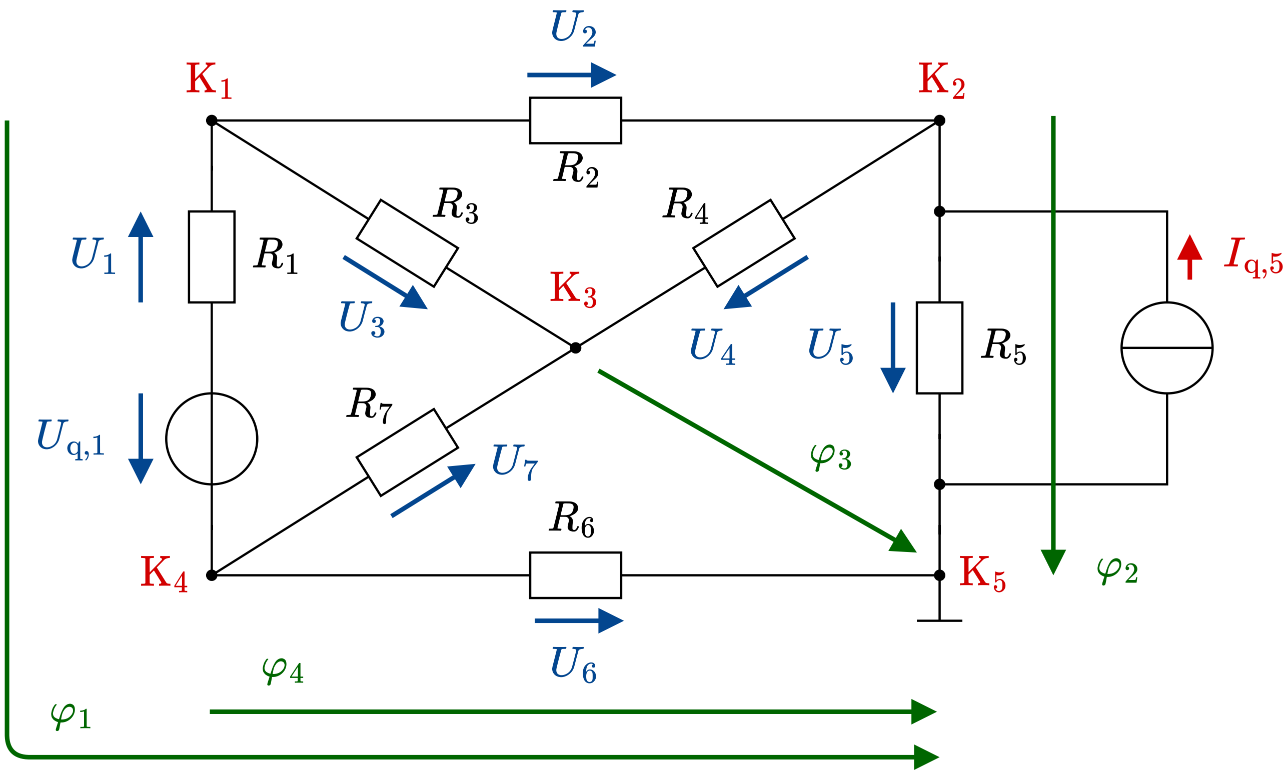
$$U_3 = \varphi_1 - \varphi_3$$

$$U_4 = \varphi_2 - \varphi_3$$

$$U_5 = \varphi_2$$

$$U_6 = \varphi_4$$

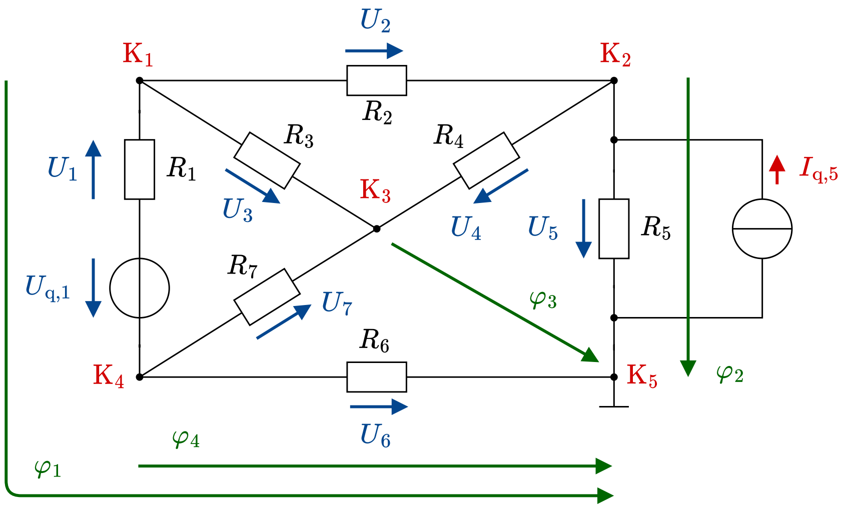
$$U_7 = \varphi_4 - \varphi_3$$



Zusammenhang zwischen Zweigspannungen und Knotenspannungen

Vektor der Zweigspannungen ergibt sich nun aus Knotenspannungen mittels der Abbildung

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{\mathrm{q},1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



