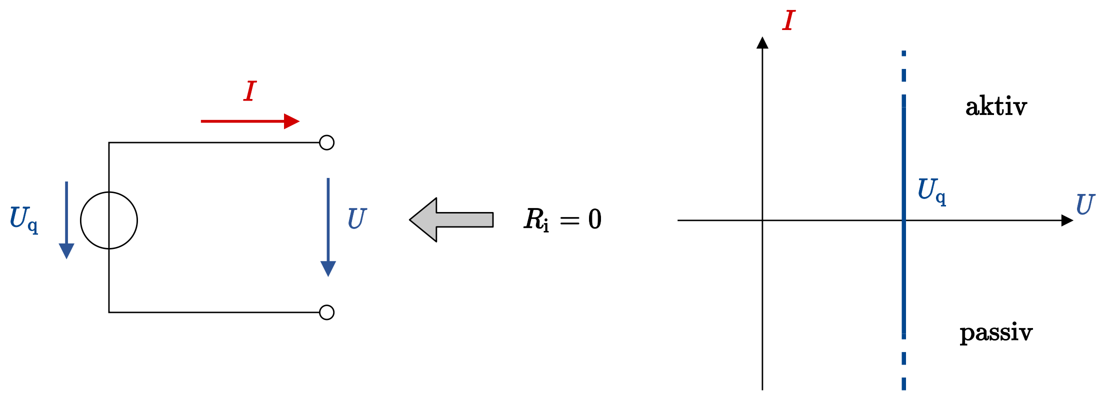
Aktive Zweipole

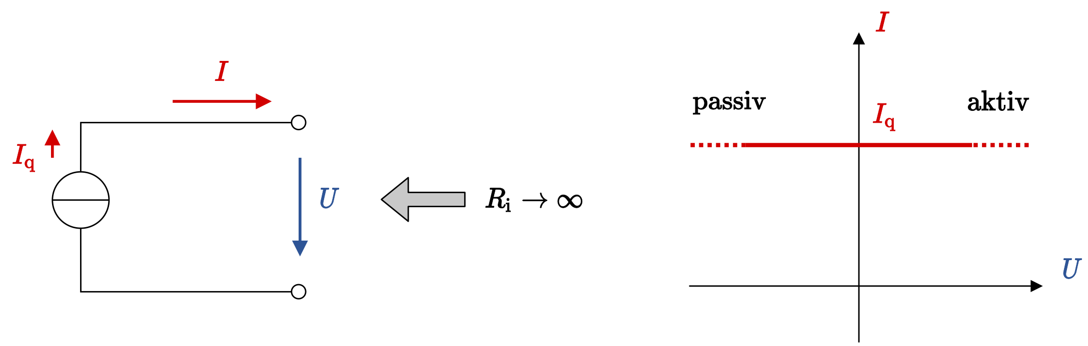
Lineare Quellen

Kennlinien idealer Strom- und Spannungsquellen

Innenwiderstand Spannungsquelle: $R_\mathrm{i} = 0$

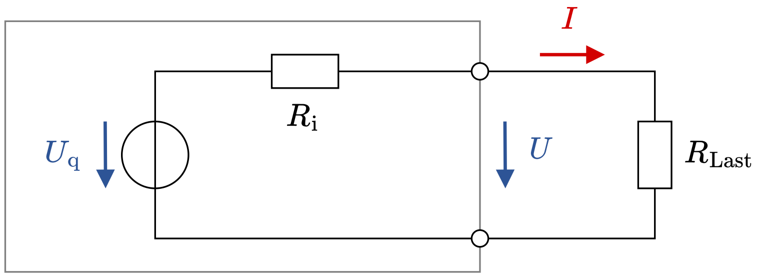


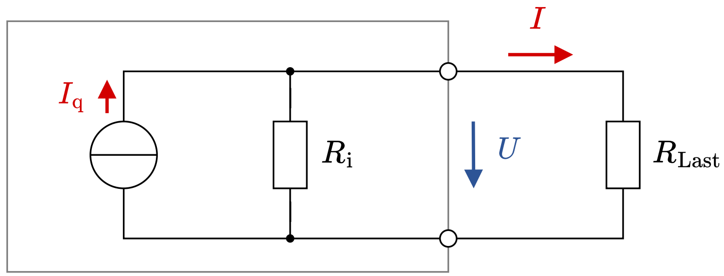
Innenwiderstand Stromquelle: $R_\mathrm{i} \to \infty$



Reale Strom- und Spannungsquelle

Reale Strom- und Spannungsquellen besitzen endlichen Innenwiderstand





Lineare Quelle:

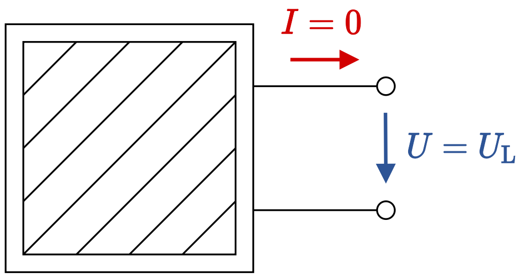
- U-I-Kennlinie wird durch Geradengleichung beschrieben
- Steigung der Kennlinie entspricht Innenwiderstand R_i

Beispiele:

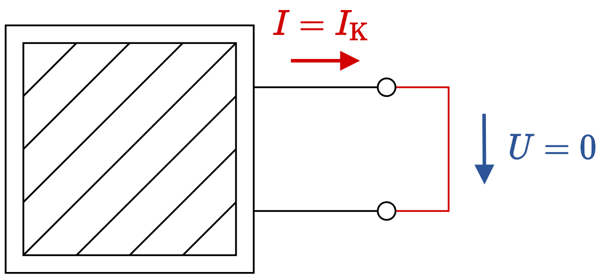
- Lineare Spannungsquelle: Batterie, Akku, etc.
- Lineare Stromquelle: beleuchtete Soloarzelle, etc.

