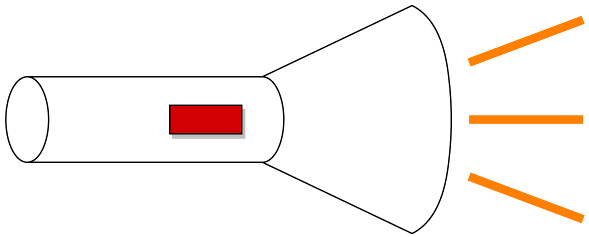
Elektrische Widerstandsnetzwerke

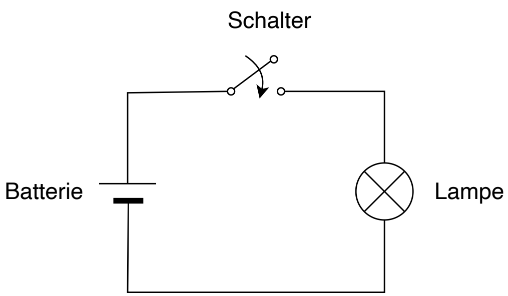
Der elektrische Stromkreis

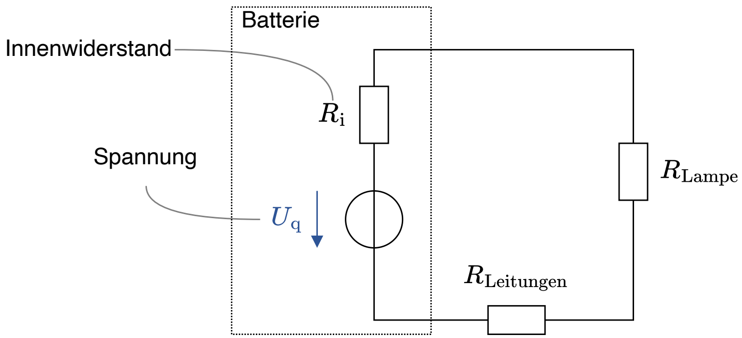
Elektrischer Stromkreis

Verschiedene Beschreibungsmöglichkeiten eines technischen Gerätes oder Systems

Beispiel: Beschreibung einer Taschenlampe mit *Konstruktionsplan*, *Übersichtsschaltplan* oder *Ersatzschaltung*

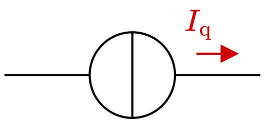




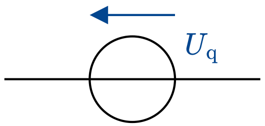


Die Beschreibung eines Gerätes oder Systems hängt von der jeweiligen Aufgabenstellung und technischen Domäne (Konstruktion, Design, Fertigung, Entwicklung, etc.) ab.

Symbole in elektrischen Schaltungen

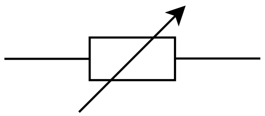


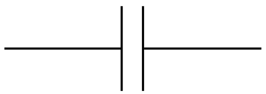
ideale Stromquelle I_q



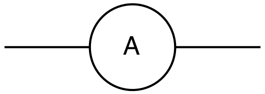
ideale Spannungsquelle U_q


Widerstand (allgemein)

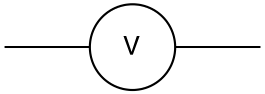

einstellbarer Widerstand


Kondensator

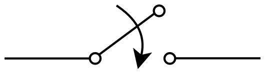

Induktivität

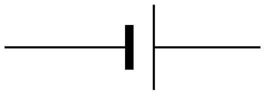


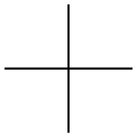
Amperemeter (Messgerät)

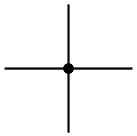


Voltmeter (Messgerät)


Schalter


Batterie


gekreuzte Leitungen ohne Verbindung


gekreuzte Leitungen mit Verbindung

Spannungs- und Stromquelle

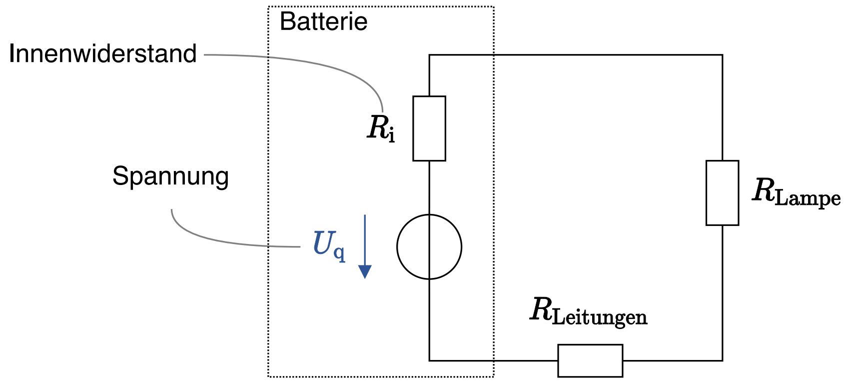
Beispiel Taschenlampe: Erzeugung der elektrischen Energie mittels Batterie

Batterie entspricht einer realen Energiequelle

In elektrischen Ersatzschaltungen werden häufig ideale Energiequellen verwendet

- Spannungsquelle: Erzeugt gegebene Spannung zwischen zwei Netzwerkknoten
- Stromquelle: Erzeugt gegebenen Strom in einem Netzwerkzweig

Beschreibung realer Energiequellen mit Hilfe von Strom- und Spannungsquellen und zusätzlichen Bauelementen



Ideale Spannungsquelle

Kennlinie im U-I-Diagramm: Gerade mit Steigung ∞

Innenwiderstand der Spannungsquelle

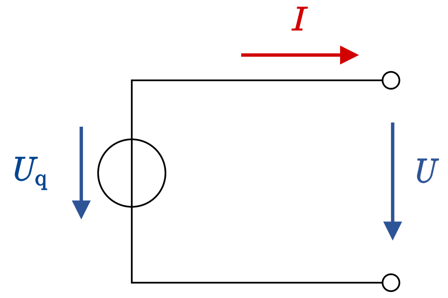
$$R_\mathrm{i} = \frac{U}{I} = 0$$

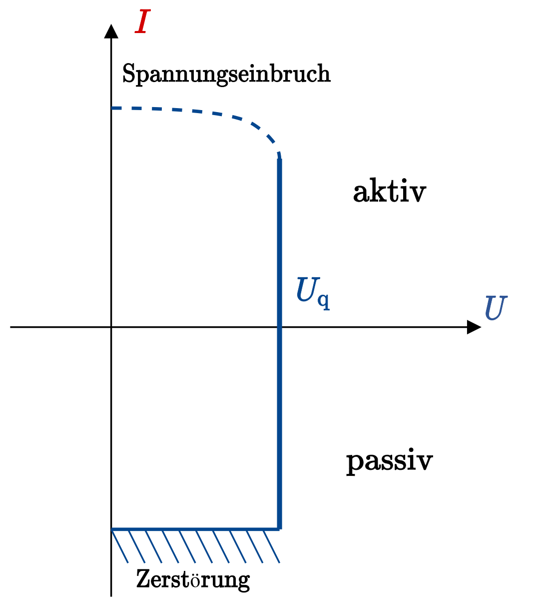
Spannungsquelle kann Leistung

- abgeben: *aktiver* Betrieb
- aufnehmen: *passiver* Betrieb

Tatsächlich ist die Leistungsabgabe und -aufnahme begrenzt:

- bei zu großem Stromfluss bricht Spannung ein
- bei zu hoher Leistungsaufnahme wird die Quelle zerstört





Ideale Stromquelle

Kennlinie im U-I-Diagramm: Gerade mit Steigung Null

Innenwiderstand der Stromquelle

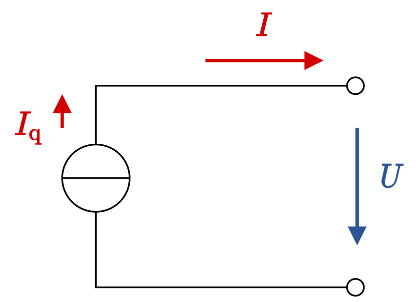
$$R_\mathrm{i} = \frac{U}{I} \rightarrow \infty$$

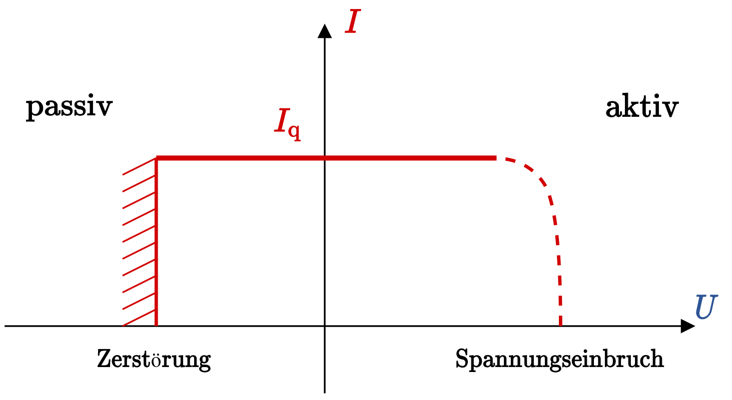
Stromquelle kann Leistung

- abgeben: *aktiver* Betrieb
- aufnehmen: *passiver* Betrieb

Tatsächlich ist die Leistungsabgabe und -aufnahme begrenzt:

- bei zu großer Spannung bricht Stromfluss ein
- bei zu hoher Leistungsaufnahme wird die Quelle zerstört





Zählpfeile

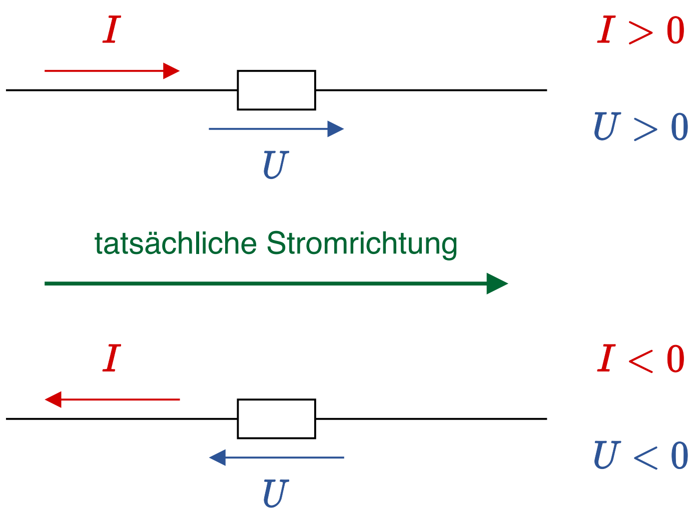
Strom und Spannung sind gerichtete Größen (*Vorsicht:* aber keine Vektoren)

Oft ist die tatsächliche Richtung unbekannt.

Einführung von Zählrichtungen der jeweiligen Größen über sogenannte *Zählpfeile*.

Die Richtung der Zählpfeile entspricht der tatsächlichen Richtung wenn die jeweilige Größe *positiv* ist.

Wenn die jeweilige Größe *negativ* ist ist die tatsächliche Richtung entgegen der Zählpfeilrichtung.



Erzeuger- und Verbraucher-Zählpfeilsystem

Allgemeiner Zweipol: Kombination mehrerer Elemente (Widerstand, Spannungsquelle, etc.)