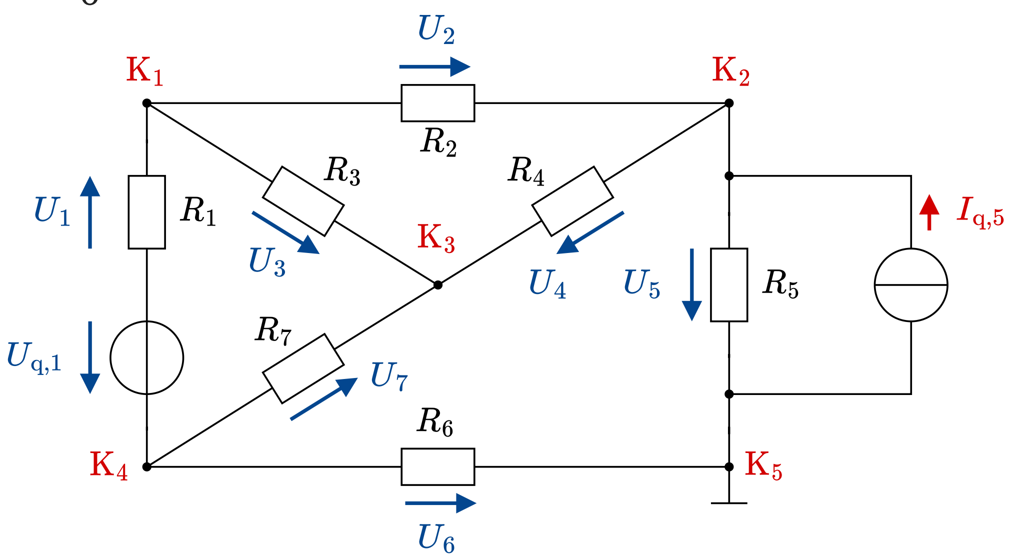
Kurz dargestellt

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q}_{\mathrm{K}} \cdot \varphi + \mathbf{U}_{\mathrm{S,K}}$$

Aufstellen der Knotengleichungen I

Für jeden Knoten lässt sich nun die Knotengleichung aufstellen

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K}_1: \quad & -U_1/R_1 + U_2/R_2 + U_3/R_3 &= 0 \\
\mathrm{K}_2: \quad & -U_2/R_2 + U_4/R_4 + U_5/R_5 - I_{\mathrm{q},5} &= 0 \\
\mathrm{K}_3: \quad & -U_3/R_3 - U_4/R_4 - U_7/R_7 &= 0 \\
\mathrm{K}_4: \quad & U_1/R_1 + U_6/R_6 + U_7/R_7 &= 0
\end{aligned}
$$



Aufstellen der Knotengleichungen II

Diese Knotengleichungen werden nun umgeformt

- Statt der elektrischen Widerstände der jeweiligen Zweige werden deren elektrischen Leitwerte verwendet.

$$G_z = \frac{1}{R_z} \quad \text{mit} \quad z = 1, \dots, Z$$

- Statt der Zweigspannungen werden die Knotenspannungen verwendet.
- Quellenströme und -spannungen (*hier* $I_{\mathrm{q},5}$ und $U_{\mathrm{q},1}$) werden auf die rechte Seite gebracht

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_1: \quad & -(\varphi_4 - \varphi_1) \cdot G_1 + (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot G_2 + (\varphi_1 - \varphi_3) \cdot G_3 && = && U_{\mathrm{q},1} \cdot G_1 \\
\mathrm{K}_2: \quad & -(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot G_2 + (\varphi_2 - \varphi_3) \cdot G_4 + \varphi_2 \cdot G_5 && = && I_{\mathrm{q},5} \\
\mathrm{K}_3: \quad & -(\varphi_1 - \varphi_3) \cdot G_3 - (\varphi_2 - \varphi_3) \cdot G_4 - (\varphi_4 - \varphi_3) \cdot G_7 && = && 0 \\
\mathrm{K}_4: \quad & (\varphi_4 - \varphi_1) \cdot G_1 + \varphi_4 \cdot G_6 + (\varphi_4 - \varphi_3) \cdot G_7 && = && -U_{\mathrm{q},1} \cdot G_1
\end{aligned}$$

Aufstellen der Netzwerk-Matrixgleichungen

Damit lässt sich allgmeien ein $K \times K$ Gleichungssystem der Knotenspannungen aufstellen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 & -G_3 & -G_1 \\ -G_2 & G_2 + G_4 + G_5 & -G_4 & 0 \\ -G_3 & -G_4 & G_3 + G_4 + G_7 & -G_7 \\ -G_1 & 0 & -G_7 & G_1 + G_6 + G_7 \end{bmatrix}}_{\text{Knotenleitwertmatrix } \mathbf{G}_\mathrm{K}} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{\mathrm{q},1} \cdot G_1 \\ I_{\mathrm{q},5} \\ 0 \\ -U_{\mathrm{q},1} \cdot G_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}'_\mathrm{q}}$$

Die einzelnen Knotenpotentiale lassen sich nun durch Lösen dieses Gleichungssystems ermitteln

$$\varphi = \mathbf{G}_\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathbf{I}'_\mathrm{q}$$

Damit lassen sich sämtliche Zweigspannungen des Netzwerkes berechnen.

Aus den Zweigspannungen lassen sich über die Leitwerte bzw. Widerstände alle Zweigströme berechnen.

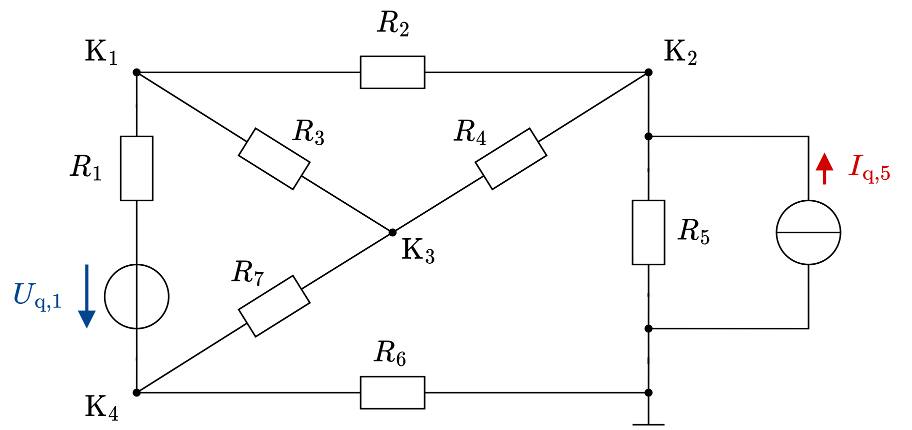
Systematik zur Aufstellung der Knotenleitwertmatrix