Drei Betriebsfälle linearer Quellen

1. Leerlauf-Fall
   - $I = 0$
   - Leerlaufspannung U_L

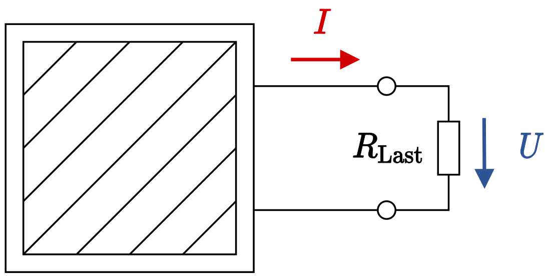


2. Kurzschluss
   - $U = 0$
   - Kurzschlussstrom I_K



3. Belastung mit Lastwiderstand R_Last

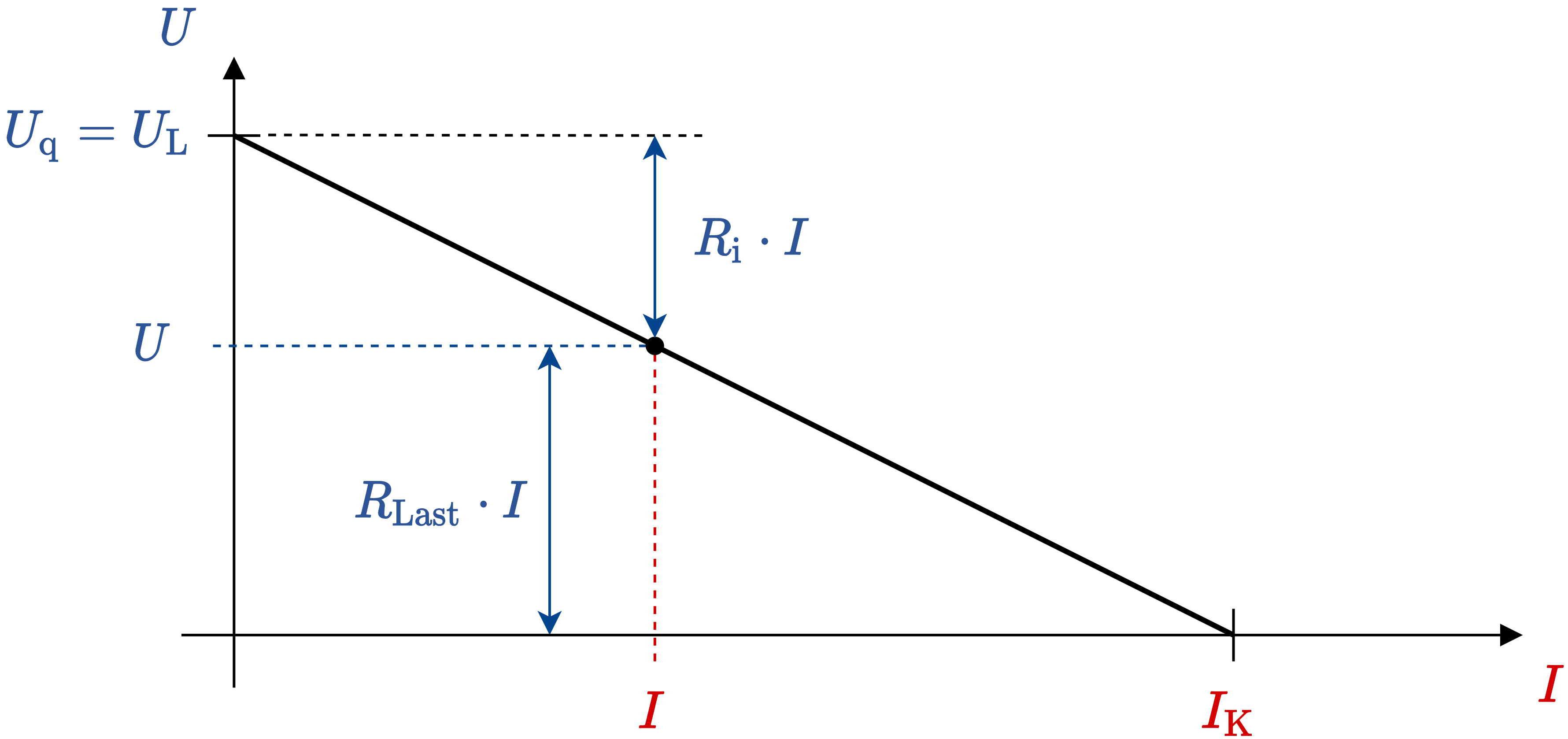
$$R_\mathrm{Last} = \frac{U}{I}$$



I-U-Kennlinie einer linearen Spannungsquelle

Abbildung der drei Betriebsfälle bei einer linearen Spannungsquelle

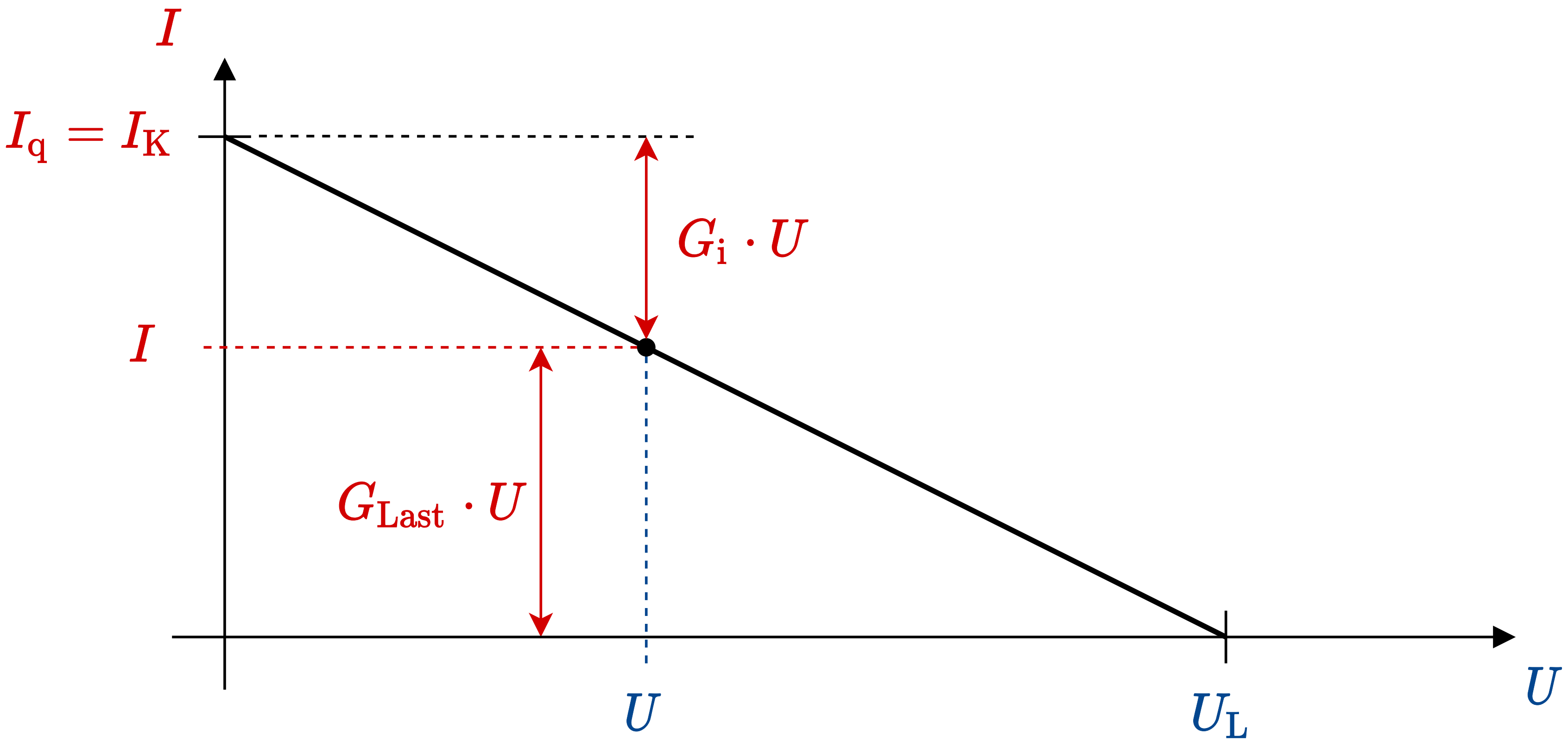
$$U(I) = U_\mathrm{q} - R_\mathrm{i} \cdot I$$



U-I-Kennlinie einer linearen Stromquelle

Abbildung der drei Betriebsfälle bei einer linearen Stromquelle

$$I(U) = I_\mathrm{q} - G_\mathrm{i} \cdot U = I_\mathrm{q} - \frac{U}{R_\mathrm{i}}$$



Thévenin- und Norten-Theorem

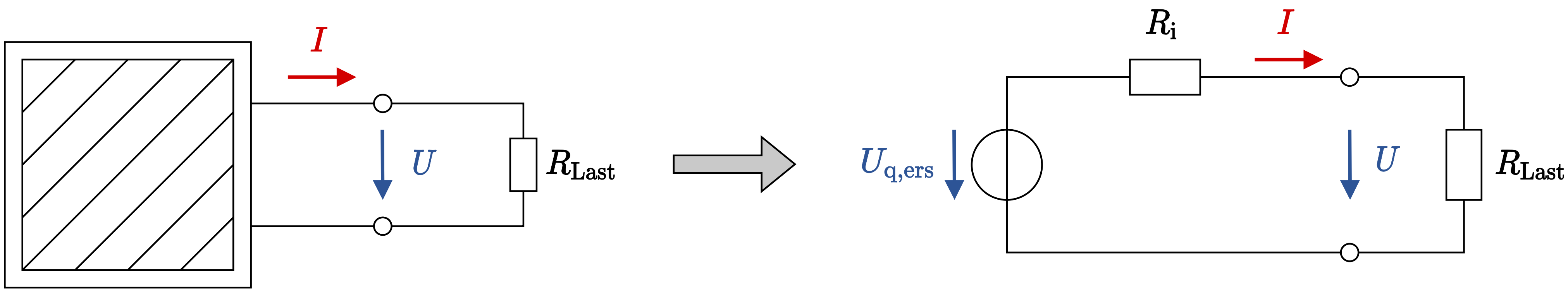
Ersatzspannungsquelle - Thévenin-Theorem

Jeder lineare Zweipol lässt sich in eine äquivalente *Ersatzspannungsquelle* umrechnen

Linearer Zweipol: Beliebiges Netzwerk mit zwei Anschlüssen bestehend aus

- Spannungs- und/oder Stromquellen
- Widerständen

Aufgabe: Berechnung der Parameter $U_{\mathrm{q,ers}}$ und R_{i} der Ersatzspannungsquelle