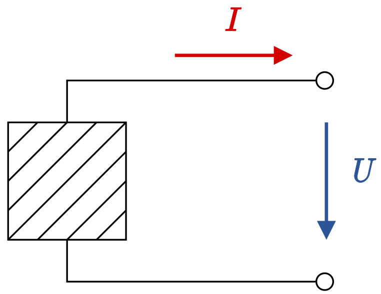
Betrachtung von Strom und Spannung an *zwei* äußeren Anschlüssen

Erzeuger-Zählpfeilsystem (EZS)

Zählpfeile für Strom und Spannung sind *entgegengesetzt* orientiert

$$P = U \cdot I > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Erzeuger}$$

$$P = U \cdot I < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Verbraucher}$$

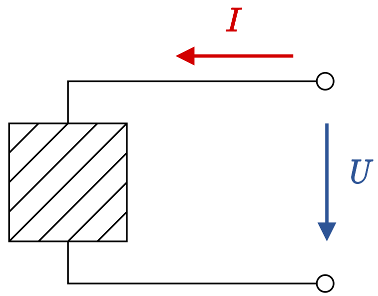


Verbraucher-Zählpfeilsystem (VZS)

Zählpfeile für Strom und Spannung sind *gleich* orientiert

$$P = U \cdot I > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Verbraucher}$$

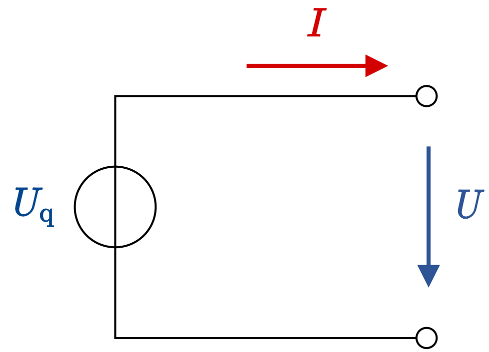
$$P = U \cdot I < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Erzeuger}$$



Beispiele zur Anwendung des Erzeuger-Zählpfeilsystems

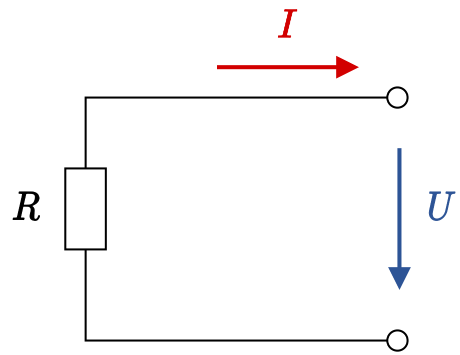
Spannungsquelle

- $P = U \cdot I$
- $P > 0$ bedeutet Spannungsquelle erzeugt Leistung (negativer Verbraucher)
- $P < 0$ bedeutet Spannungsquelle nimmt Leistung auf, d.h. verbraucht Leistung



Elektrischer Widerstand

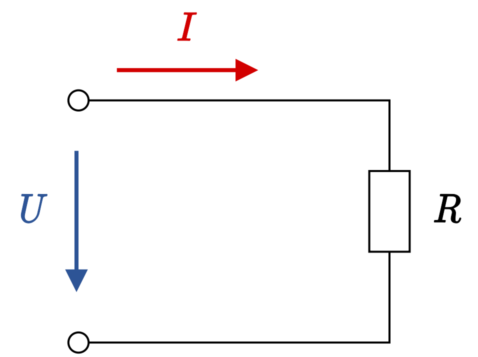
- $U = -R \cdot I$
- $P = U \cdot I$
- Da immer $R > 0$ folgt Leistung ist stets negativ: $P < 0$
- $P < 0$ bedeutet Widerstand verbraucht Leistung (Umwandlung in Wärme)



Beispiele zur Anwendung des Verbraucher-Zählpfeilsystems

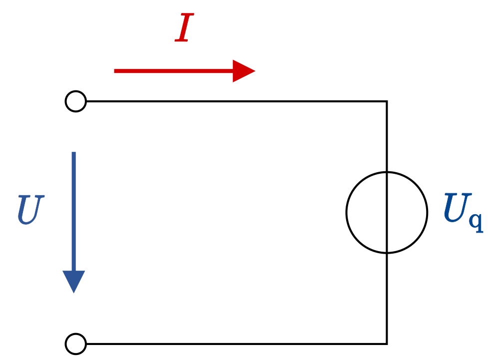
Elektrischer Widerstand

- $U = R \cdot I$
- $P = U \cdot I$
- Da immer $R > 0$ folgt Leistung ist stets positiv: $P > 0$
- $P > 0$ bedeutet Widerstand verbraucht Leistung (Umwandlung in Wärme)



Spannungsquelle

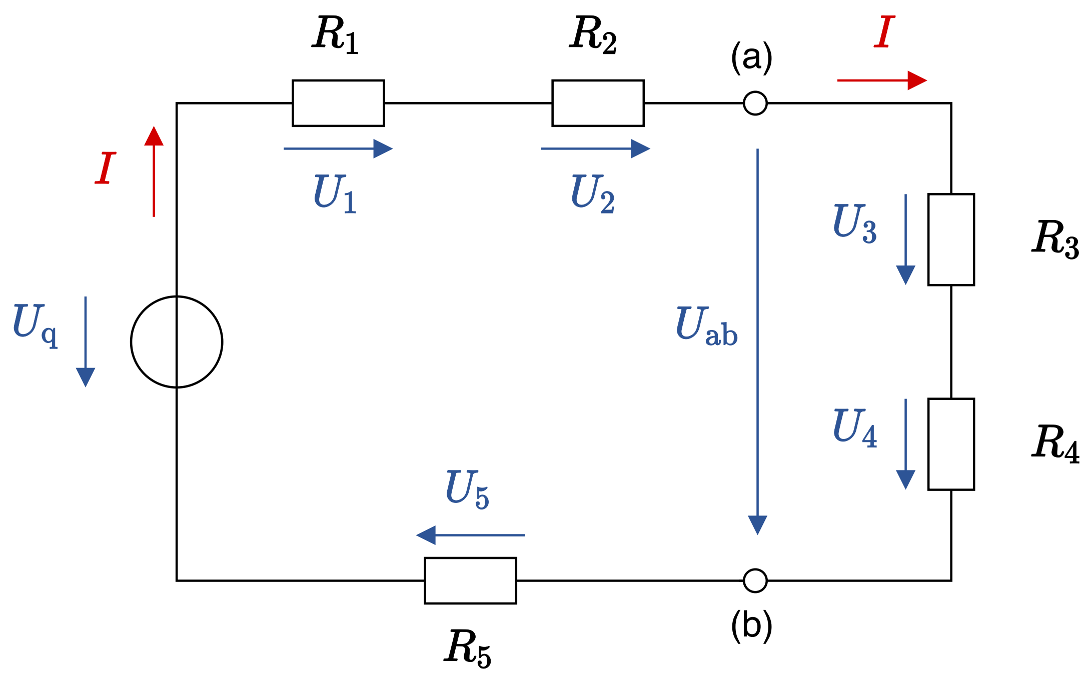
- $P = U \cdot I$
- $P < 0$ bedeutet Spannungsquelle erzeugt Leistung
- $P > 0$ bedeutet Spannungsquelle nimmt Leistung auf, d.h. verbraucht Leistung



Anwendung der verschiedenen Zählpfeilsysteme

Falls möglich werden die Zählpfeilsysteme folgendermaßen eingesetzt:

- bei aktiven Elementen (z.B. Strom- und Spannungsquellen): *Erzeugerzählpfeilsystem*
- bei passiven Elementen (z.B. elektrische Widerstände): *Verbraucherzählpfeilsystem*



Kirchhoff'sche Gesetze

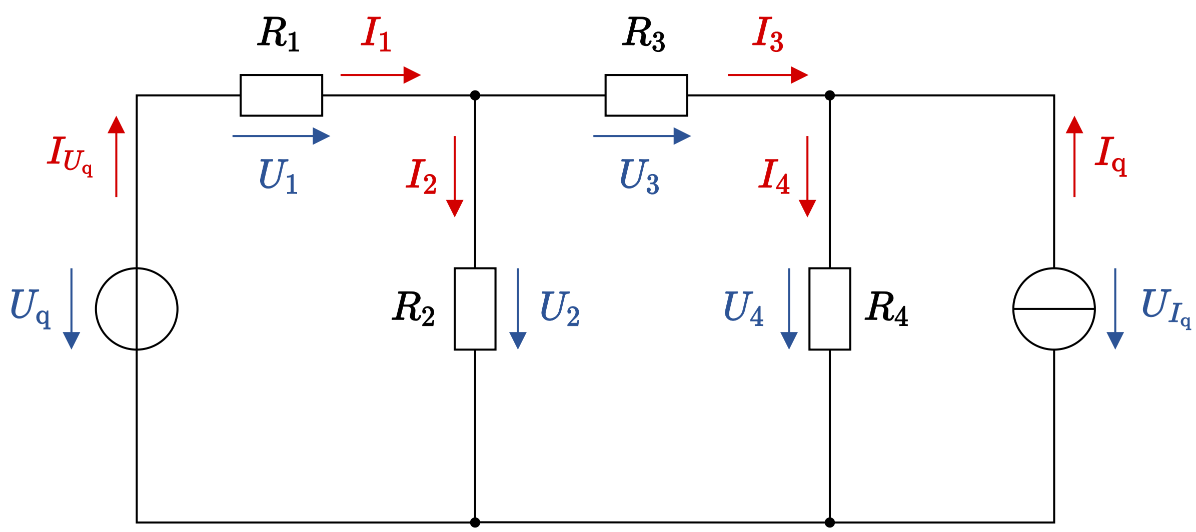
Berechnung von Widerstandsnetzwerken

Gegeben: Netzwerk aus Widerständen, Strom- und Spannungsquellen

Aufgabenstellung: Analyse des Netzwerkes, d.h. Berechnung fehlender Größen

Betrachtung von

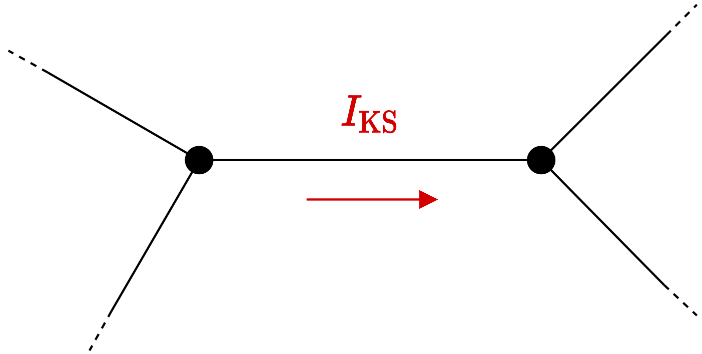
- Knoten: Punkte in denen sich zwei Elemente treffen
- Zweigen: Elemente zwischen zwei Konten



Kurzschluss und Leerlauf

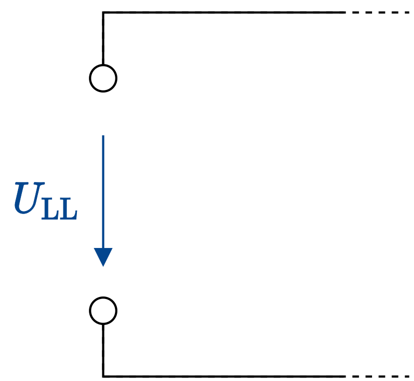
Direkte Verbindung zweier Knoten wird als *Kurzschluss* bezeichnet

- Widerstand des Kurzschlusses: $R_{\mathrm{KS}} = 0$
- Spannung über dem Kurzschluss: $U = 0$
- Kurzschlussstrom I_{KS} ergibt sich aus äußerer Beschaltung



Zwei nicht verbundene Knoten werden als *Leerlauf* bezeichnet

- Widerstand des Leerlaufes: $R_{\mathrm{LL}} \rightarrow \infty$ (d.h. elektrischer Leitwert $G_{\mathrm{LL}} = 0$)
- Strom durch den Leerlauf: $I = 0$
- Leerlaufspannung U_{LL} ergibt sich aus äußerer Beschaltung



Kirchhoff'scher Knotenpunktsatz

Kirchhoff'scher Knotenpunktsatz:

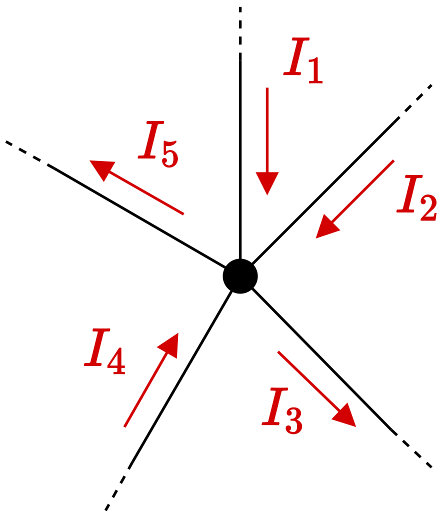
Die Summe der Ströme, die in einen Netzwerkknoten hineinfließt entspricht der Summe der Ströme, die aus diesem Knoten herausfließen.

$$\boxed{\sum I_{\text{hinein}} = \sum I_{\text{heraus}}}$$

Alternative Formulierung des Kirchhoff'schen Knotenpunktsatzes:

Die (Zählpfeil-richtige) Summe aller Ströme an einem Netzwerkknoten ist Null.

$$\boxed{\sum_{\forall i \in \text{Knoten}} I_i = 0}$$



Beispiel zur Anwendung des Knotenpunktsatzes

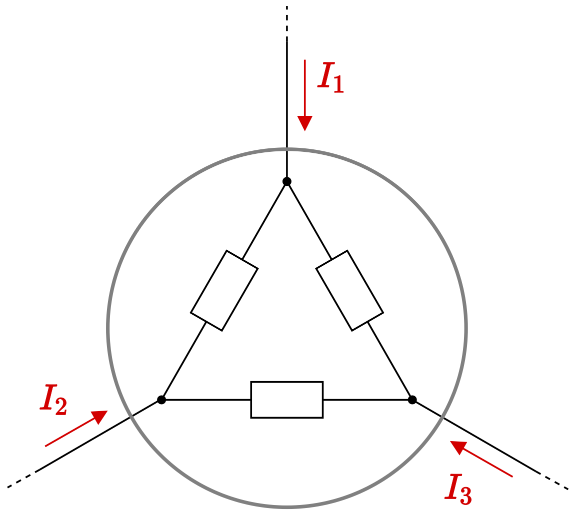
$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5$ bzw. $I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$

Definition von aggregierten Knoten

Die Anwendung des Knotenpunktsatzes muss nicht zwangsweise auf einzelne Netzwerkknoten erfolgen.

Definition eines *aggregierten Knotens* durch beliebige geschlossene Kurve

Für diesen Knoten lässt sich der Kirchhoff'sche Knotenpunktsatz ebenso anwenden

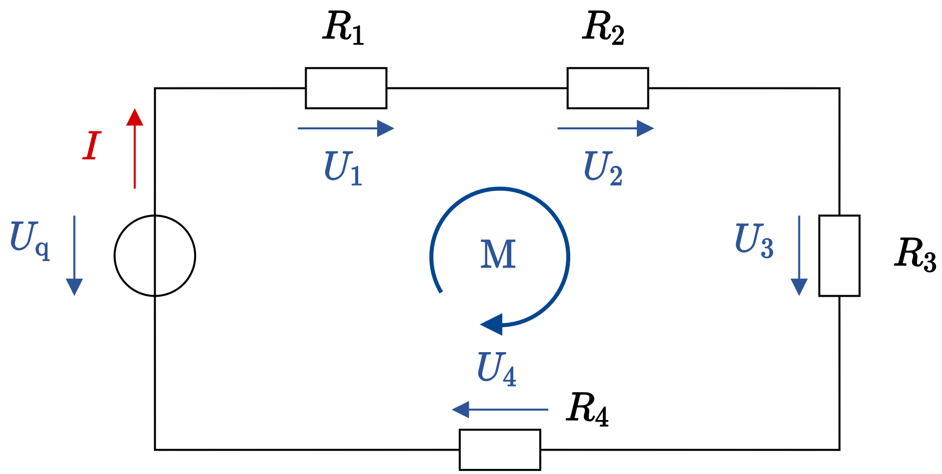


Beispiel zur Anwendung

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Kirchhoff'scher Maschensatz

Definition einer Masche im Netzwerk: Geschlossener Weg entlang mehrerer Netzwerkelemente



Kirchhoff'scher Maschensatz

Die (Zählpfeil-richtige) Summer aller Spannungen entlang einer Masche entspricht stets Null.

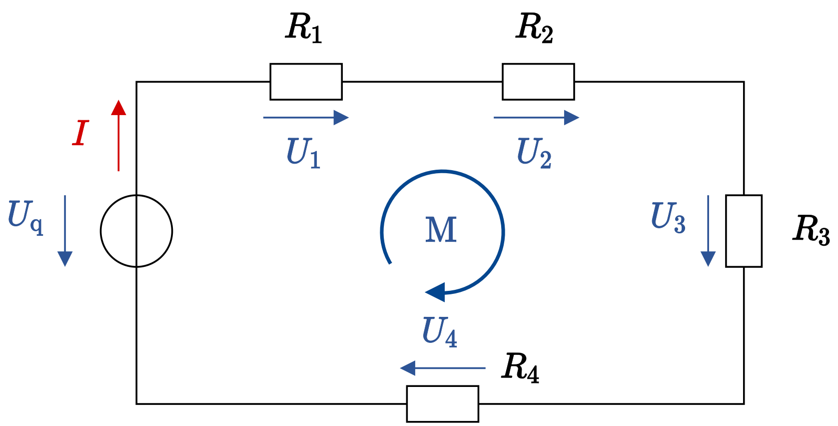
$$\boxed{\sum_{\forall i \in \text{Masche}} U_i = 0}$$

Interpretation des Kirchhoff'scher Maschensatzes

Betrachtung der einzelnen Potentiale φ_i entlang der Masche

Maschenumlauf: Start bei beliebigen Potential und Ende beim Ausgangspunkt

Da Spannungen Potentialdifferenzen entspricht muss die Summer aller Spannungen Null ergeben



Analogie aus dem täglichen Leben:

Vergleiche Potentiale mit Höhenlinien bei einer Bergwanderung

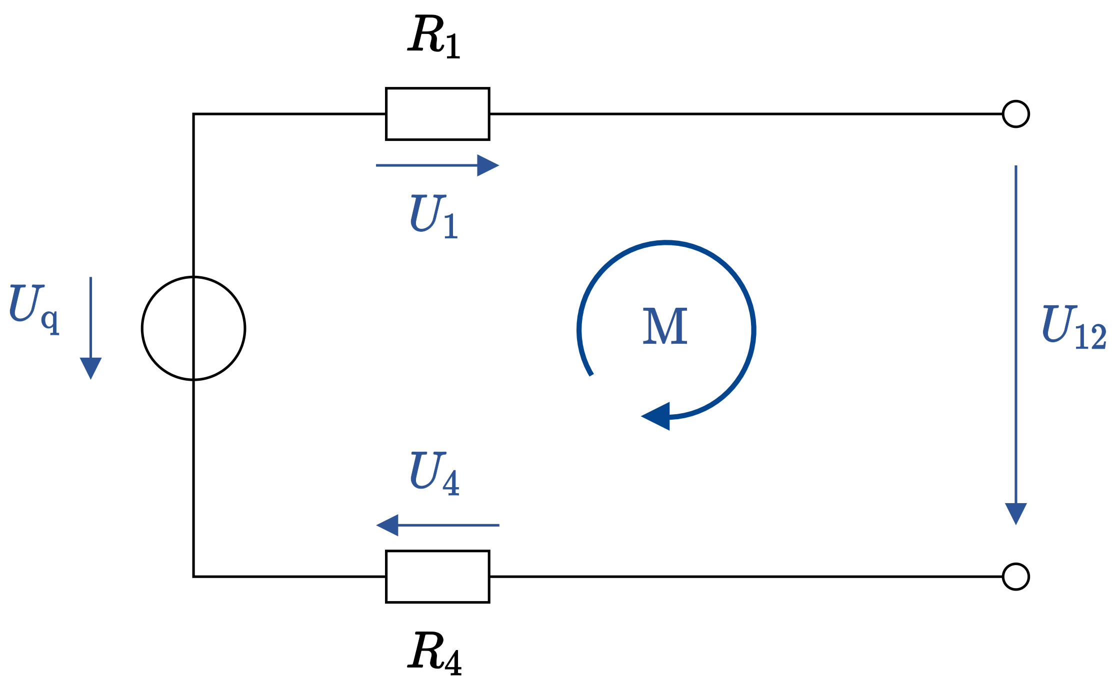
Nach einem Rundweg ist genauso viele Höhenmeter auf- wie abgestiegen

Maschenumlauf mit einem Leerlauf

Ein Maschenumlauf kann auch entlang einer offenen Masche erfolgen.

Für einen geschlossenen Maschenumlauf ist Leerlaufspannung zu brücksichtigen.

$$U_1 + U_{12} + U_2 - U_\mathrm{q} = 0$$



Beispiel zur Anwendung der Kirchhoff'schen Regeln

Wichtig: Vorzeichenrichtige Anwendung der Zählpfeile!

$$\mathrm{M}_1 : \; U_1 + U_2 - U_3 - U_{\mathrm{q}1} = 0$$

$$\mathrm{M}_2 : \; U_3 + U_4 + U_5 - U_{\mathrm{q}2} = 0$$

$$\mathrm{M}_3 : \; U_6 - U_4 - U_2 = 0$$

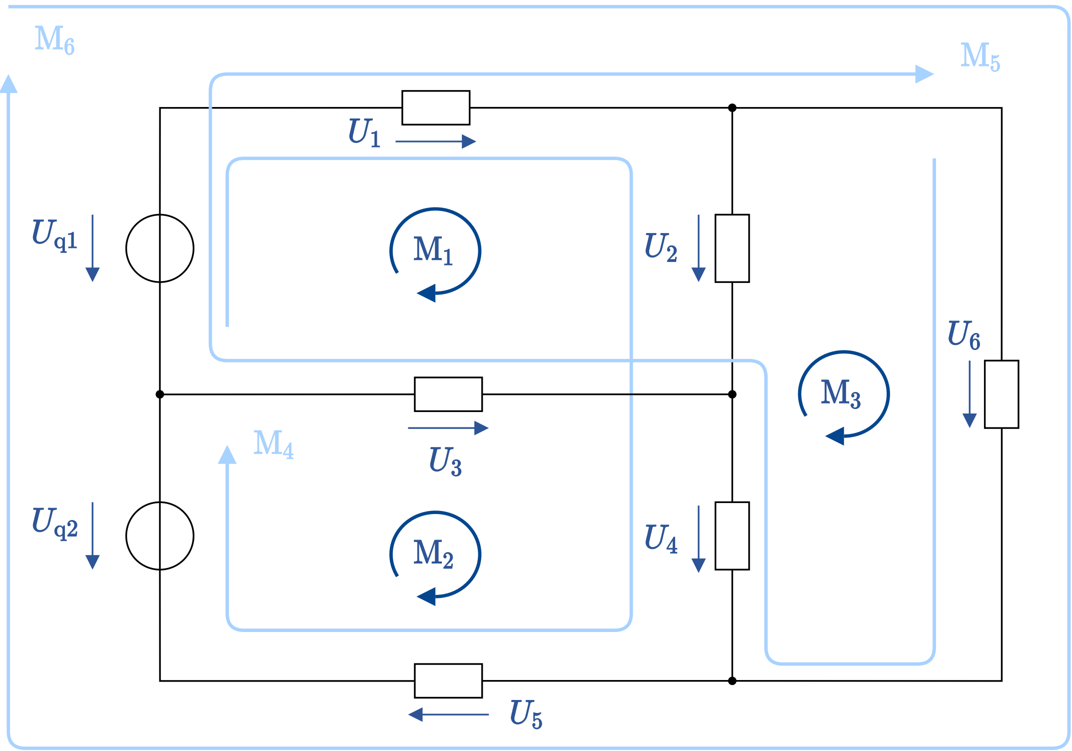
Weitere mögliche Maschen

$$\mathrm{M}_4 : \; U_1 + U_2 + U_4 + U_5 - U_{\mathrm{q}2} - U_{\mathrm{q}2} = 0$$

$$\mathrm{M}_5 : \; U_6 - U_4 - U_3 - U_{\mathrm{q}1} + U_1 = 0$$

$$\mathrm{M}_6 : \; U_1 + U_6 + U_5 - U_{\mathrm{q}2} - U_{\mathrm{q}1} = 0$$

$$\ldots$$



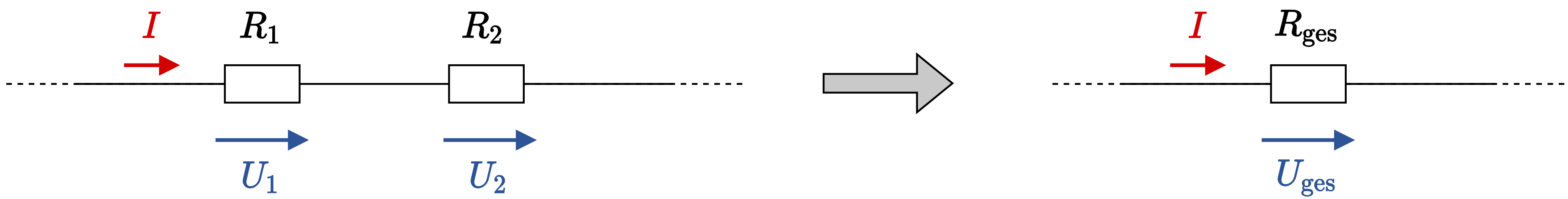
Herausvorderung: Auswahl sinnvoller Maschen!

Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

Reihenschaltung von Widerständen

Gegeben: Reihenschaltung von zwei Widerständen R_1 und R_2

Gesucht: Gesamtwiderstand R_{ges}



$$U_{\mathrm{ges}} = U_1 + U_2 \quad \text{mit} \quad U_1 = R_1 \cdot I \quad \text{und} \quad U_2 = R_2 \cdot I$$

$$U_{\mathrm{ges}} = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I = \overbrace{(R_1 + R_2)}^{R_{\mathrm{ges}}} \cdot I \qquad \Rightarrow \qquad R_{\mathrm{ges}} = R_1 + R_2$$

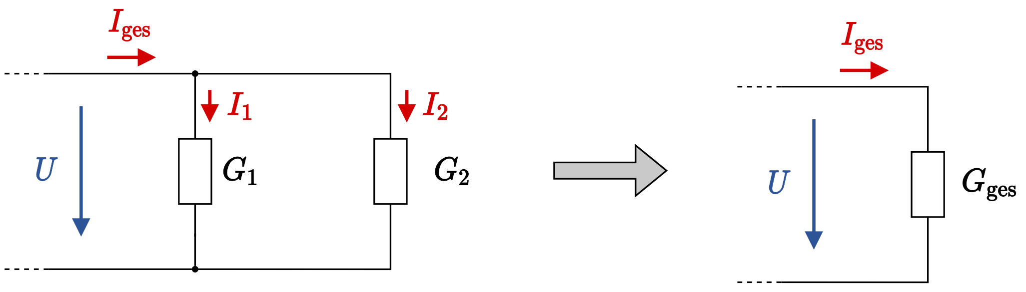
Allgemeine Berechnung einer Reihenschaltung beliebig vieler Widerstände

$$\boxed{R_{\mathrm{ges}} = \sum_i R_i}$$

Parallelschaltung von Leitwerten

Gegeben: Reihenschaltung von zwei elektrischen Leitwerten G_1 und G_2

Gesucht: Gesamtleitwert G_{ges}



$$I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 \quad \text{mit} \quad I_1 = G_1 \cdot U \quad \text{und} \quad I_2 = G_2 \cdot U$$

$$I_{\text{ges}} = G_1 \cdot U + G_2 \cdot U = \overbrace{(G_1 + G_2)}^{G_{\text{ges}}} \cdot U \qquad \Rightarrow \qquad G_{\text{ges}} = G_1 + G_2$$

Allgemeine Berechnung der Parallelschaltung beliebig vieler Leitwerte

$$\boxed{G_{\text{ges}} = \sum_i G_i}$$

Parallelschaltung von Widerständen

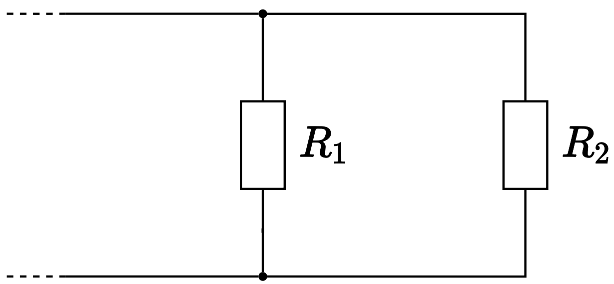
Ist anstelle des Gesamtleitwertes der elektrische Gesamtwiderstand gesucht

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{G_{\text{ges}}} = \frac{1}{\sum_i G_i} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_1}}$$

Allgemeine Berechnung der Parallelschaltung beliebig vieler Widerstände

$$\boxed{R_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum\limits_i \frac{1}{R_1}}}$$

Häufiger Spezialfall: Parallelschaltung von zwei Widerständen R_1 und R_2



$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Merksatz für diese Formel: *Mal durch Plus*

Einfaches Formelzeichen für zwei parallele Widerstände: $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R_1 || R_2$

Interpretation der Parallelschaltung von Widerständen

Bei der Parallelschaltung ist der Gesamtwiderstand immer kleiner als der kleinste Einzelwiderstand

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_1}} \qquad \Rightarrow \qquad R_{\text{ges}} < R_i \quad \forall i$$

Dies gilt natürlich auch bei der Parallelschaltung von zwei Widerständen

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} < R_1 \quad \text{und} \quad R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} < R_2$$

Bei der Parallelschaltung von zwei gleichen Widerständen $R_1 = R_2 = R$ wird Gesamtwiderstand halbiert

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

Bei der Parallelschaltung von N gleichen Widerständen $R_1 = R_2 = R_3 = \ldots = R_N = R$ gilt

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_1}} = \frac{1}{N \cdot \frac{1}{R}} = \frac{R}{N}$$

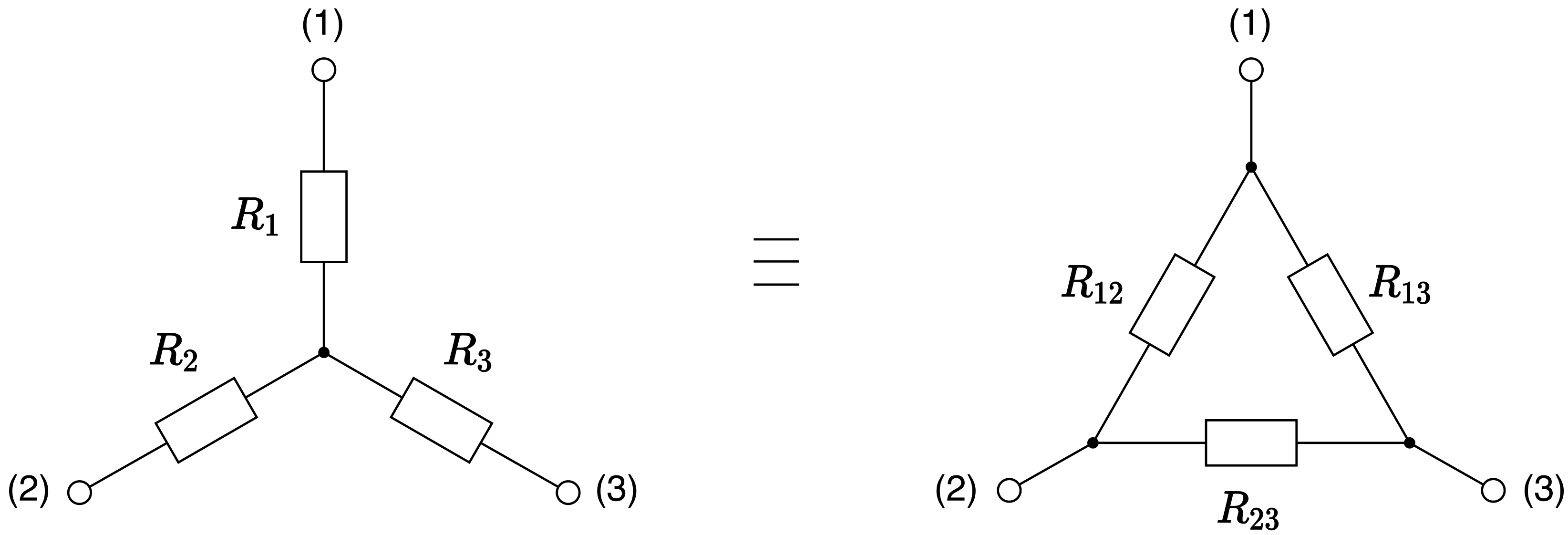
Stern-Dreieck Transformation

Stern-Dreieck Transformation

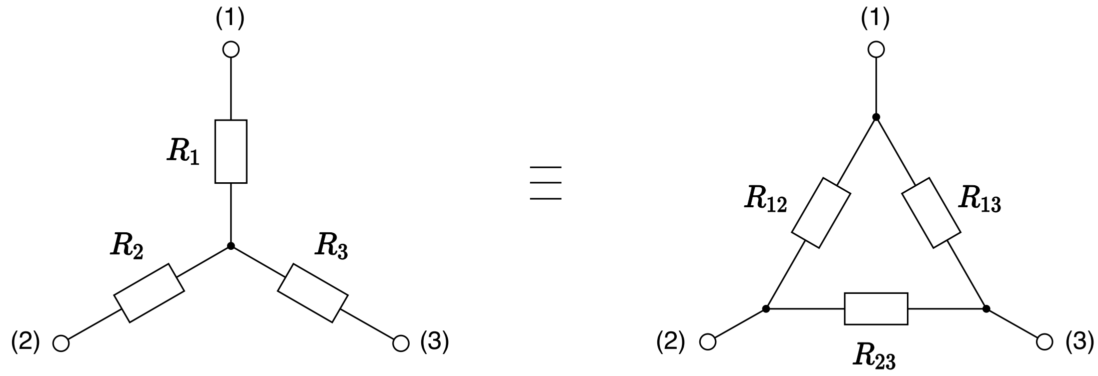
Äquivalente Umrechnung von drei Widerständen im *Stern* zu drei Widerständen im *Dreieck*

- Elektrisches Verhalten an den Anschlussklemmen (1), (2) und (3) jeweils identisch
- Umgekehrte Umrechnung ebenfalls möglich

Gesucht: Umrechnungsvorschrift zwischen den Widerständen im Stern und im Dreieck



Dreieck-Stern Umwandlung I



Widerstand zwischen Knoten (1) und (2)

$$\text{I:}\quad R_1 + R_2 = R_{12}||(R_{13} + R_{23}) = \frac{R_{12} \cdot (R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Analog ergibt sich für die Knoten (2) und (3) bzw. (1) und (3)]

$$\text{II:}\quad R_2 + R_3 = \frac{R_{23} \cdot (R_{13} + R_{12})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$\text{III:}\quad R_1 + R_3 = \frac{R_{13} \cdot (R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Dreieck-Stern Umwandlung II

Lösung des Gleichungssystemes mittels des Ansatzes

$$\frac{1}{2} \cdot (\mathrm{I} - \mathrm{II} + \mathrm{III})$$

Damit ergibt sich für die linke Seite der Gleichungen

$$\frac{1}{2} \cdot \Big[(R_1 + R_2) - (R_2 + R_3) + (R_1 + R_3)\Big] = R_1$$

Für die rechte Seite folgt nun

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{R_{12} \cdot (R_{13} + R_{23}) - R_{23} \cdot (R_{13} + R_{12}) + R_{13} \cdot (R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} =$$