Die $(K-1)\times(K-1)$ *Knotenleitwertmatrix* $\mathbf{G}_\mathrm{K} = [G_{i,j}]$ beschreibt die Topologie der Leitwerte

Somit lässt sie sch direkt aus dem Schaltbild konstruieren:

- Hauptdiagonale ($i = j = k$): $G_{k,k}$ ist Summe der Leitwerte, die am k-ten Knoten anliegen
- Nebendiagonale: Kopplungsleitwerte zwischen den Knoten i und j
  - $G_{i,j}$ ist der Leitwert zwischen Knoten i und Knoten j
  - Vorzeichen der Kopplungsleitwerte ist stets *negativ*

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+G_3 & -G_2 & -G_3 & -G_1 \\ -G_2 & G_2+G_4+G_5 & -G_4 & 0 \\ -G_3 & -G_4 & G_3+G_4+G_7 & -G_7 \\ -G_1 & 0 & -G_7 & G_1+G_6+G_7 \end{bmatrix}$$



Systematik zur Aufstellung des Vektors der Quellenströme

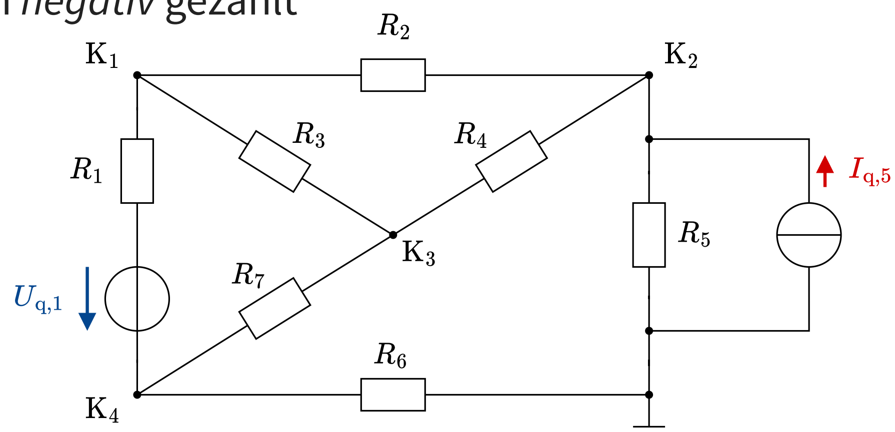
Der $(K-1)\times 1$ Vektor der Quellenströme $\mathbf{I}'_\mathrm{q} = [I'_{\mathrm{q},k}]$ beschreibt die Topologie sämtlicher Quellen

- Das k-te Element des Vektors entspricht der Summe aller Stromquellen im Knoten k
- Spannungsquellen werden in äquivalente Stromquellen gewandelt

$$I_{\mathrm{q,ers},i} = -U_{\mathrm{q},i} \cdot G_i$$

- Stromzählpfeile die in den Knoten *hinein* zeigen werden *positiv* gezählt
- Stromzählpfeile die aus dem Knoten *heraus* zeigen werden *negativ* gezählt

$$\begin{bmatrix} U_{\mathrm{q},1} \cdot G_1 \\ I_{\mathrm{q},5} \\ 0 \\ -U_{\mathrm{q},1} \cdot G_1 \end{bmatrix}$$



Vorgehen beim Knotenpotentialverfahren I

1. Aufstellen der $(K-1)\times(K-1)$ *Knotenleitwertmatrix* $\mathbf{G}_\mathrm{K} = [G_{i,j}]$
   - Hauptdiagonale ($i = j = k$): $G_{k,k}$ ist Summe der Leitwerte, die am k-ten Knoten anliegen
   - Nebendiagonale: Kopplungsleitwerte zwischen den Knoten i und j
     - $G_{i,j}$ ist der Leitwert zwischen Knoten i und Knoten j
     - Vorzeichen der Kopplungsleitwerte ist stets *negativ*
2. Aufstellen des Vektors $\mathbf{I}'_\mathrm{q} = [I_{\mathrm{q},k}]$ der Quellenströme (Länge $(K-1)$)

$$I_{\mathrm{q},k} = \sum_{\forall z \in \mathcal{K}_k} (I_{\mathrm{q},z} - U_{\mathrm{q},z} \cdot G_z) \qquad \mathcal{K}_k \text{ Menge aller Zweige, die am Knoten } k \text{ anliegen}$$

   - *Positive* Gewichtung von $U_{\mathrm{q},z}$ bzw. $I_{\mathrm{q},z}$ falls Zählpfeil der Quelle z aus dem Knoten k *hinein* zeigt
   - *Negative* Gewichtung von $U_{\mathrm{q},z}$ bzw. $I_{\mathrm{q},z}$ falls Zählpfeil der Quelle z in den Knoten k *heraus* zeigt