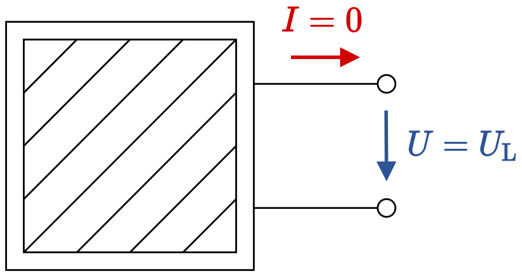


Ersatzspannungsquelle - Berechnung der Parameter

Ermittlung der Parameter $U_{\mathrm{q,ers}}$ und R_{i} durch Betrachtung des Leerlauf- und Kurzschluss-Falles

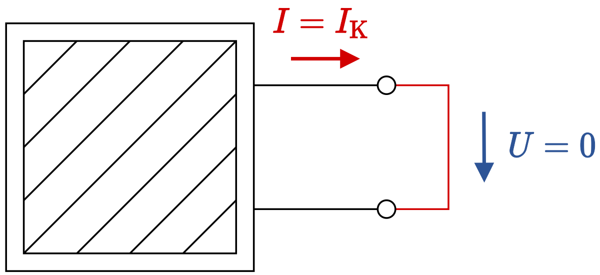
1. Leerlauf ($I = 0$):

$$U_{\mathrm{L}} = U_{\mathrm{q,ers}}$$



2. Kurzschluss ($U = 0$):

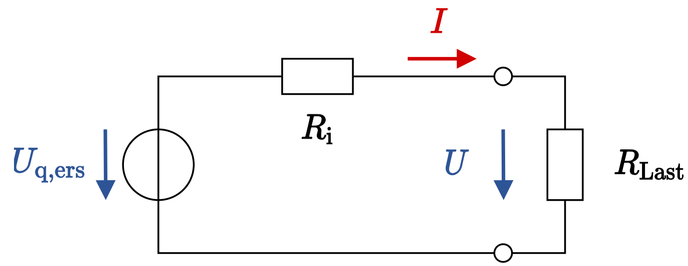
$$I_{\mathrm{K}} = \frac{U_{\mathrm{q,ers}}}{R_{\mathrm{i}}} \qquad \Rightarrow \qquad R_{\mathrm{i}} = \frac{U_{\mathrm{q,ers}}}{I_{\mathrm{K}}}$$



Berechnung von Strom und Spannung bei einer allgemeinen Last R_{Last}

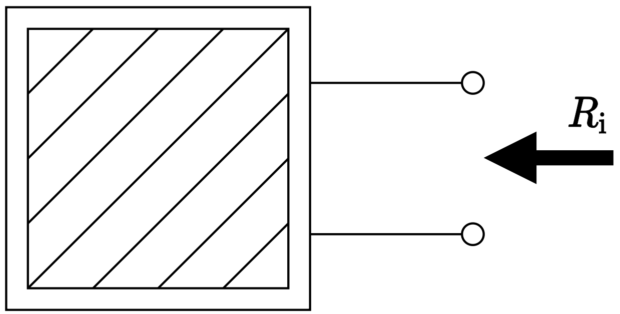
$$U = U_{\mathrm{q,ers}} \cdot \frac{R_{\mathrm{Last}}}{R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{Last}}}$$

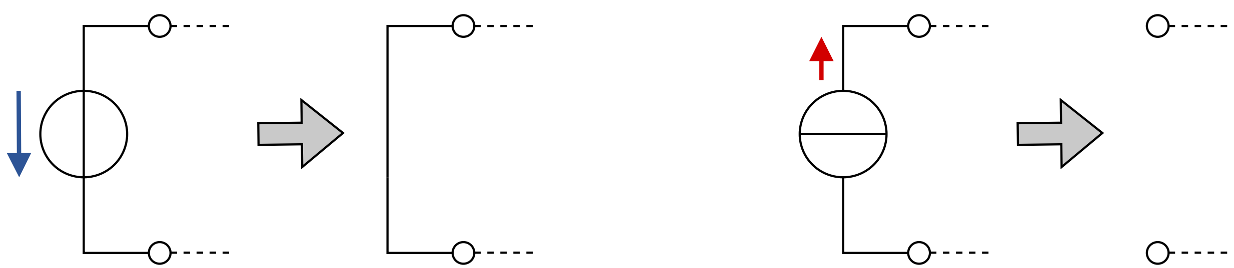
$$I = \frac{U}{R_{\mathrm{Last}}} = \frac{1}{R_{\mathrm{Last}}} \cdot U_{\mathrm{q,ers}} \cdot \frac{R_{\mathrm{Last}}}{R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{Last}}} = \frac{U_{\mathrm{q,ers}}}{R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{Last}}}$$



Direkte Bestimmung des Innenwiderstandes

- Ermittelung des Widerstandes zwischen den beiden Anschlüssen des Zweipols
- Vorgehen: Zusammenfassen der Komponenten (Serien- und Parallelschaltung von Widerständen)
  - Ersetzen von Spannunsquellen durch Kurzschlüsse (da individueller Innenwiderstand $= 0$)
  - Ersetzen von Stromquellen durch Leerläufe (da individueller Innenwiderstand $\rightarrow \infty$)



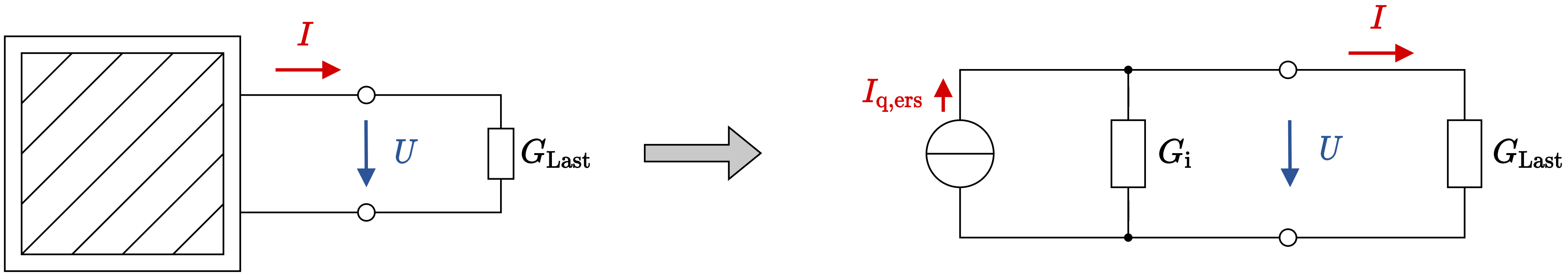


Ersatzstromquelle - Norten-Theorem

Jeder lineare Zweipol lässt sich ebenfalls in eine äquivalente *Ersatzstromquelle* umrechnen

In diesem Fall ist die Betrachtung von Leitwerten anstelle von Widerständen zunächst geschickter

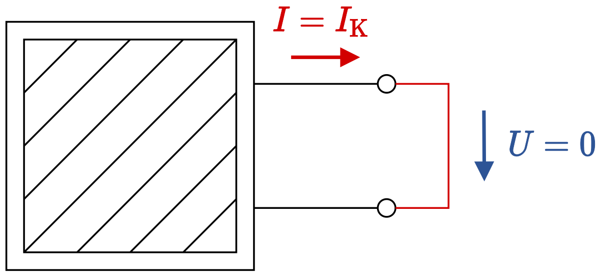
Aufgabe: Berechnung der Parameter $I_{\mathrm{q,ers}}$ und Innenleitwert G_{i} der Ersatzstromquelle



Ersatzstromquelle - Berechnung der Parameter

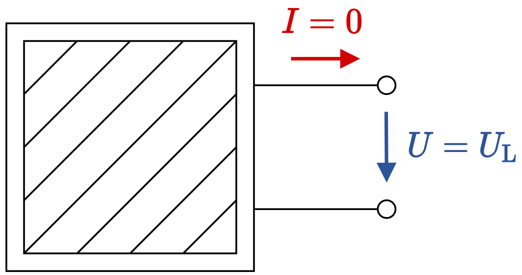
Ermittlung der Parameter $I_{\mathrm{q,ers}}$ und G_{i} durch Betrachtung des Kurzschluss- und Leerlauf-Falles