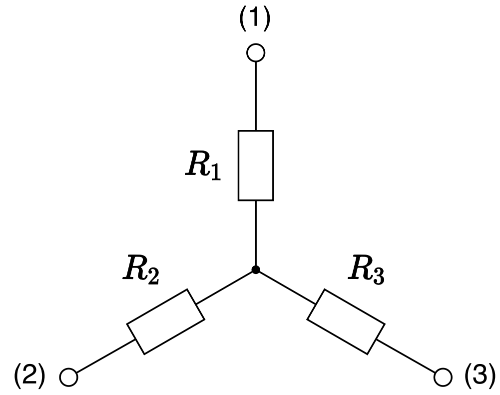
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{13} + R_{12} \cdot R_{23} - R_{23} \cdot R_{13} - R_{23} \cdot R_{12} + R_{13} \cdot R_{12} + R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \stackrel{!}{=} R_1$$

Dreieck-Stern Umwandlung III

Die Umwandlung der Widerstände einer Dreieck- in eine Sternschaltung lässt sich allgemein formulieren

$$\boxed{\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \\[2ex] R_2 &= \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \\[2ex] R_3 &= \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \end{aligned}}$$

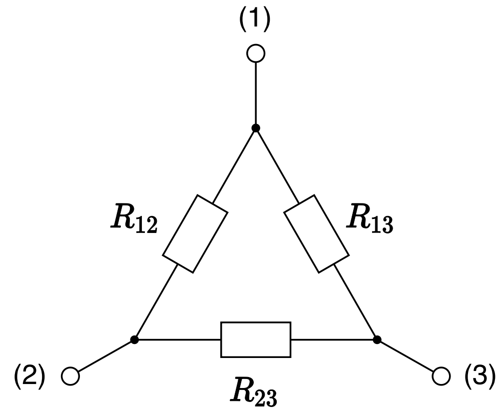


Spezialfall: Alle Dreieckwiderstände sind gleich

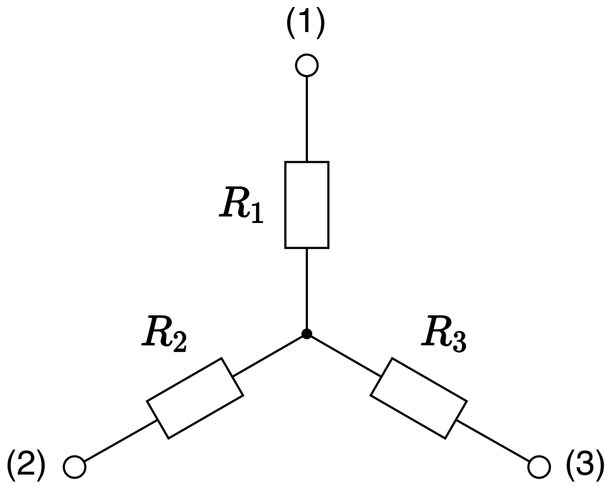
$$R_{12} = R_{23} = R_{13} = R_\Delta$$

Folglich sind auch alle Sternwiderstände gleich

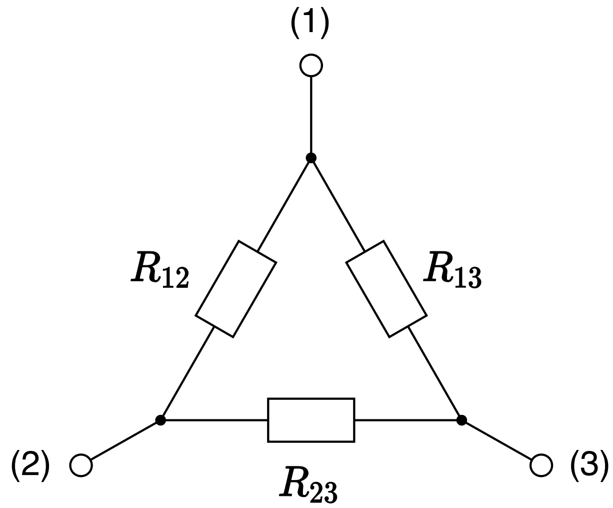
$$R_1 = R_2 = R_3 = R_\lambda = \frac{R_\Delta}{3}$$



Stern-Dreieck Umwandlung I



$\equiv$



Umwandlung von Stern- in Dreieckwiderstände: Addition der paarweise Produkte der Sternwiderstände

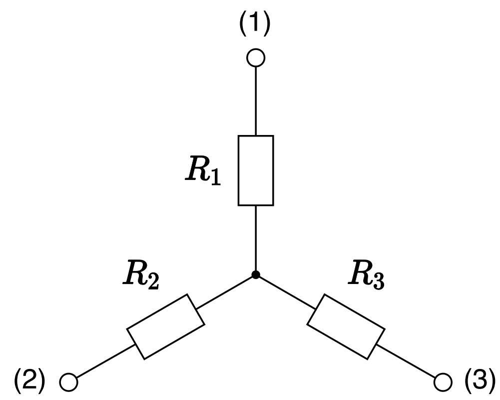
$$R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 = \frac{R_{12}^2 \cdot R_{13} \cdot R_{23} + R_{12} \cdot R_{23}^2 \cdot R_{13} + R_{12} \cdot R_{13}^2 \cdot R_{23}}{\left(R_{12} + R_{13} + R_{23}\right)^2} =$$

$$= \frac{(R_{12} \cdot R_{13} \cdot R_{23}) \cdot (R_{12} + R_{23} + R_{13})}{\left(R_{12} + R_{13} + R_{23}\right)^2} = \frac{R_{12} \cdot R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} = R_{12} \cdot \underbrace{\frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}}_{R_3}$$

Stern-Dreieck Umwandlung II

Damit ergibt sich allgemein für alle Dreieckwiderstände

$$\boxed{\begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_1} \\ R_{13} &= \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_2} \end{aligned}}$$

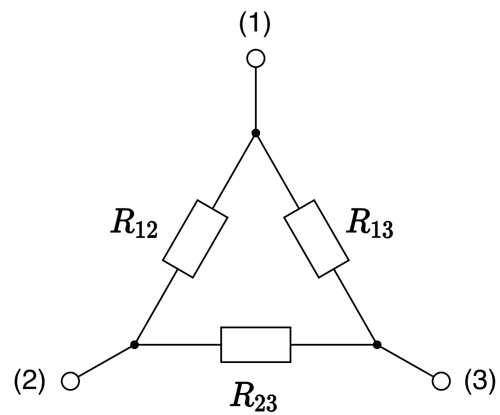


Spezialfall: Alle Sternwiderstände sind gleich

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_\lambda$$

Folglich sind auch alle Dreieckwiderstände gleich

$$R_{12} = R_{23} = R_{13} = R_\Delta = 3 \cdot R_\lambda$$

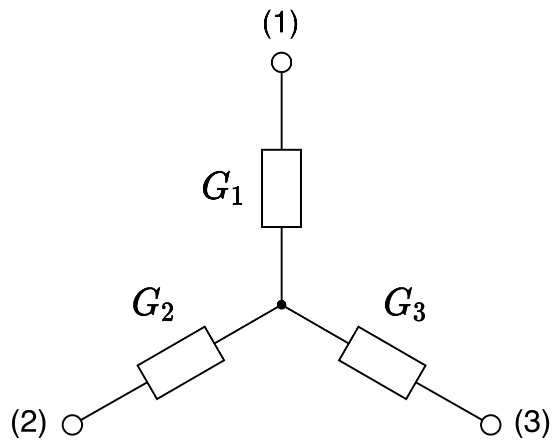


Stern-Dreieck Transformation mit Leitwerten

$$G_1 = \frac{G_{12} \cdot G_{13} + G_{12} \cdot G_{23} + G_{13} \cdot G_{23}}{G_{23}}$$

$$G_2 = \frac{G_{12} \cdot G_{13} + G_{12} \cdot G_{23} + G_{13} \cdot G_{23}}{G_{13}}$$

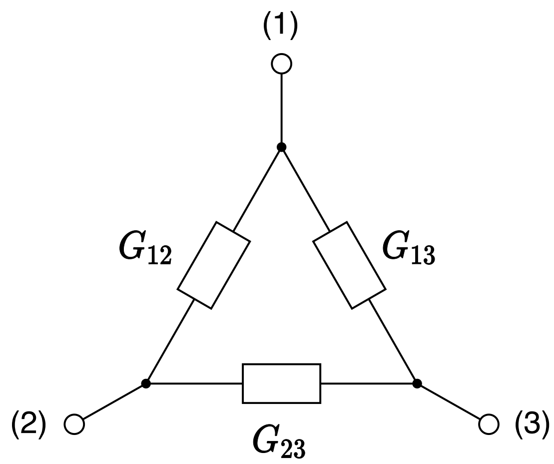
$$G_3 = \frac{G_{12} \cdot G_{13} + G_{12} \cdot G_{23} + G_{13} \cdot G_{23}}{G_{12}}$$



$$G_{12} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{13} = \frac{G_1 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$



Spannungs- und Stromteiler

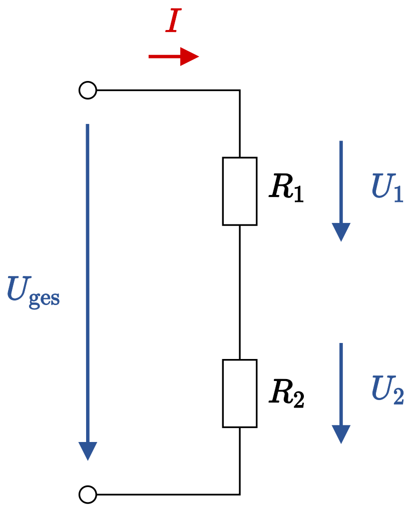
Spannungsteiler

Gegeben: Reihenschaltung von zwei Widerständen R_1 und R_2 und Gesamtspannung U_{ges}

Gesucht: Wie verhalten sich die Teilspannungen U_1 und U_2 über den beiden Widerständen?

Spannungsteilerregel:

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1 \cdot I}{R_2 \cdot I} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \text{und} \qquad \frac{U_1}{U_{\text{ges}}} = \frac{R_1 \cdot I}{R_{\text{ges}} \cdot I} = \frac{R_1}{R_{\text{ges}}}}$$



Bei gegebener Gesamtspannung lassen sich die Teilspannungen U_1 und U_2 berechnen:

$$U_1 = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R_1}{R_{\text{ges}}} = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R_2}{R_{\text{ges}}} = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Spannungsteiler mit gleichen Widerständen

Spezialfall: Spannungsteiler mit zwei gleichen Widerständen $R_1 = R_2 = R$

Teilspannung über die Widerstände

$$U_1 = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R}{R + R} = \frac{U_{\text{ges}}}{2} = U_2$$

Spannungsteiler mit N seriellen gleichen Widerständen $R_1 = R_2 = R_3 = \ldots = R_N = R$

$$U_1 = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R_1}{R_{\text{ges}}} = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R}{N \cdot R} = \frac{U_{\text{ges}}}{N}$$

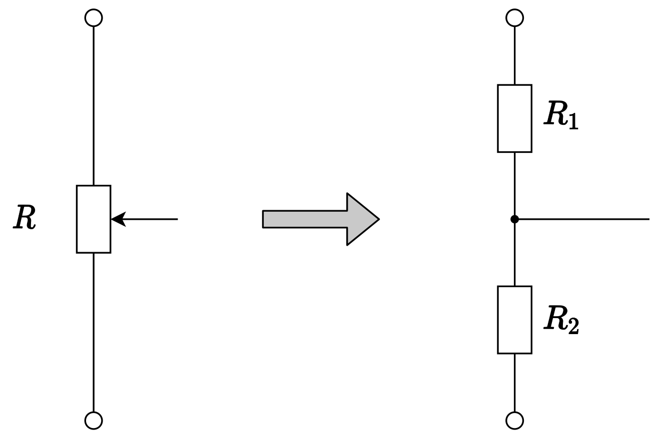
Spannungsteiler am Potentiometer

Potentiometer: Widerstand mit einstellbaren Mittenabriff

- Bauteil mit drei Anschlüssen
- Mittenabriff teilt Widerstand R in zwei Teilwiderstände R_1 und R_2