Vorgehen beim Knotenpotentialverfahren II

3. Lösung des $(K-1)\times(K-1)$ Gleichungssystems der Knotenpotentialen

$$\varphi = \mathbf{G}_{\mathrm{K}}^{-1} \cdot \mathbf{I}_{\mathrm{q}}'$$

4. Berechnen der Z Zweigspannungen aus den $K-1$ Knotenpotentialen

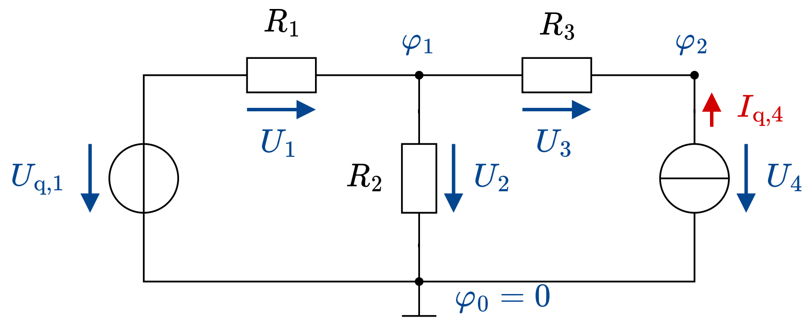
5. Berechnung der Z Zweigströme mittels Ohm'schen Gesetz

$$I_z = G_z \cdot U_z \quad \text{für} \quad z = 1, \ldots, Z$$

Ideale Stromquelle beim Knotenpotentialverfahren

Anwendung idealer Stromquellen beim Knotenpotentialverfahren prinzipiell möglich

Beispiel: Betrachtung eines Netzwerkes mit $Z = 4$ Zweigen und $K = 3$ Knoten



Beim Aufstellen der Knotenleitwertmatrix ist Innenleitwert der idealen Stromquelle zu betrachten ($G_\mathrm{i} = 0$)

Ansonsten bleibt die Konstruktion der verbleibenden Matrizen gleich

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{q,1} \cdot G_1 \\ I_{q,4} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{q,1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verallgemeinerung von Maschenstrom- und Knotenpotentialverfahren

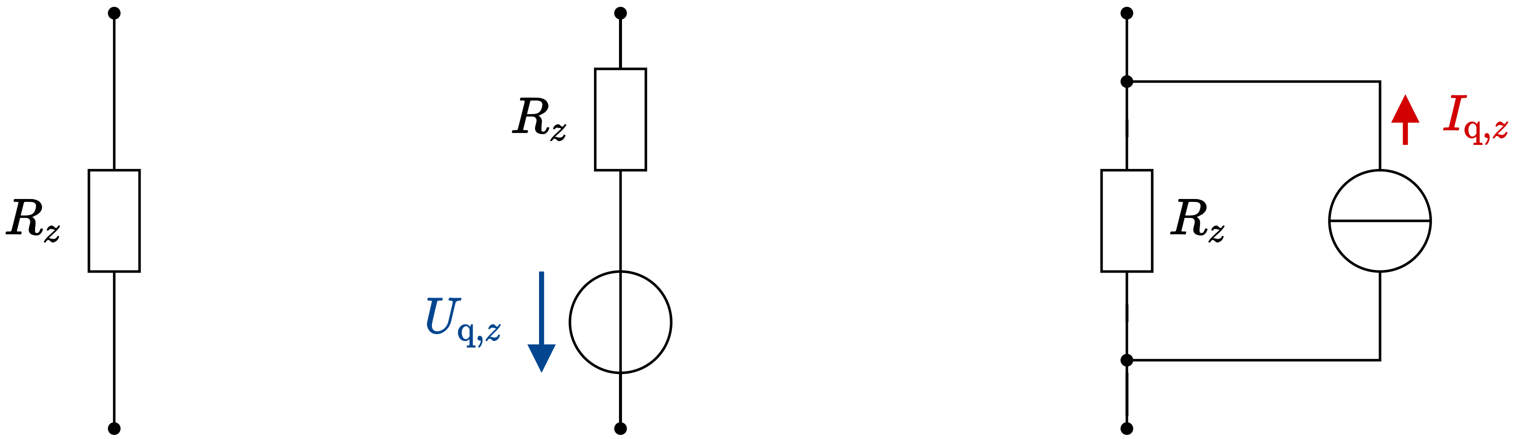
Vergleich von Maschenstromverfahren und Knotenpotentialverfahren

- Betrachtung von Netzwerken mit Z Zweigen, K Knoten und $M = Z - (K-1)$ Maschen
- Verbraucherzählpfeilssytem an Widerständen
- Erzeugerzählpfeilsystem an Strom- und Spannungsquellen

	Maschenstromverfahren	**Knotenpotentialverfahren**
Ausgangspunkt	Maschenwiderstandsmatrix $\mathbf{R}_\mathrm{M}$	Knotenleitwertmatrix $\mathbf{G}_\mathrm{K}$
Quellenvektor	$\mathbf{U}'_\mathrm{S} = \left[\sum_{\forall z \in \mathcal{M}_m} (U_{\mathrm{q},z} - R_z \cdot I_{\mathrm{q},z})\right]$	$\mathbf{I}'_\mathrm{S} = \left[\sum_{\forall z \in \mathcal{K}_k} (I_{\mathrm{q},z} - G_z \cdot U_{\mathrm{q},z})\right]$
Zweigströme	$[I_z] = \mathbf{I} = \mathbf{Q}_\mathrm{M} \cdot \mathbf{I}' + \mathbf{I}_\mathrm{S,M}$	$I_z = G_z \cdot U_z$
Zweigspannungen	$U_z = R_z \cdot I_z$	` $[U_z] = \mathbf{U} = \mathbf{Q}_\mathrm{K} \cdot \mathbf{U}' + \mathbf{U}_\mathrm{S,K}$ ``
Ideale U-quelle	anwendbar mit $R_\mathrm{i} = 0$	bisher nicht anwendbar
Ideale I-quelle	bisher nicht anwendbar	anwendbar mit $G_\mathrm{i} = 0$
Komplexität	$\mathcal{O}(M^3)$	$\mathcal{O}(K^3)$

Zweige mit idealen Quellen

Bisher: Zweige mit realen Spannungs- oder Stromquellen (d.h. mit Innenwiderstand)



Nun: Berücksichtigung von Zweigen mit idealen Spannungs- oder Stromquellen prinzipiell möglich

Hierbei sind Spannungs- bzw. Stromquelle und Innenwiderstand als zwei separate Zweige zu betrachten