1. Kurzschluss ($U = 0$):



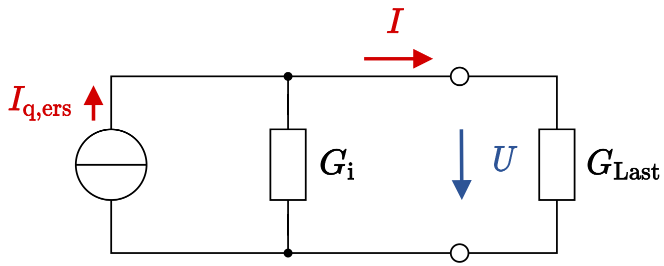
$$I_{\mathrm{K}} = I_{\mathrm{q,ers}}$$

2. Leerlauf ($I = 0$):



$$U_{\mathrm{L}} = \frac{I_{\mathrm{q,ers}}}{G_{\mathrm{i}}} \qquad \Rightarrow \qquad G_{\mathrm{i}} = \frac{I_{\mathrm{q,ers}}}{U_{\mathrm{L}}}$$

Berechnung von Strom und Spannung bei einer allgemeinen Last R_{Last}



$$I = I_{\mathrm{q,ers}} \cdot \frac{G_{\mathrm{Last}}}{G_{\mathrm{i}} + G_{\mathrm{Last}}}$$

$$U = \frac{I}{G_{\mathrm{Last}}} = \frac{1}{G_{\mathrm{Last}}} \cdot I_{\mathrm{q,ers}} \cdot \frac{G_{\mathrm{Last}}}{G_{\mathrm{i}} + G_{\mathrm{Last}}} = \frac{I_{\mathrm{q,ers}}}{G_{\mathrm{i}} + G_{\mathrm{Last}}}$$

Direkte Bestimmung des Leitwertes analog zum Thévenin-Theorem

Ersatzstromquelle - Umrechnung der Leitwerte in Widerstände

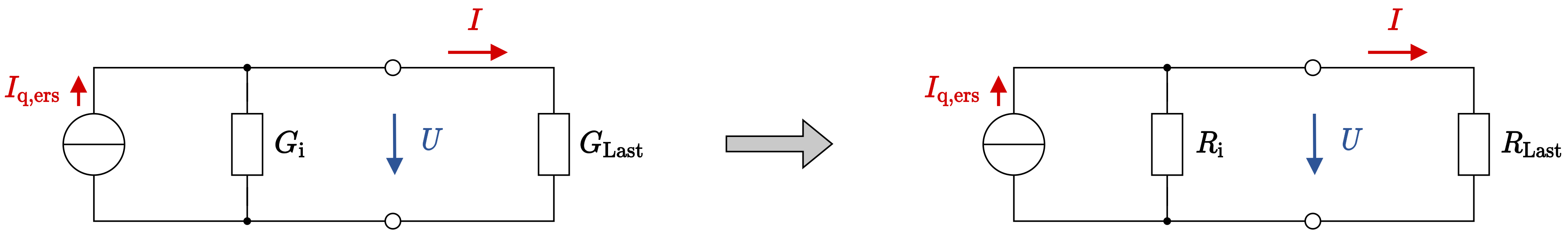
Innen- und Lastleitwert lassen sich in Widerstände umrechnen

$$R_\mathrm{i} = \frac{1}{G_\mathrm{i}} \qquad R_\mathrm{Last} = \frac{1}{G_\mathrm{Last}}$$

Damit ergibt sich für Strom und Spannung

$$I = I_\mathrm{q,ers} \cdot \frac{G_\mathrm{Last}}{G_\mathrm{i} + G_\mathrm{Last}} = I_\mathrm{q,ers} \cdot \frac{1/R_\mathrm{Last}}{1/R_\mathrm{i} + 1/R_\mathrm{Last}} = I_\mathrm{q,ers} \cdot \frac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{Last}}$$

$$U = \frac{I_\mathrm{q,ers}}{G_\mathrm{i} + G_\mathrm{Last}} = \frac{I_\mathrm{q,ers}}{1/R_\mathrm{i} + 1/R_\mathrm{Last}} = I_\mathrm{q,ers} \cdot \frac{R_\mathrm{i} \cdot R_\mathrm{Last}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{Last}}$$



Äquivalenz von Ersatzstrom- und Ersatzspannungsquelle

Frage: Ist das Verhalten von Ersatzstrom- und Ersatzspannungsquelle bei gleichem Innenwiderstand R_i identisch?

Spannung:

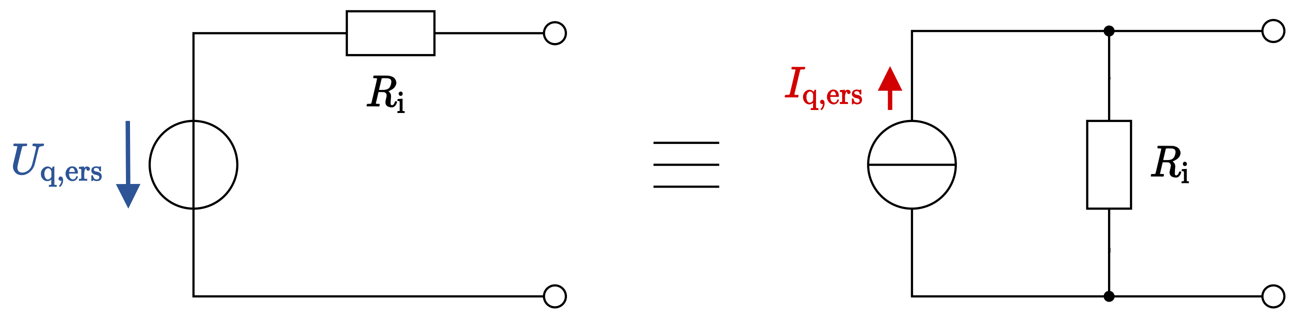
$$U = U_\mathrm{q,ers} \cdot \frac{R_\mathrm{Last}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{Last}} \stackrel{!}{=} I_\mathrm{q,ers} \cdot \frac{R_\mathrm{i} \cdot R_\mathrm{Last}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{Last}} \qquad \Rightarrow \qquad U_\mathrm{q,ers} = I_\mathrm{q,ers} \cdot R_\mathrm{i}$$

Strom:

$$I = \frac{U_\mathrm{q,ers}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{Last}} \stackrel{!}{=} I_\mathrm{q,ers} \cdot \frac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{Last}} \qquad \Rightarrow \qquad U_\mathrm{q,ers} = I_\mathrm{q,ers} \cdot R_\mathrm{i}$$

Folglich haben eine Ersatzstromquelle und eine Ersatzspannungsquelle identisches Verhalten falls

- Innenwiderstand R_i jeweils gleich
- $I_\mathrm{q,ers} = \frac{U_\mathrm{q,ers}}{R_\mathrm{i}}$
- $U_\mathrm{q,ers} = R_\mathrm{i} \cdot I_\mathrm{q,ers}$



Vorgehen zur Bestimmung der Parameter von Ersatzspannungs-/Ersatzstromquellen

1. Durchführen von zwei der folgenden drei Punkte
   - Bestimmung der Leerlaufspannung $U_{\mathrm{q,ers}}$
   - Bestimmung des Kurzschlussstromes $I_{\mathrm{q,ers}}$
   - Bestimmung des Widerstandes R_{i} zwischen den Klemmen des Zweipols, dazu
     - Ersetzen von Spannungsquellen durch Kurzschluss
     - Ersetzen von Stromquellen durch Leerlauf
2. Berechnung des verbleibenden Wertes mittels

$$U_{\mathrm{q,ers}} = R_{\mathrm{i}} \cdot I_{\mathrm{q,ers}}$$

3. Ersatzspannungsquelle ist Reihenschaltung aus Spannungsquelle $U_{\mathrm{q,ers}}$ und Innenwiderstand R_{i}
4. Ersatzstromquelle ist Parallelschaltung von Stromquelle $I_{\mathrm{q,ers}}$ und Innenwiderstand R_{i}