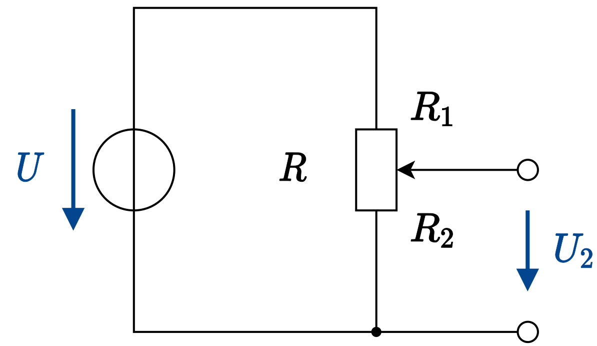
$$R = R_1 + R_2$$

- Anwendung: z.B. Lautestärkeregler



Anwendung des Spannungsteilers am Potentiometer

$$U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U \cdot \frac{R_2}{R}$$

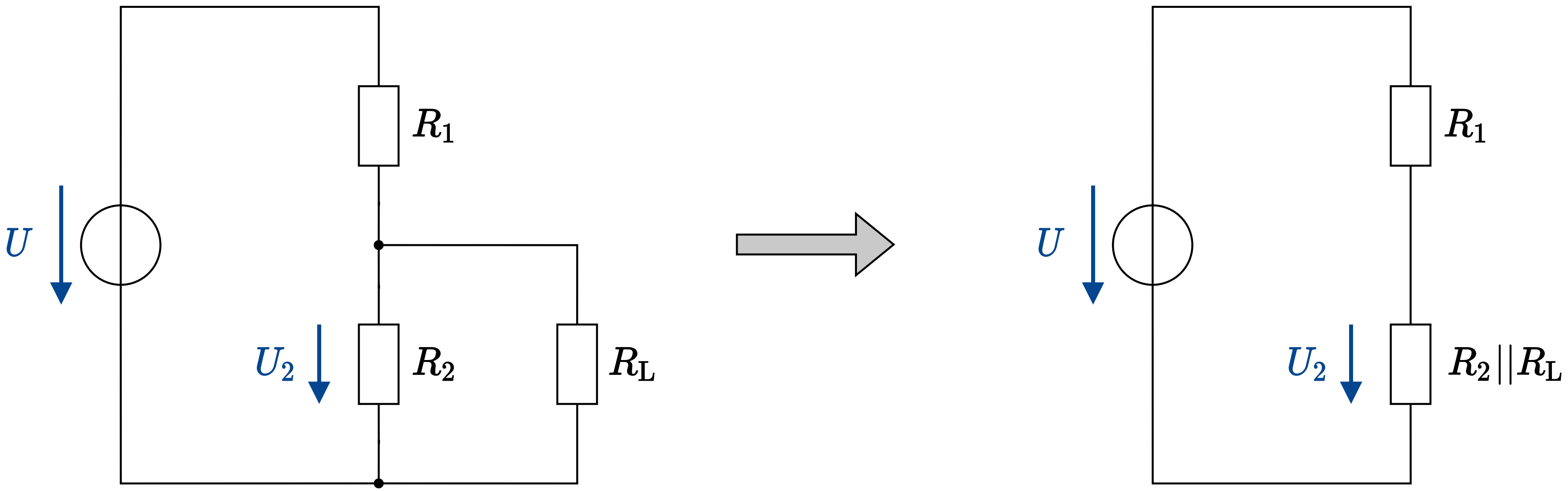


Spannungsteiler mit zusätzlichem parallelen Widerstand

Häufig besitzt beim Spannungsteiler einer der Widerstände einen zusätzlichen parallelen Lastwiderstand R_L

Wichtig: Lastwiderstand ist bei der Anwendung der Spannungsteilerregel zu berücksichtigen!

$$U_2 = U \cdot \frac{R_2||R_\mathrm{L}}{R_1 + (R_2||R_\mathrm{L})} = U \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot R_\mathrm{L}}{R_2 + R_\mathrm{L}}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_\mathrm{L}}{R_2 + R_\mathrm{L}}} = U \cdot \frac{R_1 R_\mathrm{L}}{R_1 R_2 + R_1 R_\mathrm{L} + R_2 R_\mathrm{L}}$$

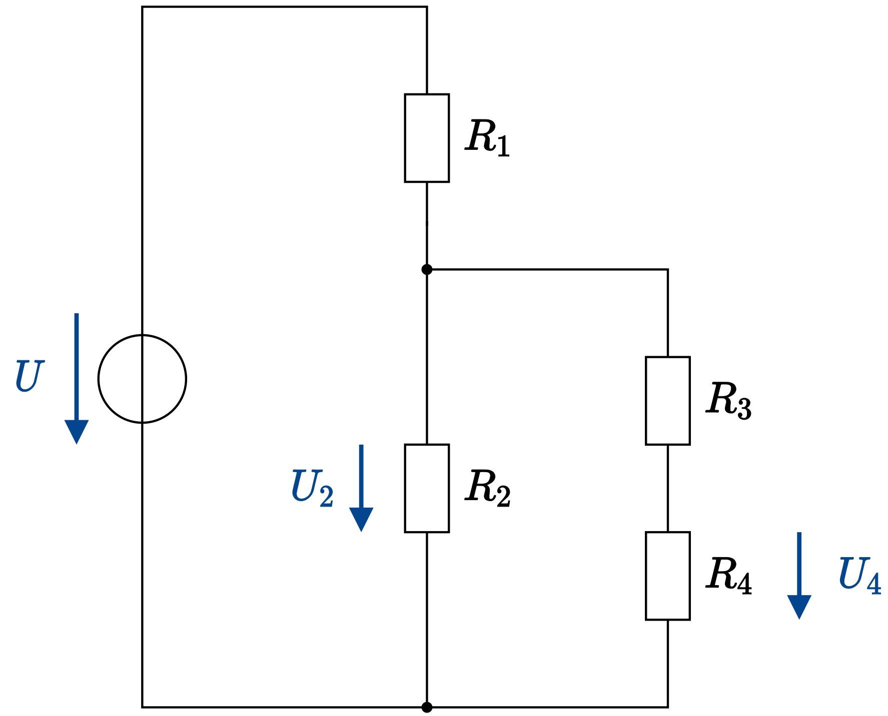


Doppelte Anwendung der Spannungsteilerregel

Widerstandsnetzwerk mit zwei Spannungsteilern

Gesucht: Teispannung U_4 über Widerstand R_2

$$
\begin{aligned}
U_4 = U_2 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} &= \\
&= U \cdot \frac{R_2 || (R_3 + R_4)}{R_1 + (R_2 || (R_3 + R_4))} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = \\
&= U \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = \\
&= U \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_3 + R_4}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} = \\
&= U \cdot \frac{R_2 \cdot R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_3 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4}
\end{aligned}
$$



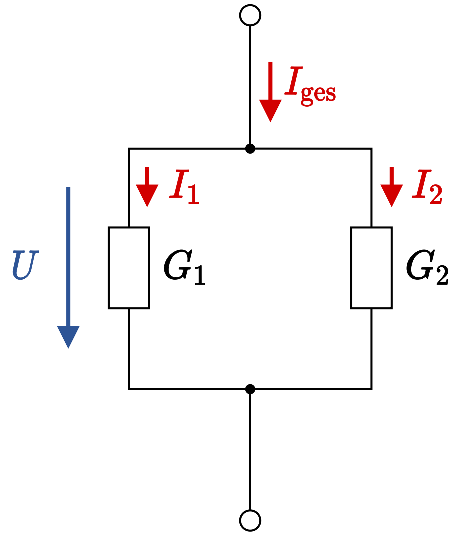
Stromteiler

Gegeben: Parallelschaltung von zwei Leitwerten G_1 und G_2 und Gesamtstrom I_{ges}

Gesucht: Wie verhalten sich die Teilströme I_1 und I_2 durch die beiden Leitwerte?

Stromteilerregel:

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1 \cdot U}{G_2 \cdot U} = \frac{G_1}{G_2} \qquad \text{und} \qquad \frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{G_1 \cdot U}{G_{\text{ges}} \cdot U} = \frac{G_1}{G_{\text{ges}}}}$$



Bei gegebenen Gesamtstrom lassen sich die beiden Teilströme I_1 und I_2 berechnen

$$I_1 = I_{\text{ges}} \cdot \frac{G_1}{G_{\text{ges}}} = I_{\text{ges}} \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2}$$

$$I_2 = I_{\text{ges}} \cdot \frac{G_2}{G_{\text{ges}}} = I_{\text{ges}} \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

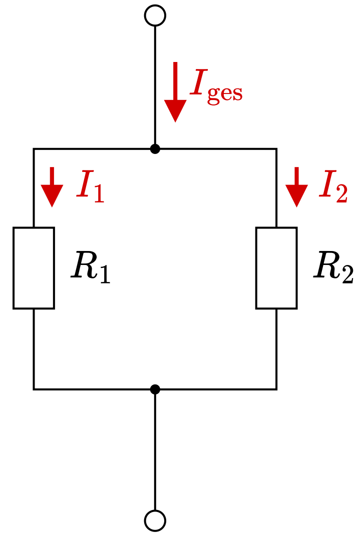
Stromteiler mit elektrischen Widerständen

Gegeben: Parallelschaltung von zwei Widerständen $R_1 = 1/G_1$ und $R_2 = 1/G_2$ und Gesamtstrom I_{ges}

Gesucht: Wie verhalten sich die Teilströme I_1 und I_2 durch die beiden Leitwerte?

Stromteilerregel:

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2} = \frac{1/R_1}{1/R_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{und} \qquad \frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{G_1}{G_{\text{ges}}} = \frac{1/R_1}{1/R_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_1}}$$



Bei gegebenen Gesamtstrom lassen sich die beiden Teilströme I_1 und I_2 berechnen

$$I_1 = I_{\text{ges}} \cdot \frac{G_1}{G_{\text{ges}}} = I_{\text{ges}} \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2} = I_{\text{ges}} \cdot \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} = I_{\text{ges}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = I_{\text{ges}} \cdot \frac{G_2}{G_{\text{ges}}} = I_{\text{ges}} \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2} = I_{\text{ges}} \cdot \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = I_{\text{ges}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Stromteiler mit gleichen Widerständen

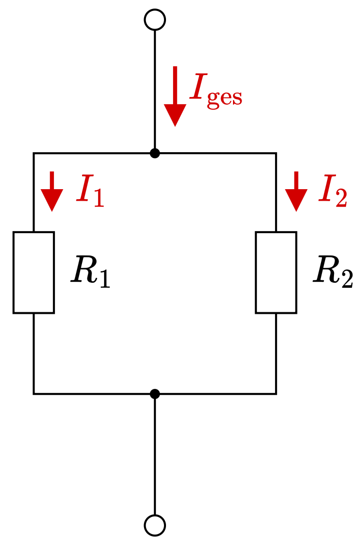
Spezialfall: Stromteiler mit zwei gleichen Widerständen $R_1 = R_2 = R$