Unterscheidung der Fälle

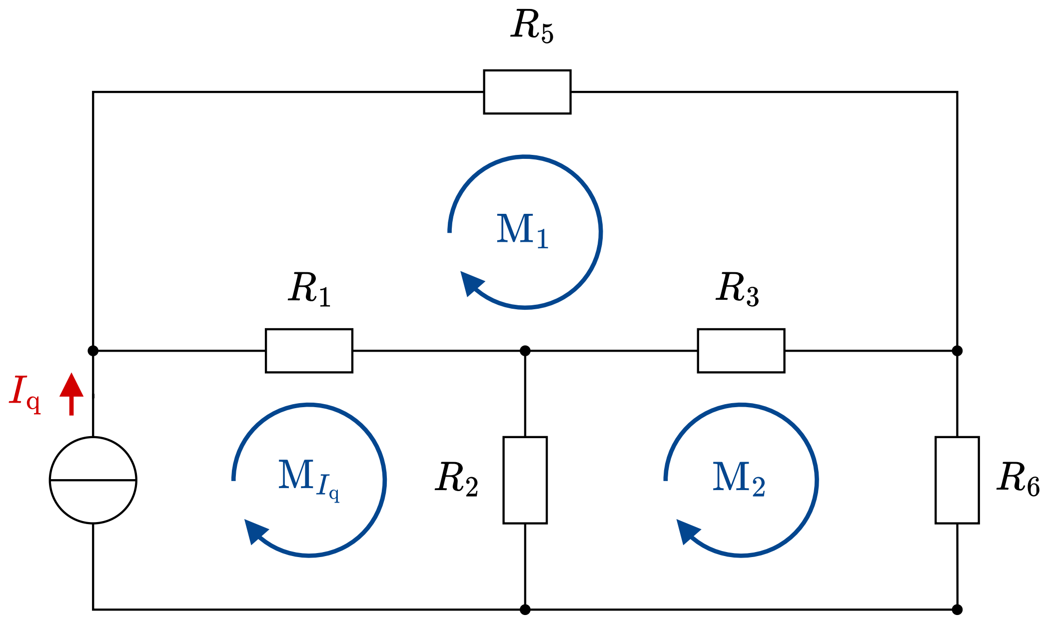
- Maschenstromverfahren mit idealer Stromquelle
- Knotenpotentialverfahren mit idealer Spannungsquelle

Ideale Stromquelle beim Maschenstromverfahren I

Stromquelle legt Maschenstrom von zugehöriger Masche fest

Aufstellen des Gleichungssystems über Maschen ohne Stromquellen

- Konstruktion der Maschenwiderstandsmatrix bleibt gleich
- Ideale Stromquellen sind im Vektor der Quellenspannungen entsprechend zu berücksichtigen



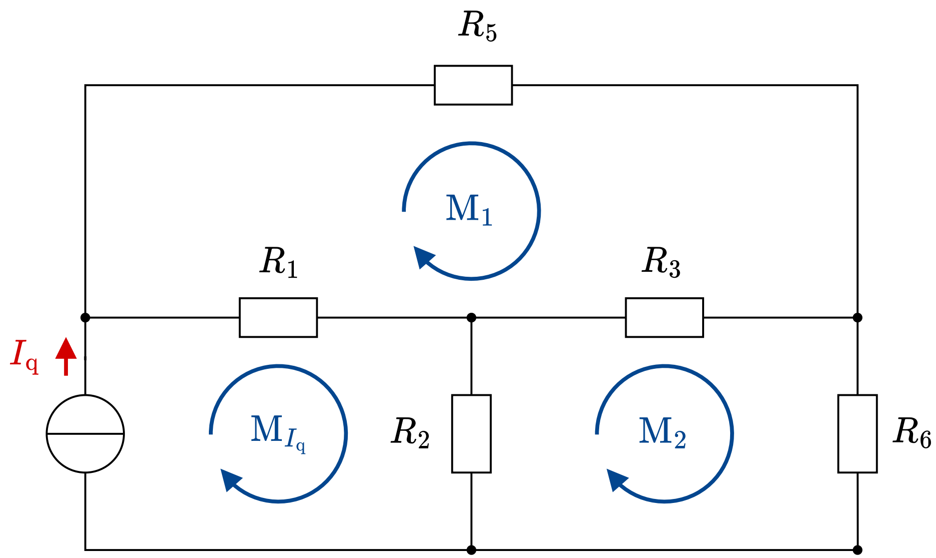
Ideale Stromquelle beim Maschenstromverfahren II

Aufstellen des Gleichungssystems im Beispiel ergibt

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_5 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_\mathrm{q} \cdot R_1 \\ I_\mathrm{q} \cdot R_2 \end{bmatrix}$$

Maschenstrom in Masche $\mathrm{M}_{I_\mathrm{q}}$ entspricht I_q

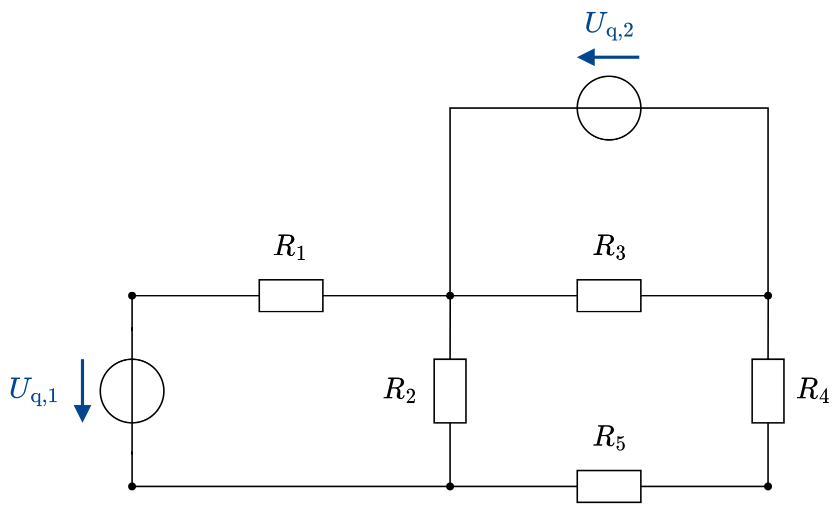
Berücksichtigung im Vektor der rechten Seite von I_q über gleiche Widerstände von $\mathrm{M}_{I_\mathrm{q}}$ mit M_1 bzw. M_2