Reihenschaltung von Ersatzspannungsquellen

Zusammenfassung der Reihenschaltung mehrerer linearer Spannungsquellen zu einer linearen Spannungsquelle

$$U_{\mathrm{q,ges}} = \sum_k U_{\mathrm{q},k}$$

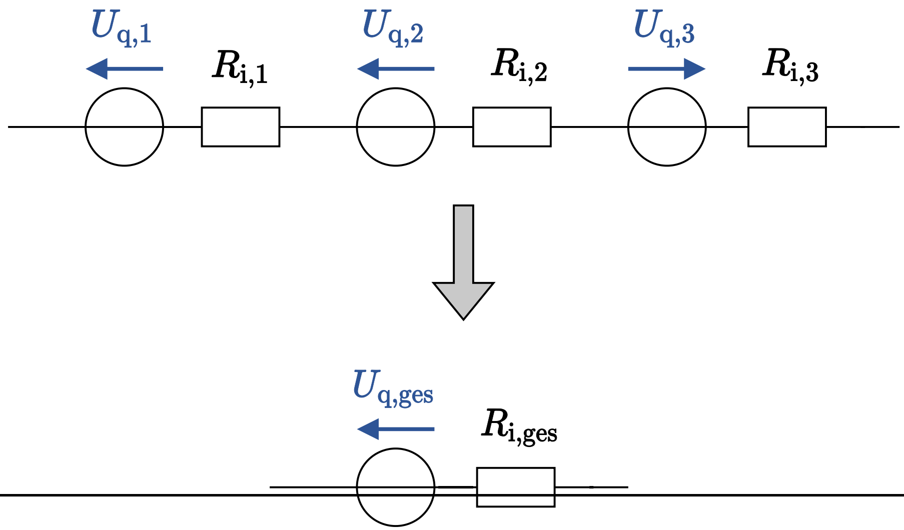
$$R_{\mathrm{i,ges}} = \sum_k R_{\mathrm{i},k}$$

Wichtig: Berücksichtigung der Zählpfeile bei der Summe der Spannungsquellen

Im Beispiel:

$$U_{\mathrm{q,ges}} = U_{\mathrm{q,1}} + U_{\mathrm{q,2}} - U_{\mathrm{q,3}}$$

$$R_{\mathrm{i,ges}} = R_{\mathrm{i,1}} + R_{\mathrm{i,2}} + R_{\mathrm{i,3}}$$



Parallelschaltung von Ersatzstromquellen

Zusammenfassung der Parallelschaltung mehrerer linearer Stromquellen zu einer linearen Stromquelle

$$I_{\mathrm{q,ges}} = \sum_k I_{\mathrm{q},k}$$

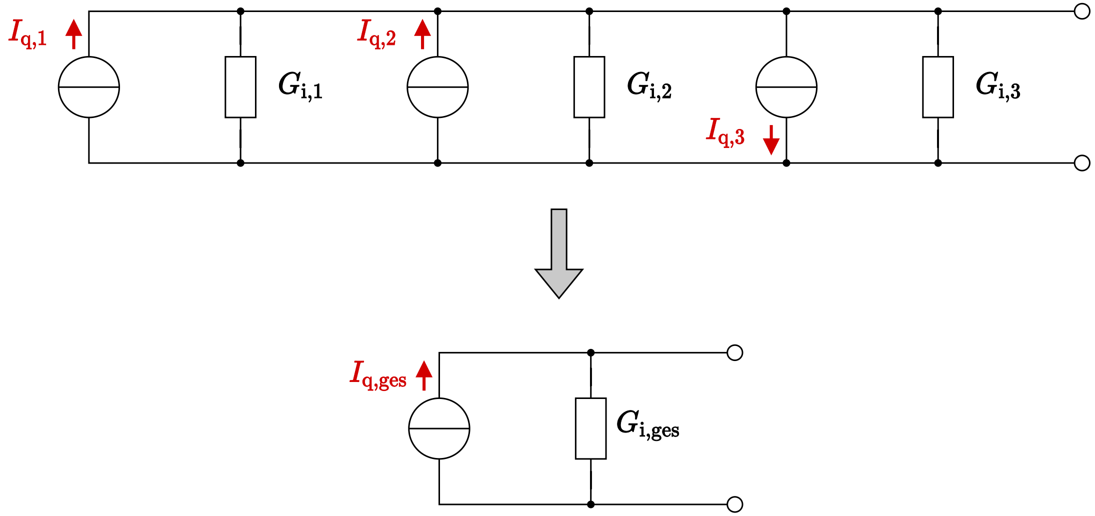
$$G_{\mathrm{i,ges}} = \sum_k G_{\mathrm{i},k} \qquad \text{bzw.} \qquad R_{\mathrm{i,ges}} = \frac{1}{\sum_k 1/R_{\mathrm{i},k}}$$

Wichtig: Berücksichtigung der Zählpfeile bei der Summe der Spannungsquellen

Im Beispiel:

$$I_{\mathrm{q,ges}} = I_{\mathrm{q,1}} + I_{\mathrm{q,2}} - I_{\mathrm{q,1}}$$

$$G_{\mathrm{i,ges}} = G_{\mathrm{i,1}} + G_{\mathrm{i,2}} + G_{\mathrm{i,3}}$$

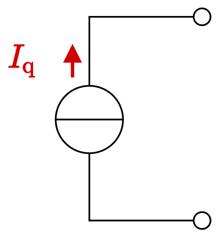


Dualität

Dualität - Duale Netzwerkelemente I

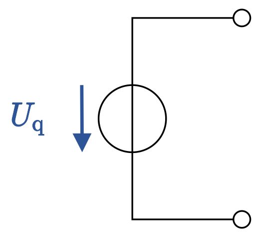
Stromquelle

$$R_\mathrm{i} \to \infty$$



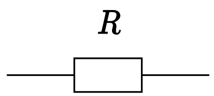
Spannungsquelle

$$R_\mathrm{i} = 0$$



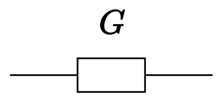
Widerstand

$$R = \frac{1}{G}$$



Leitwert

$$G = \frac{1}{R}$$

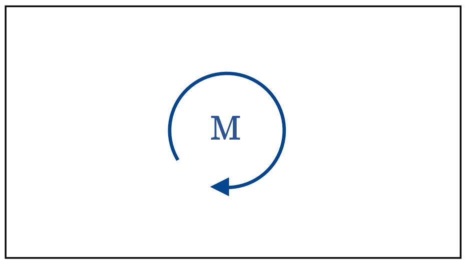


Dualität - Duale Netzwerkelemente II

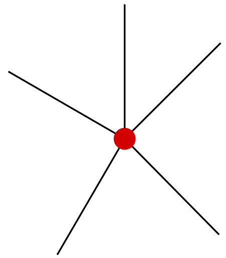
Leerlauf

Kurzschluss

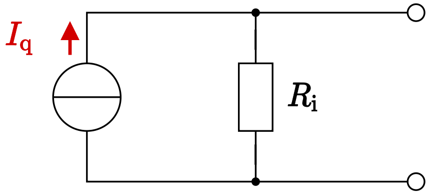
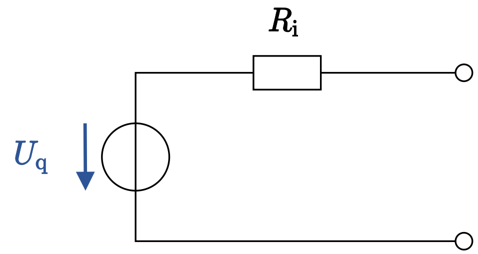
Masche



Knoten



Dualität - Duale Netzwerkelemente III

lineare Stromquelle	lineare Spannungsquelle
$I_\mathrm{q} = \dfrac{U_\mathrm{q}}{R_\mathrm{i}}$	$U_\mathrm{q} = R_\mathrm{i} \cdot I_\mathrm{q}$
	