Teilstrom durch die Widerstände

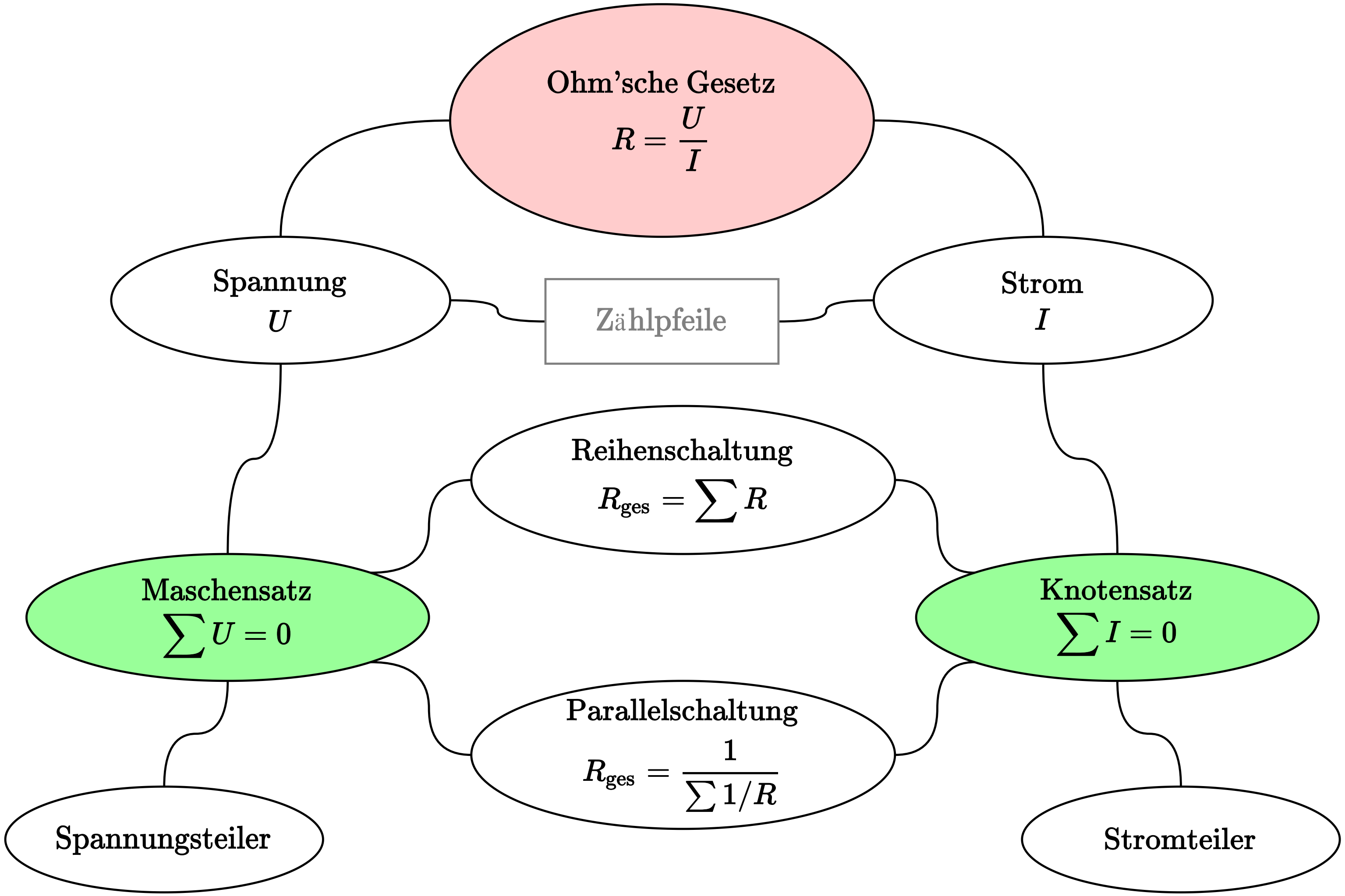
$$I_1 = I_{\text{ges}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = I_{\text{ges}} \cdot \frac{R}{R + R} = \frac{I_{\text{ges}}}{2} = I_2$$

Stromteiler mit N parallelen gleichen Widerständen $R_1 = R_2 = R_3 = \ldots = R_N = R$

$$I_1 = I_{\text{ges}} \cdot \frac{G_1}{G_{\text{ges}}} = I_{\text{ges}} \cdot \frac{1/R}{N/R} = \frac{I_{\text{ges}}}{N}$$



Zusammenfassung

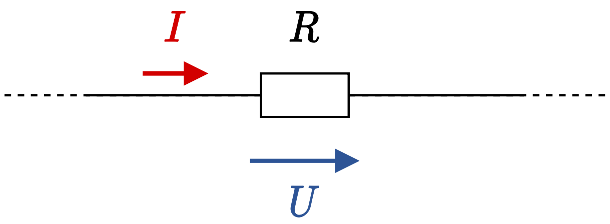


Messverfahren

Bestimmung eines Widerstandes

Aufgabe: Bestimmung eines Widerstandswertes R

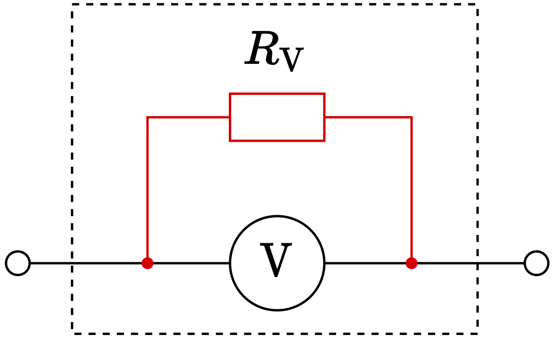
$$R = \frac{U}{I}$$

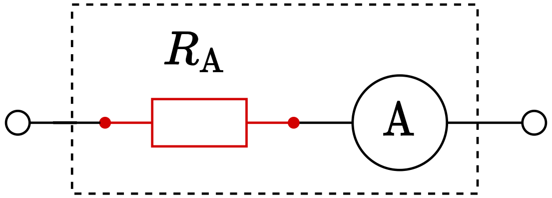


Herausvorderung: Gleichzeitige Messung von U und I

Problematik: Reale Messgeräte für Strom und Spannung besitzen endliche Innenwiderstände

- Ideales Voltmeter: $R_\mathrm{i} \to \infty$
- Reales Voltmeter: $R_\mathrm{i} \gg 1$
- Ideales Amperemeter: $R_\mathrm{i} = 0$
- Reales Amperemeter: $R_\mathrm{i} \approx 0$





Spannungsrichtige Messung I

- Gemessene Spannung ist korrekt
- Gemessener Strom ist zu groß $I \neq I_R$

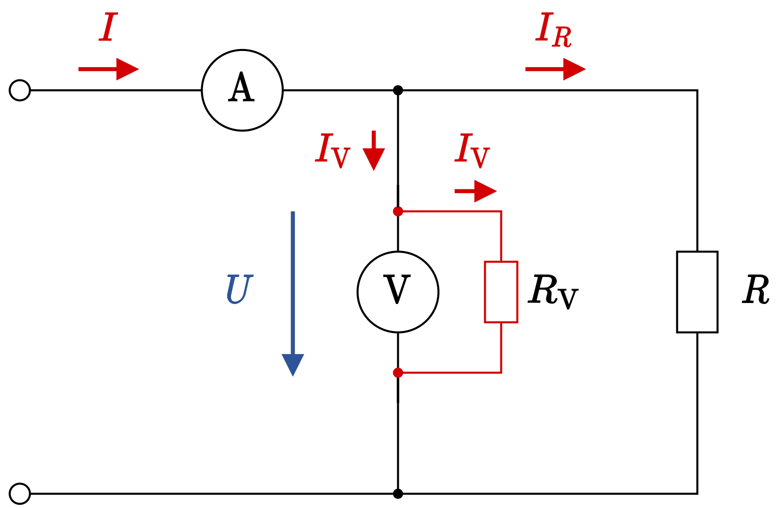
$$I = I_\mathrm{V} + I_R$$

$$R_\mathrm{mess} = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_\mathrm{V} + I_R} < \frac{U}{I_R} = R$$

$$R_\mathrm{mess} = \frac{R \cdot R_\mathrm{V}}{R + R_\mathrm{V}} = R \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{R}{R_\mathrm{V}}}}_{\mathrm{Fehlerfaktor} < 1}$$

Hohe Messgenauigkeit, d.h. $R/R_\mathrm{V} \ll 1$ erreichbar durch

- $R_\mathrm{V} \to \infty$
- Kleinem zu messenden Widerstand R



Spannungsrichtige Messung II

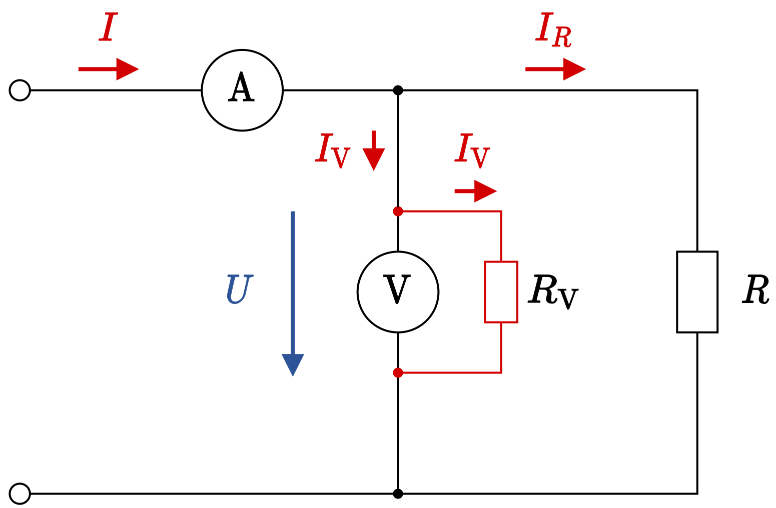
$$R_{\text{mess}} = \frac{R \cdot R_{\text{V}}}{R + R_{\text{V}}}$$

$$R_{\text{mess}} \cdot R + R_{\text{mess}} \cdot R_{\text{V}} = R \cdot R_{\text{V}}$$

$$R \cdot (R_{\text{mess}} - R_{\text{V}}) = -R_{\text{mess}} \cdot R_{\text{V}}$$

$$R = \frac{R_{\text{mess}} \cdot R_{\text{V}}}{R_{\text{V}} - R_{\text{mess}}} =$$

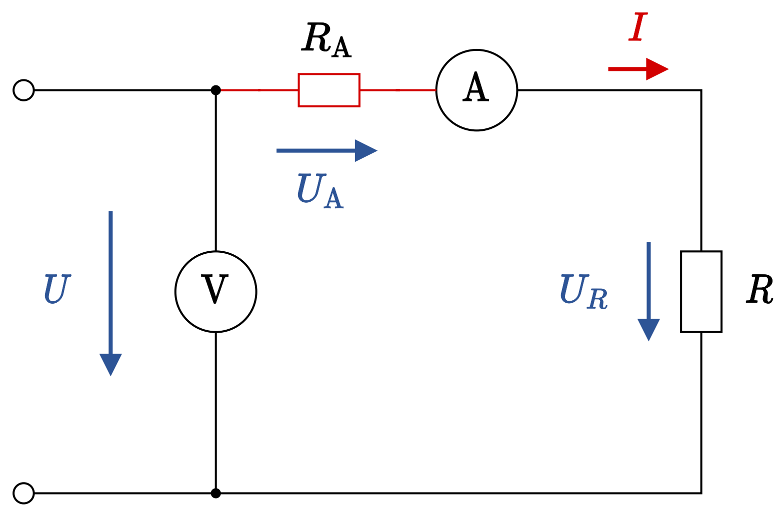
$$= R_{\text{mess}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{R_{\text{mess}}}{R_{\text{V}}}}}_{\text{Korrekturfaktor}}$$



Nachträglicher Ausgleich des Messfehlers möglich falls Innenwiderstand R_{V} bekannt

Stromrichtige Messung I

- Gemessener Strom ist korrekt
- Gemessene Spannung ist zu groß



$$U = U_\mathrm{A} + U_R$$

$$R_\mathrm{mess} = \frac{U}{I} = \frac{U_\mathrm{A} + U_R}{I} > \frac{U_R}{I} = R$$