Ideale Spannungsquelle beim Knotenpotentialverfahren I

Berücksichtigung idealer Spannungsquellen beim Knotenpotentialverfahren möglich

Beschreibung der Unterschiede anhand folgendem Beispielnetzwerk



Betrachtung von insgesamt

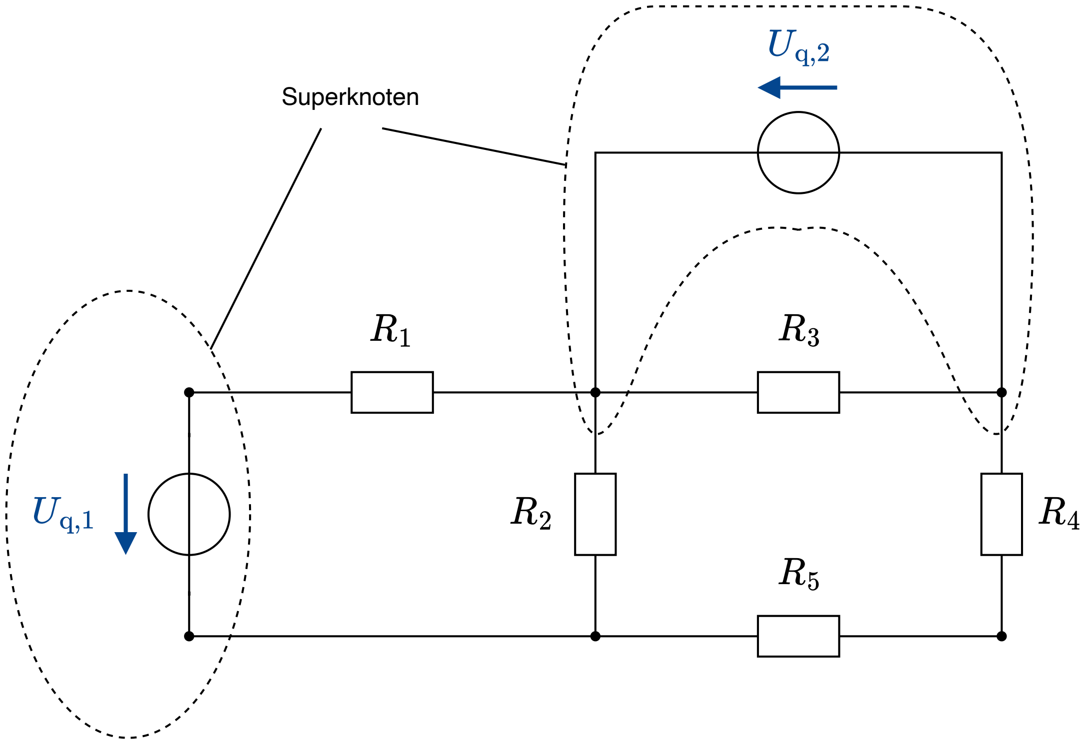
- 7 Zweigen (zwei Spannungsquelle $U_{q,1}$ und $U_{q,2}$ sowie 5 Widerstände R_1 bis R_5)
- 5 Knoten

Ideale Spannungsquelle beim Knotenpotentialverfahren II

Beide Potentiale der Spannungsquelle werden nicht unabhängig voneinander durch das Netzwerk bestimmt

Potentialdifferenz entspricht dem Wert der jeweiligen Spannungsquelle

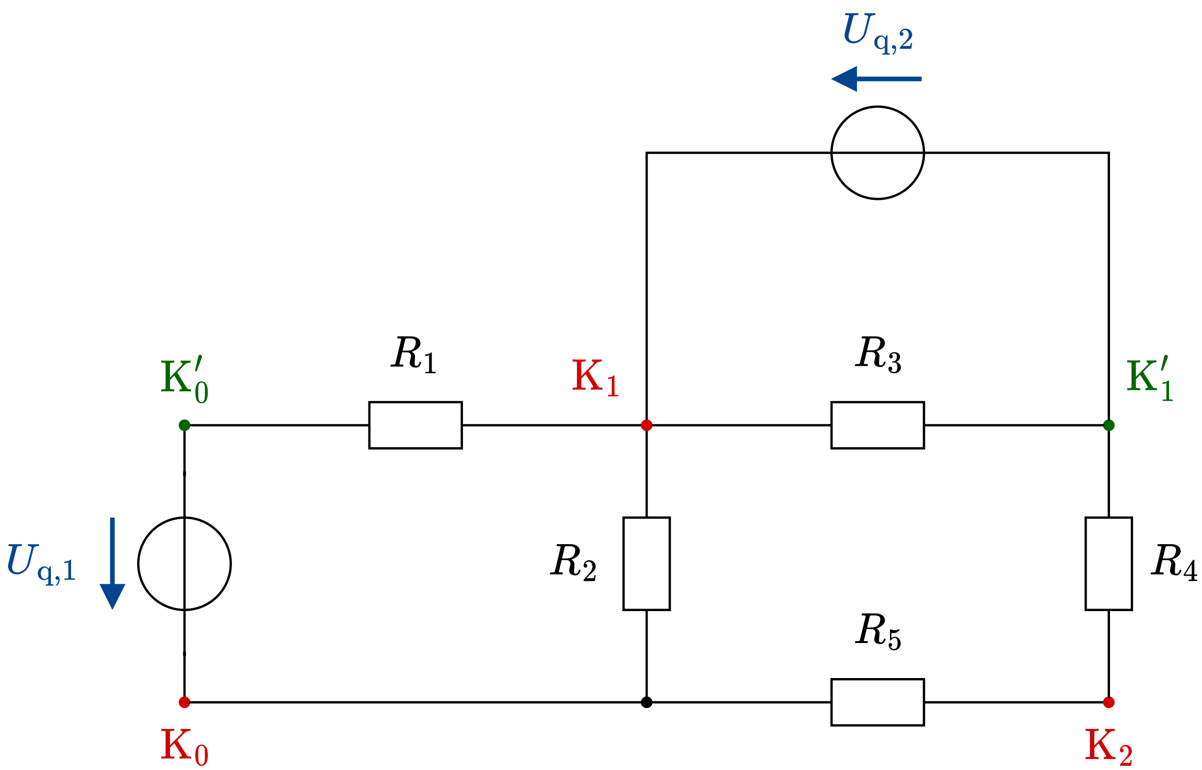
Zusammenfassen der beiden Knoten einer Spannungsquelle zu sog. *Superknoten*