Dualität - Duale Berechnungen I

Maschensatz

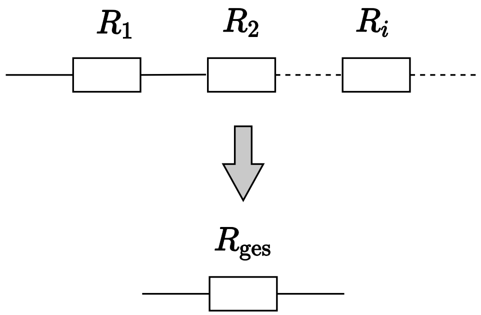
$$\sum_{i \in \text{Masche}} U_i = 0$$

Knotensatz

$$\sum_{i \in \text{Knoten}} I_i = 0$$

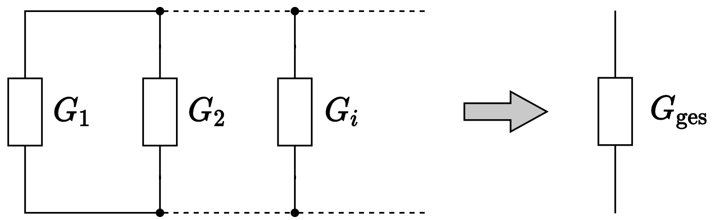
Reihenschaltung

$$R_{\text{ges}} = \sum_i R_i$$



Parallelschaltung

$$G_{\text{ges}} = \sum_i G_i$$

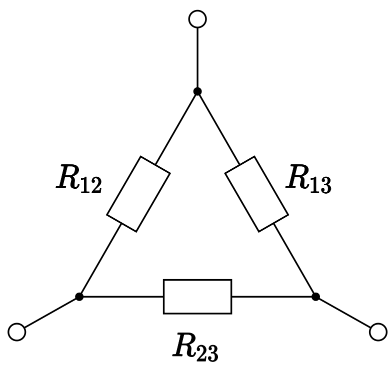


Dualität - Duale Berechnungen II

Dreieck

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}$$

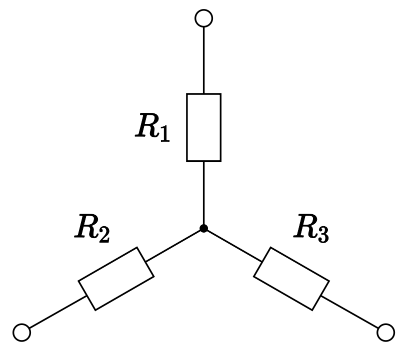
$$\dots$$



Stern

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

$$\dots$$



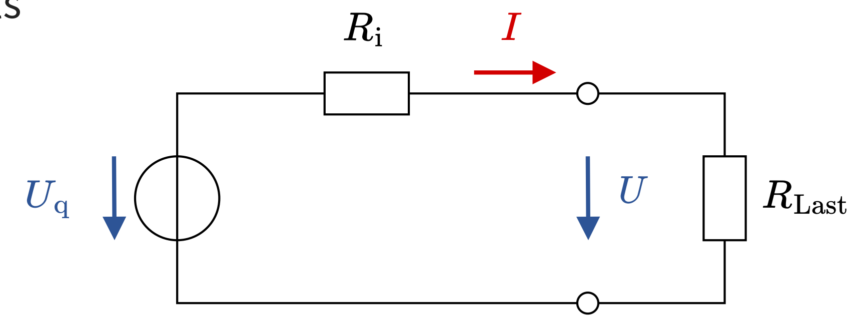
Kennlinien

Quelle mit linearer Last

Gegeben ist ein Ersatzspannungsquelle eines beliebigen Zweipols

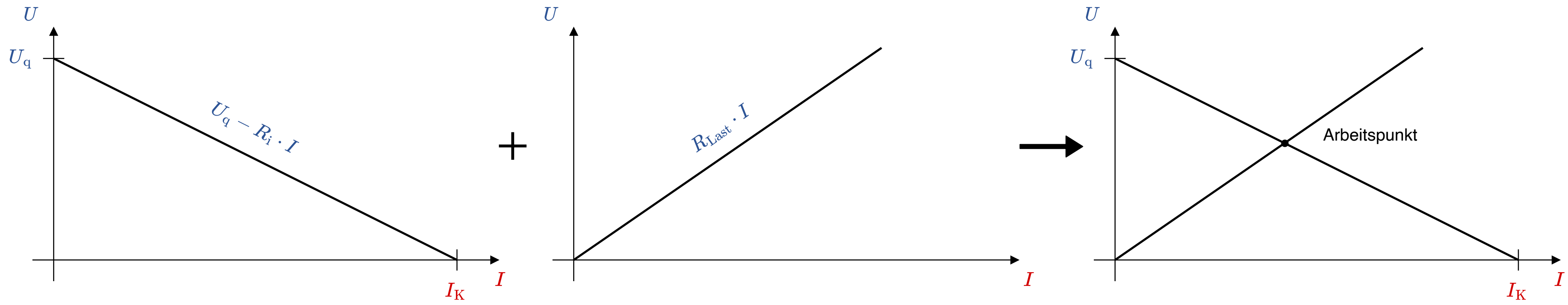
Belastung der Quelle mit einem Ohm'schen Widerstand R_{Last}

Arbeitspunkt der Schaltung ist Schnittpunkt der Kennlinien



1. Spannungsquelle U_{q} mit Innenwiderstand R_{i}
2. Widerstand R_{Last}

Arbeitspunkt: $R_{\mathrm{Last}} \cdot I = U_{\mathrm{q}} - R_{\mathrm{i}} \cdot I$



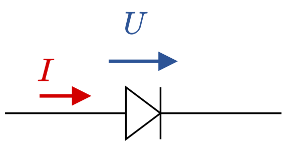
Bauteil mit nicht-linearer Kennlinie: Diode

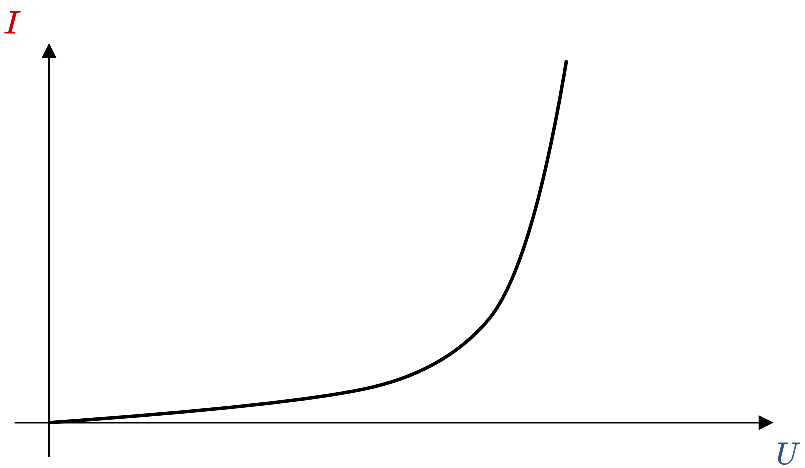
Durch Einsatz von *Halbleitermaterialien* lassen sich Bauteile mit nicht-linearen Kennlinien erzeugen

Einfachstes Halbleiter-Bauteil ist *Diode* mit Eigenschaften

- Gute Leitfähigkeit falls Diodenspannung U größer als eine Schwelle (steiler Ast der Kennlinie)
- Schlechte (bzw. keine) Leitfähigkeit für niedrige Diodenspannungen U (flacher Ast der Kennlinie)

Diode verhält sich wie eine Art Ventil für Ströme mit nur einer Durchlassrichtung

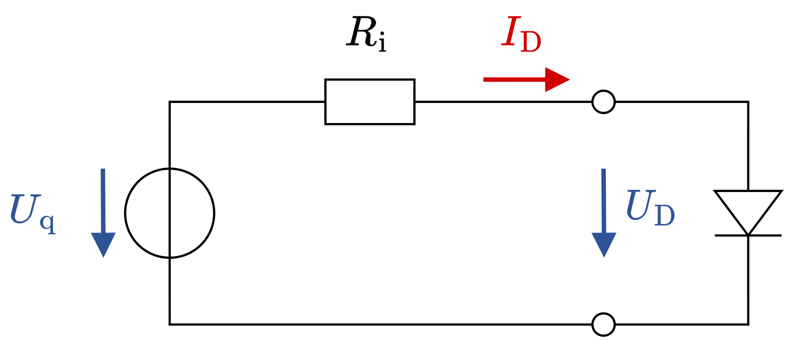


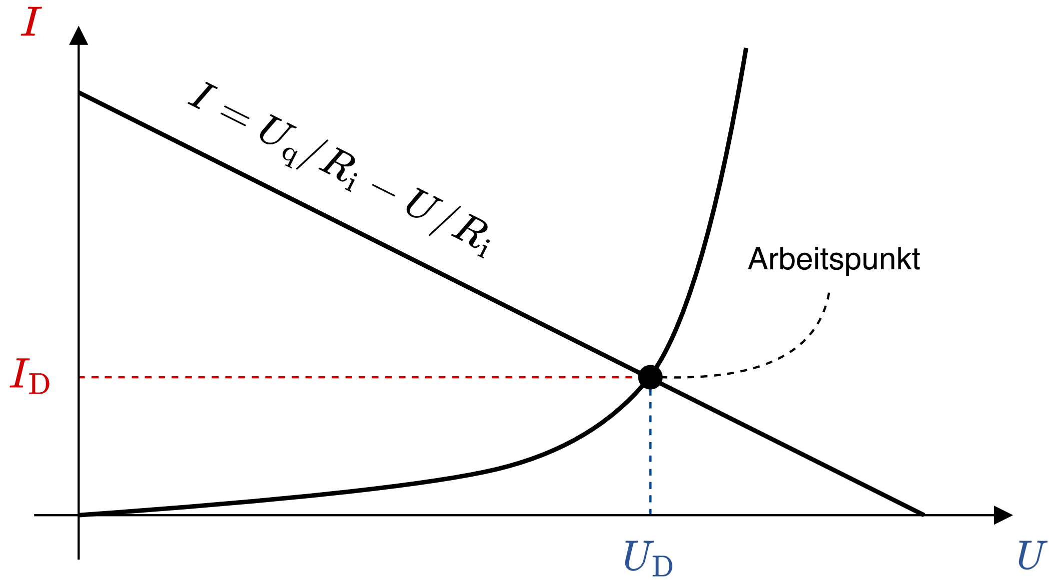


Ermittlung des Arbeitspunktes für den Betrieb einer Diode

Arbeitspunkt (Kombination der Werte U_D und I_D) ergibt sich aus Schnittpunkt der Kennlinien von