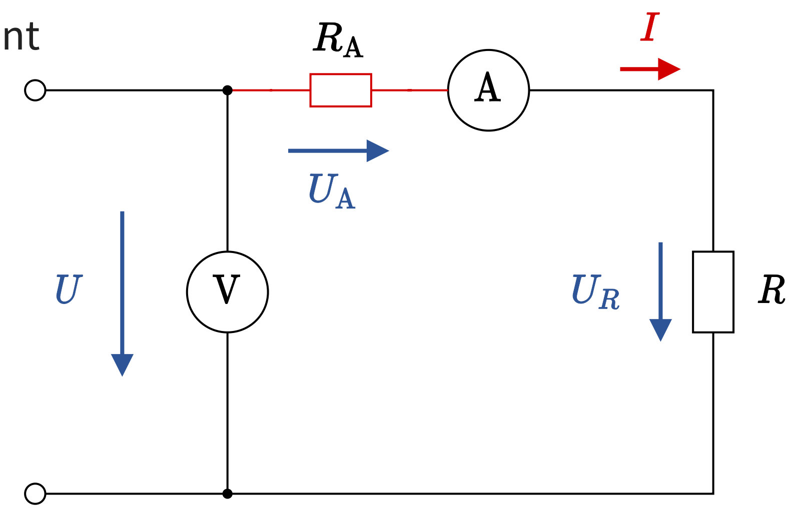
$$R_\mathrm{mess} = R_\mathrm{A} + R = R \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{R_\mathrm{A}}{R}\right)}_{\mathrm{Fehlerfaktor}>1}$$

Hohe Messgenauigkeit, d.h. $R_\mathrm{A}/R \ll 1$ erreichbar durch

- $R_\mathrm{A} \to 0$
- Großem zu messenden Widerstand R

Stromrichtige Messung II

Korrektur des Messfehler möglich falls Innenwiderstand R_V bekannt



$$R_\mathrm{mess} = R_\mathrm{A} + R$$

$$R = R_\mathrm{mess} - R_\mathrm{A}$$

Messbereichserweiterung - Strommessung

Amperemeter kann Strom bis zu einer Stärke von I_A messen

Veränderung des Messbereiches um einen Faktor k mit

$$I = k \cdot I_\mathrm{A}$$

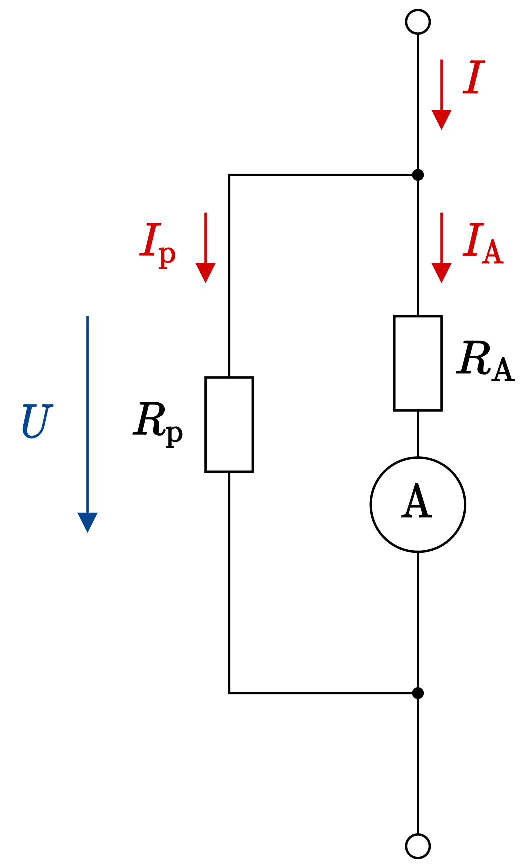
Dazu ist ein Widerstand R_p parallel zum Amperemeter zu schalten

$$I = I_\mathrm{A} + I_\mathrm{p} \qquad \Rightarrow \qquad I_\mathrm{p} = k \cdot I_\mathrm{A} - I_\mathrm{A} = I_\mathrm{A} \cdot (k-1)$$

$$I_\mathrm{A} = \frac{U}{R_\mathrm{A}} \qquad I_\mathrm{p} = \frac{U}{R_\mathrm{p}}$$

Der Widerstand R_p errechnet sich zu

$$R_\mathrm{p} = \frac{U}{I_\mathrm{p}} = \frac{I_\mathrm{A} \cdot R_\mathrm{A}}{I_\mathrm{A} \cdot (k-1)} = \frac{R_\mathrm{A}}{k-1}$$



Messbereichserweiterung - Spannungsmessung

Voltmeter kann Spannung bis zu einem Wert von U_V messen

Veränderung des Messbereiches um einen Faktor k mit

$$U = k \cdot U_\mathrm{V}$$

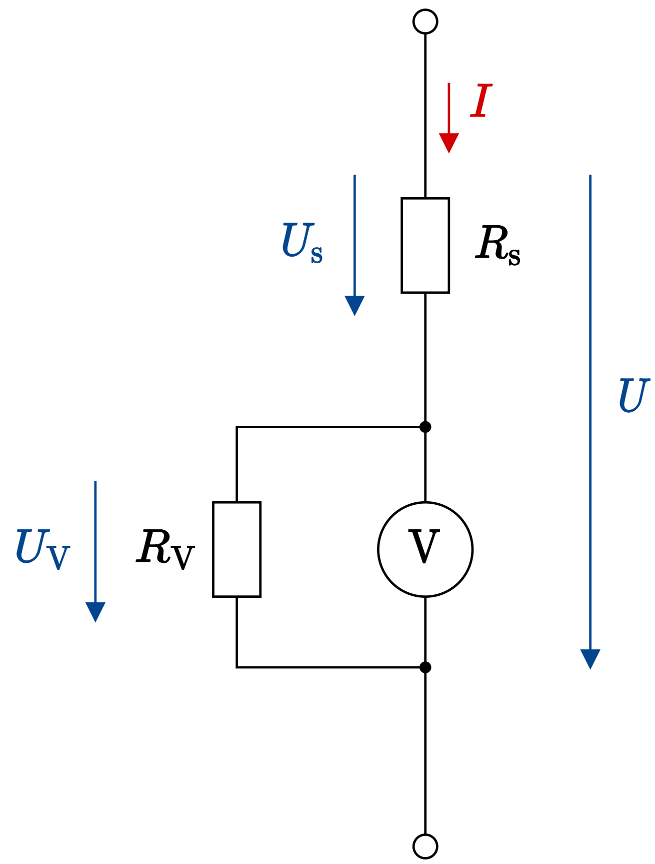
Dazu ist ein Widerstand R_s seriell zum Voltmeter zu schalten

$$U = U_\mathrm{s} + U_\mathrm{V} \qquad \Rightarrow \qquad U_\mathrm{V} = \frac{U_\mathrm{s}}{k-1}$$

$$U_\mathrm{s} = R_\mathrm{s} \cdot I \qquad U_\mathrm{V} = R_\mathrm{V} \cdot I$$

Der Widerstand R_s errechnet sich zu

$$R_\mathrm{s} = \frac{U_\mathrm{s}}{I} = \frac{U_\mathrm{s} \cdot R_\mathrm{V}}{U_\mathrm{V}} = \frac{U_\mathrm{s} \cdot R_\mathrm{V}}{U_\mathrm{s}} \cdot (k-1) = R_\mathrm{V} \cdot (k-1)$$



Wheatstone-Brücke I

Messung des Widerstandes R_x mittels der drei bekannten Widerstände R_2, R_3 und R_4

Brückenabgleich: Dimensionierung der Widerstände R_2, R_3 und R_4 damit Brückenstrom $I_\mathrm{B} = 0$ gilt

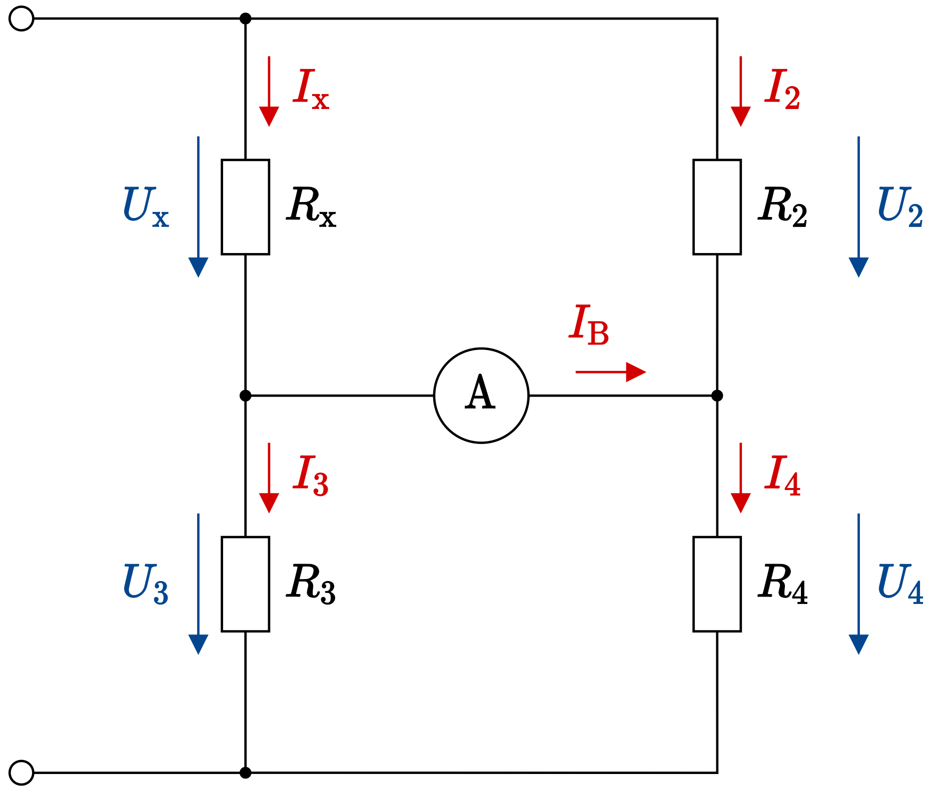
$$U_\mathrm{x} = U_2 \qquad \text{und} \qquad U_3 = U_4$$

$$\underbrace{I_\mathrm{x} \cdot R_\mathrm{x} = I_2 \cdot U_2 \qquad\qquad I_3 \cdot R_3 = I_4 \cdot U_4}_{\frac{I_\mathrm{x} \cdot R_\mathrm{x}}{I_3 \cdot R_3} = \frac{I_2 \cdot U_2}{I_4 \cdot U_4}}$$

Aus $I_\mathrm{B} = 0$ folgt $I_\mathrm{x} = I_3$ und $I_2 = I_4$

Damit gilt für den Brückenabgleich

$$\boxed{\frac{R_\mathrm{x}}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}}$$



Wheatstone-Brücke II

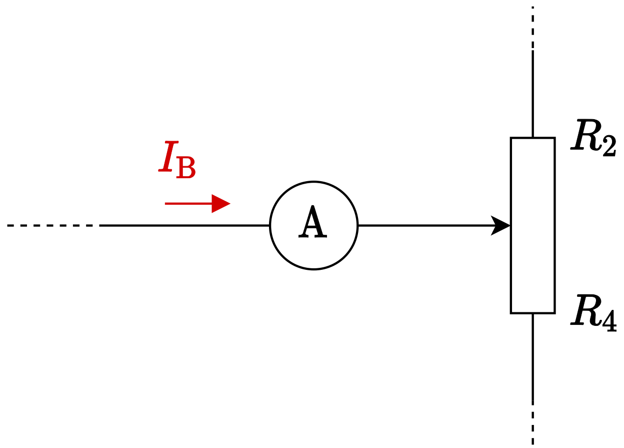
Bestimmung des Widerstandes R_x durch

- Brückenabgleich $I_\mathrm{B} = 0$
- Bekannten Widerstand R_3
- Verhältnis der Widerstände R_2/R_4

$$R_\mathrm{x} = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_4}$$

Realisierung des Brückenabgleiches durch Nullinstrument

- Einstellung des Potentiometers (Verhältnisse R_2/R_4)
- Amperemeter muss $I_B = 0$ zeigen
- Stromrichtige Messung hierbei möglich



Referenzen

[1] M. Albach, *Elektrotechnik,* Pearson Verlag.

[2] G. Hagmann, *Grundlagen der Elektrotechnik,* Aula Verlag.

[3] D. Metz, U. Naundorf, J. Schlabbach, *Kleine Formelsammlung Elektrotechnik,* Fachbuchverlag Leipzig.