Ideale Spannungsquelle beim Knotenpotentialverfahren III

Nummerierung der Knoten und Superknoten (Bezugsknoten bekommt Index 0)

Zweite Knoten der Spannungsquelle wird als *aktiver Knoten* bezeichnet (*hier:* K_0' und K_1')

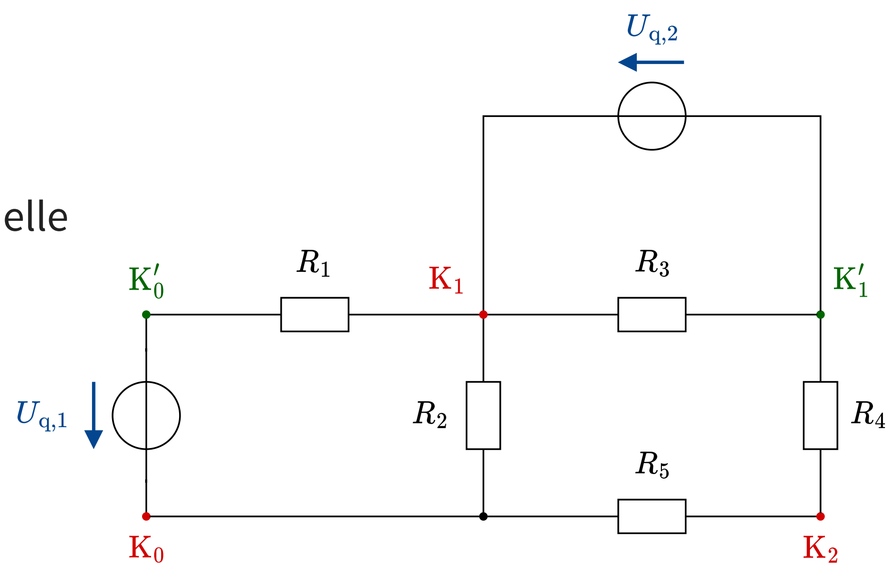


Ideale Spannungsquelle beim Knotenpotentialverfahren IV

Aufstellen der Knotenleitwertmatrix wie bisher

- Bezugsknoten wird nicht weiter berücksichtigt
- Superknoten entspricht Kurzschluss der Spannungsquelle

$$\mathbf{G}_{\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_4 \\ -G_4 & G_4 + G_5 \end{bmatrix}$$



Besonderheit in diesem Beispiel

- Widerstand R_3 parallel zur Spannungsquelle
- Kein Einfluss von R_3 auf Knotenleitwertmatrix

Ideale Spannungsquelle beim Knotenpotentialverfahren V

Aufstellen des Vektors der Quellenströme bezüglich Stromquellen wie bisher

Besonderheiten bei der Berücksichtigung von Spannungsquellen

1. Falls Knoten k über einen Leitwert G_i mit aktivem Knoten der Spannungsquelle $U_{\mathrm{q},j}$ verbunden
   - Berücksichtigung des Stromes $U_{\mathrm{q},j} \cdot G_i$ in Gleichung k
   - Positive Gewichtung falls aktiver Knoten mit hohem Potential verbunden
2. Falls Knoten k Superknoten der Spannungsquelle $U_{\mathrm{q},j}$
   - Berücksichtigung des Stromes $U_{\mathrm{q},j} \cdot \tilde{G}_k$ in Gleichung k
   - $\tilde{G}_k$ ist Summe aller Leitwerte an aktivem Knoten k' (parallele Leitwerte zu $U_{\mathrm{q},j}$ werden ignoriert)
   - Positive Gewichtung falls Knoten k mit hohem Potential verbunden

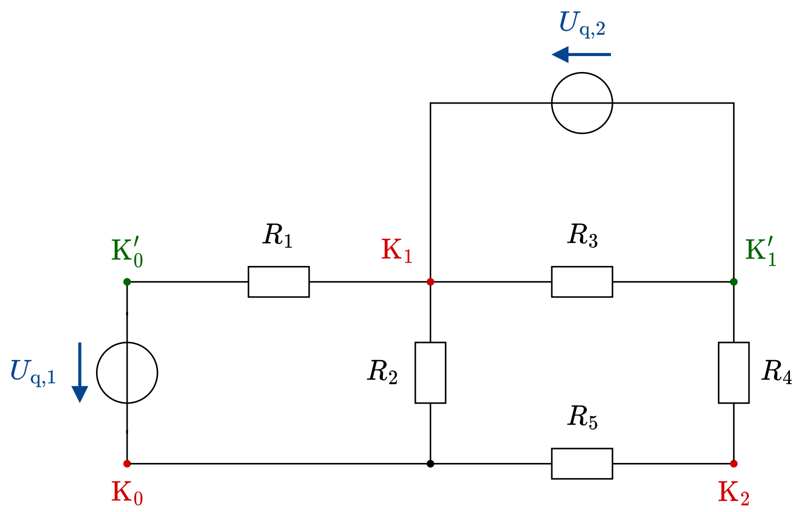
Falls $U_{\mathrm{q},j}$ mit zwei aktiven Knoten verbunden muss Spannung zum nächsten regulären Knoten zu verwenden