- Thevenin-Quelle
- Diode

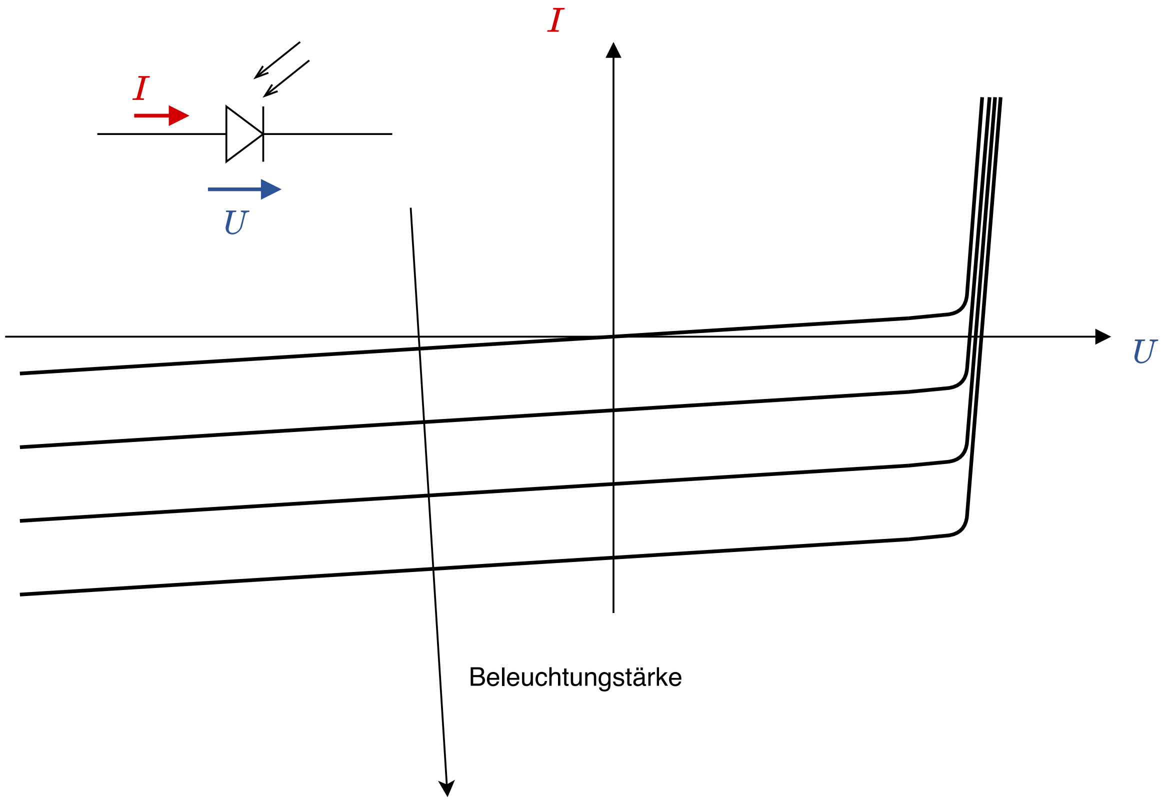




Kennlinienfeld einer Photodiode

Anwendungsbeispiel *Photodiode*: Messung der Lichtstärke (auch im IR-Bereich)

Kennlinie der Photodiode abhängig von Beleuchtungsstärke

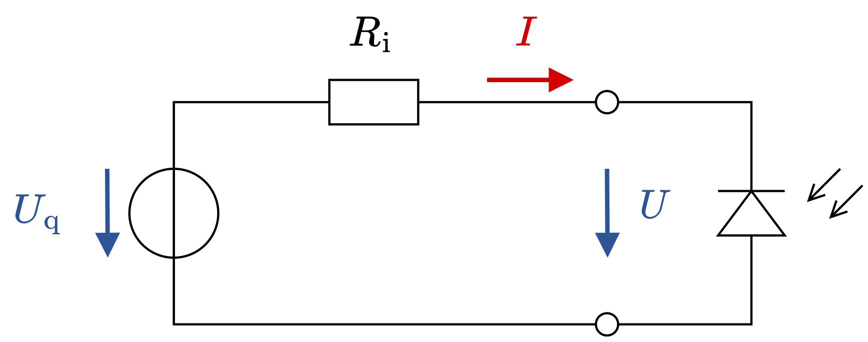


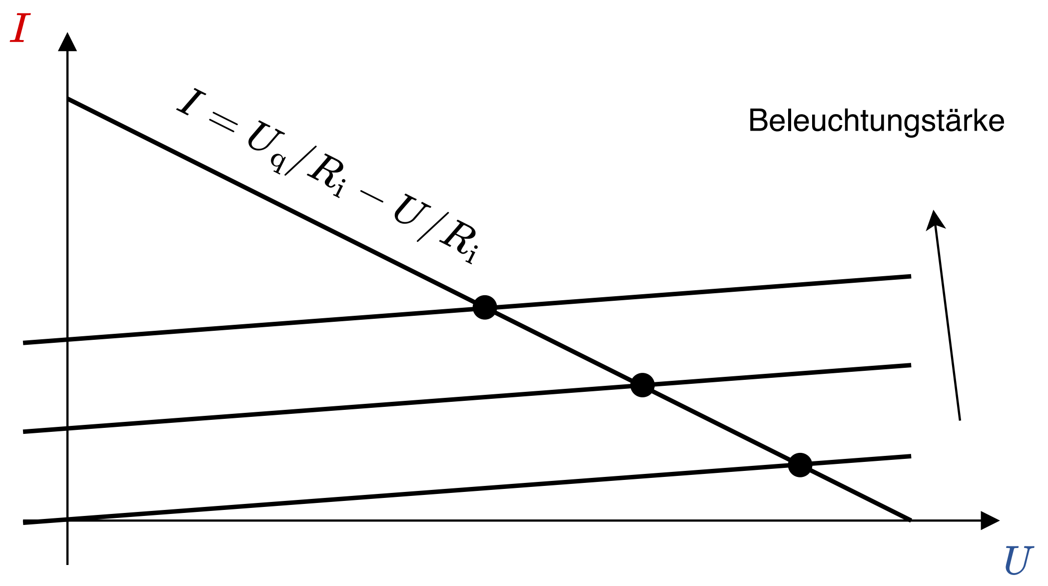
Anwendung einer Photodiode

Verwendung der Diode im sogenannten *Sperrbetrieb*

Abhängig von der Beleuchtungsstärke stellt sich ein Arbeitspunkt ein

Messung der Spannung U gibt Auskunft über Beleuchtungsstärke





Leistungsanpassung

Leistungsanpassung

Gegeben ist eine lineare Spannungsquelle (evtl. Ersatzspannungsquelle)

Fragestellung: Wie ist ein Verbraucher R_V zu wählen, um maximale Leistung der Quelle zu entnehmen?