Ideale Spannungsquelle beim Knotenpotentialverfahren VI

Aufstellen des Vektors der Quellenströme im Beispiel

Erste Gleichung $k = 1$

- Knoten K_1 ist über G_1 mit aktivem Knoten K_0' verbunden
  - Positive Gewichtung, da K_0' an hohem Potential von $U_{\mathrm{q},1}$
  - Strombeitrag: $+U_{\mathrm{q},1} \cdot G_1$
- Knoten K_1 ist aktiver Knoten von $U_{\mathrm{q},2}$
  - Summe aller Leitwerte am aktiven Knoten von K_1': $\tilde{G}_1 = G_4$
  - Negative Gewichtung, da K_1 an niedrigem Potential von $U_{\mathrm{q},2}$
  - Strombeitrag: $-U_{\mathrm{q},2} \cdot G_4$



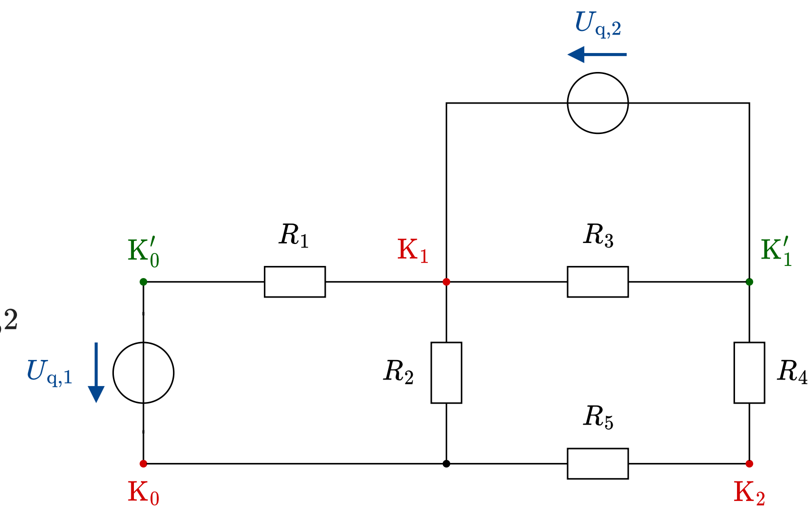
Ideale Spannungsquelle beim Knotenpotentialverfahren VII

Aufstellen des Vektors der Quellenströme im Beispiel

Zweite Gleichung $k = 2$

– Knoten K_2 ist über G_4 mit aktivem Knoten K_1' verbunden

- Positive Gewichtung, da K_1' an hohem Potential von $U_{\mathrm{q},2}$
- Strombeitrag: $+U_{\mathrm{q},2} \cdot G_4$



Daraus resultiert folgender Vektor der Quellenströme

$$\mathbf{I}_{\mathrm{q}}' = \begin{bmatrix} U_{\mathrm{q},1} \cdot G_1 - U_{\mathrm{q},2} \cdot G_4 \\ -U_{\mathrm{q},2} \cdot G_4 \end{bmatrix}$$

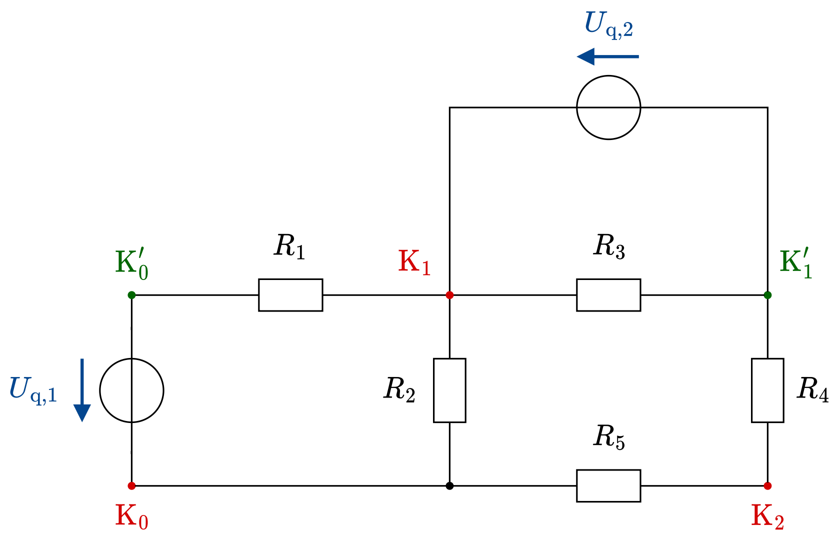
Ideale Spannungsquelle beim Knotenpotentialverfahren VIII

Durch Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_4 \\ -G_4 & G_4 + G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{\mathrm{q},1} \cdot G_1 - U_{\mathrm{q},2} \cdot G_4 \\ -U_{\mathrm{q},2} \cdot G_4 \end{bmatrix}$$

ergeben sich die Potentiale φ_1 und φ_2 der Knoten K_1 und K_2

Damit können alle Ströme und Spannungen des Netzwerkes ermittelt werden.



Referenzen

[1] M. Albach, *Elektrotechnik,* Pearson Verlag.

[2] G. Hagmann, *Grundlagen der Elektrotechnik,* Aula Verlag.

[3] R. Scholz, *Grundlagen der Elektrotechnik,* Hanser Verlag.

[4] R. Unbehauen, *Grundlagen der Elektrotechnik 1,* Springer Verlag.