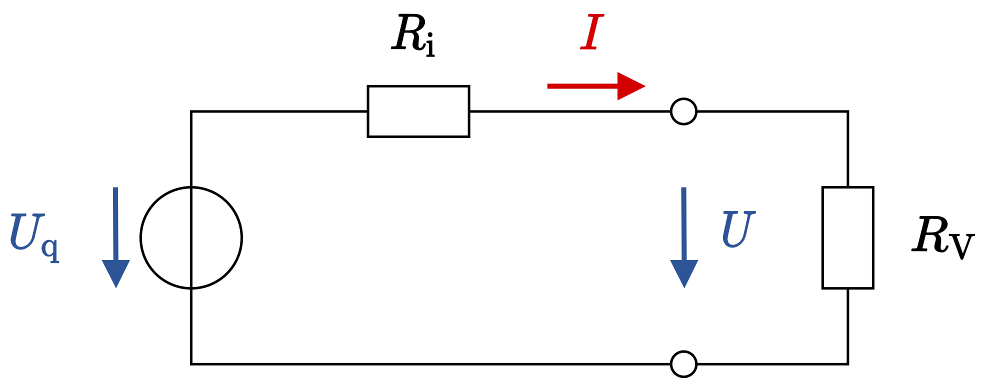
$$P_\mathrm{V} = U \cdot I \to \max$$

Berechnung der Leistung am Verbraucher

$$P_\mathrm{V} = U \cdot I = U_\mathrm{q} \cdot \frac{R_\mathrm{V}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{V}} \cdot \frac{U_\mathrm{q}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{V}} = U_\mathrm{q}^2 \cdot \frac{R_\mathrm{V}}{\left(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{V}\right)^2}$$

Optimierungsbedingung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, R_\mathrm{V}} P_\mathrm{V} \overset{!}{=} 0$$



Lösung des Optimierungsproblems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,R_\mathrm{V}}\,P_\mathrm{V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,R_\mathrm{V}}\left(U_\mathrm{q}^2 \cdot \frac{R_\mathrm{V}}{\left(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{V}\right)^2}\right) =$$

$$= U_\mathrm{q}^2 \cdot \frac{\left(R_\mathrm{V}+R_\mathrm{i}\right)^2 \cdot 1 - R_\mathrm{V} \cdot 2 \cdot \left(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{V}\right)}{\left(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{V}\right)^4} = U_\mathrm{q}^2 \cdot \frac{R_\mathrm{V}^2 + 2R_\mathrm{V}R_\mathrm{i} + R_\mathrm{i}^2 - 2R_\mathrm{V}R_\mathrm{i} - 2R_\mathrm{V}^2}{\left(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{V}\right)^4} =$$

$$= U_\mathrm{q}^2 \cdot \frac{R_\mathrm{i}^2 - R_\mathrm{V}^2}{\left(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{V}\right)^4} = U_\mathrm{q}^2 \cdot \frac{\left(R_\mathrm{i}-R_\mathrm{V}\right)\cdot\left(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{V}\right)}{\left(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{V}\right)^4} = U_\mathrm{q}^2 \cdot \frac{R_\mathrm{i}-R_\mathrm{V}}{\left(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{V}\right)^3} \overset{!}{=} 0$$

Damit nimmt der Verbraucher die maximale Leistung auf für

$$\boxed{R_\mathrm{V} = R_\mathrm{i}}$$

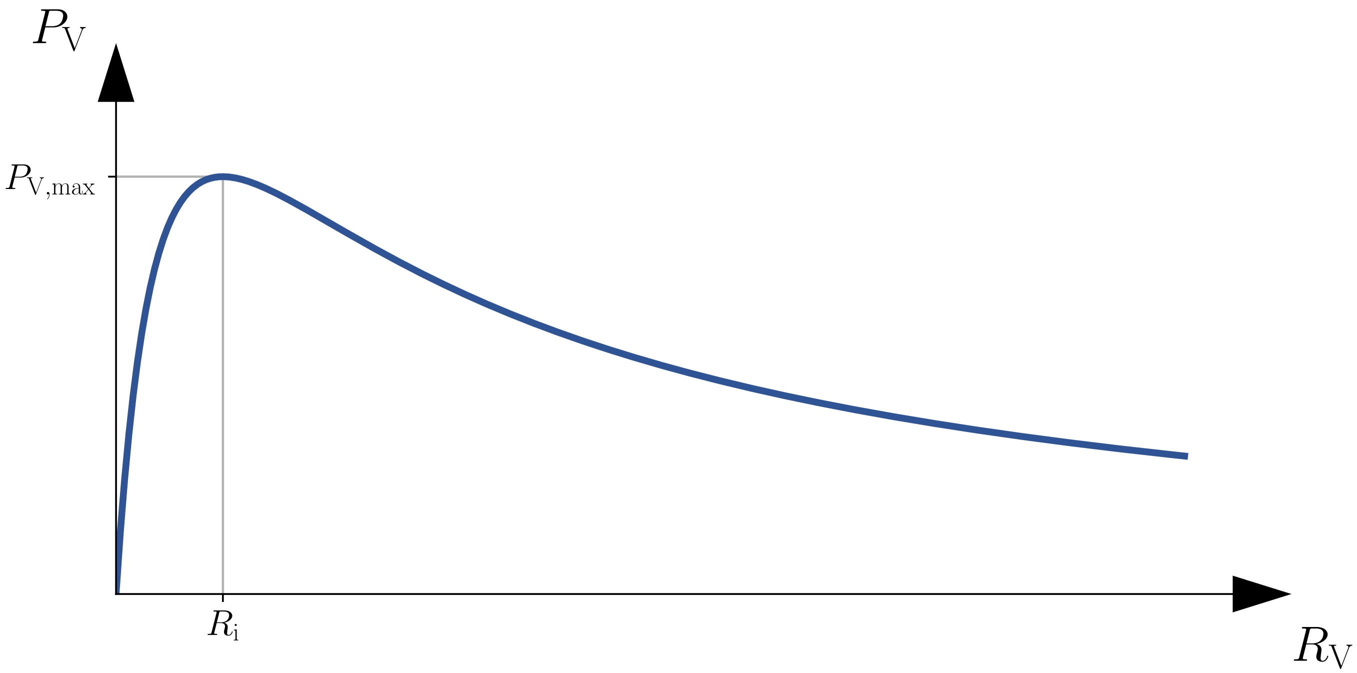
In diesem Fall ist die aufgenommene Leistung

$$P_\mathrm{V,max} = U_\mathrm{q}^2 \cdot \frac{R_\mathrm{i}}{\left(R_\mathrm{i}+R_\mathrm{V}\right)^2} = \frac{U_\mathrm{q}^2}{4R_\mathrm{i}}$$

Leistung in Abhängigkeit des Lastwiderstandes

Keine Leistung am Verbraucher für

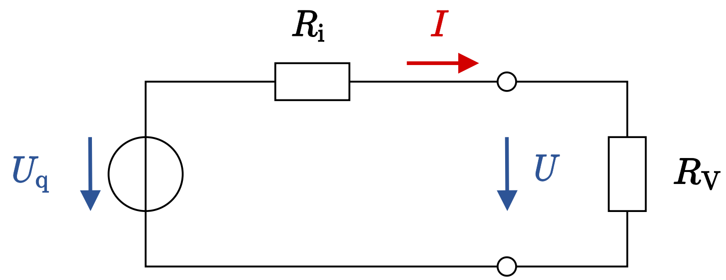
- $R_{\mathrm{V}} = 0$ (Kurzschluss)
- $R_{\mathrm{V}} \to \infty$ (Leerlauf)



Wirkungsgrad

Berechnung des Wirkungsgrades

$$\eta = \frac{P_\mathrm{V}}{P_\mathrm{aufgewendet}} = \frac{U \cdot I}{U_\mathrm{q} \cdot I} = \frac{U_\mathrm{q} \cdot \frac{R_\mathrm{V}}{R_\mathrm{i}+R_\mathrm{V}}}{U_\mathrm{q}} = \frac{R_\mathrm{V}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{V}}$$



Bei optimaler Leistungsanpassung gilt für den Wirkungsgrad

$$\eta\Big|_{R_\mathrm{V}=R_\mathrm{i}} = \frac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{i}} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Niedriger Wirkungsgrad spielt bei vielen Anwendungen untergeordnete Rolle

Wichtige Anwendung der Leistungsanpassung bei der Übertragung von Information

Anwendung der Leistungsanpassung bei Stromquellen

Die gleichen Überlegungen zur Leistungsanpassung lassen sich auch bei linearen Stromquellen anwenden

Aus der Dualität von linearer Stromquelle und linearer Spannungsquelle folgt auch hier

$$R_{\mathrm{V}} = R_{\mathrm{i}}$$

Weiterhin gilt wegen der Dualität

$$I_{\mathrm{q}} = \frac{U_{\mathrm{q}}}{R_{\mathrm{i}}}$$

Somit folgt für die maximale Leistung am Verbraucher

$$P_{\mathrm{V,max}} = \frac{I_{\mathrm{q}}^2}{4} \cdot R_{\mathrm{i}}$$

Referenzen

[1] G. Hagmann, *Grundlagen der Elektrotechnik,* Aula Verlag.

[2] A.R. Hambley, *Electrical Engineering - Principles and Applications,* Pearson Prentice Hall.

[3] R. Kories, H. Schmidt-Walter, *Taschenbuch der Elektrotechnik,* Verlag Harri Deutsch.

