

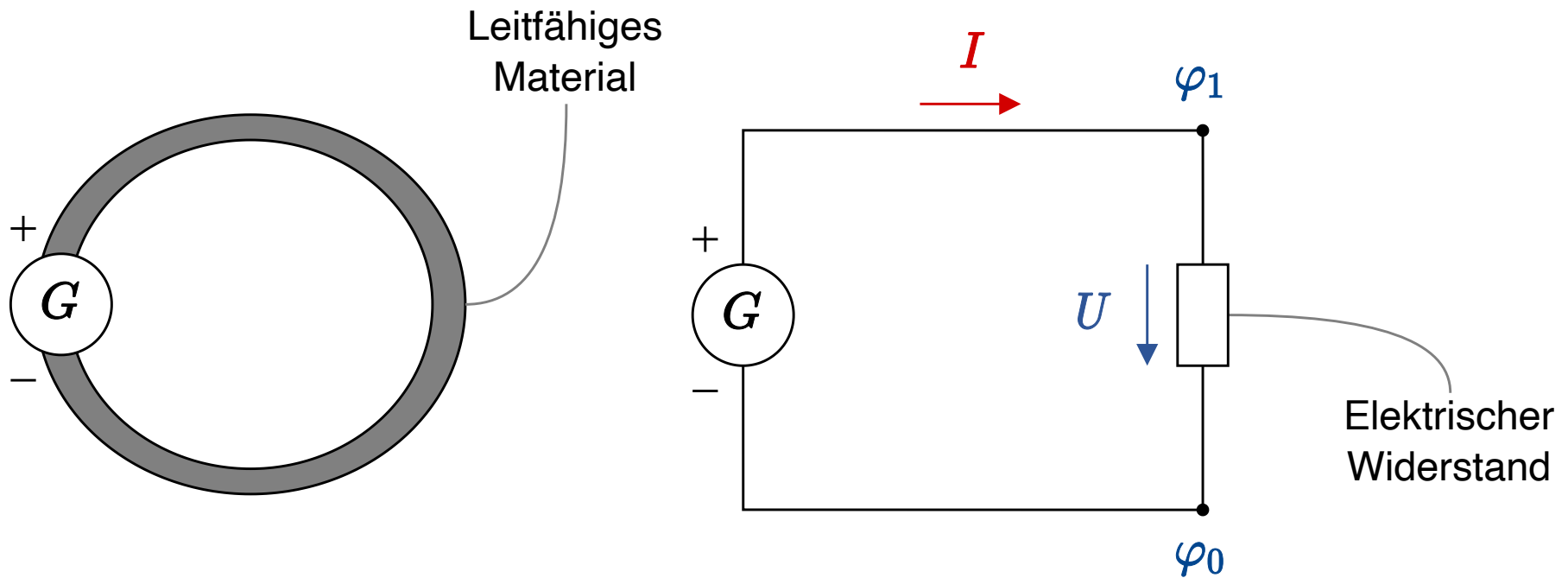
Ohm'sches Gesetz

Der Ohm'sche Widerstand

Elektrisches Feld an leitfähigem Material I

Anlegen eines elektrischen Feldes an ein leitfähiges Material durch externe Energiequelle G

- Elektrische Spannung durch Potentialdifferenz zwischen (+) und (-) Pol: $U = \varphi_1 - \varphi_0$
- Stromfluss I , durch Coloumb-Kraft auf freie Ladungsträger

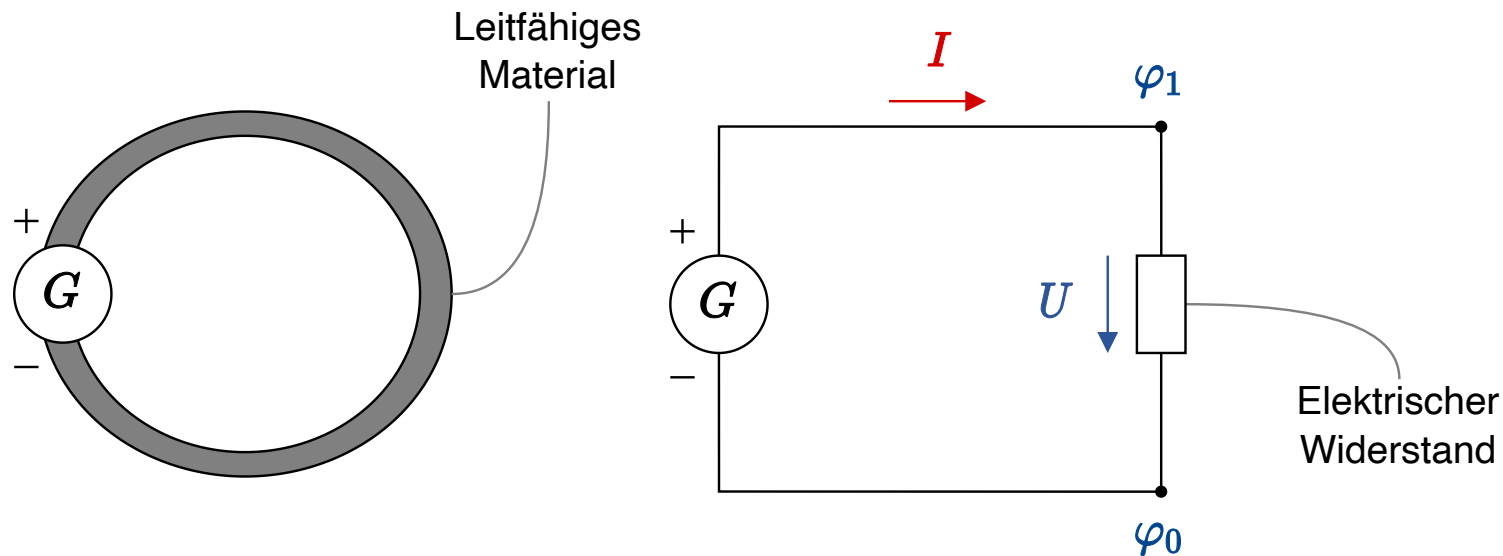


Elektrisches Feld an leitfähigem Material II

Voraussetzungen an die Anordnung:

- homogene Verteilung der Stromdichte (homogenes Strömungsfeld)
- lineares und richtungsunabhängiges Verhalten (isotropes) Leitermaterial

Welcher Zusammenhang gilt nun zwischen *Stromfluss I* und *Spannung U* ?

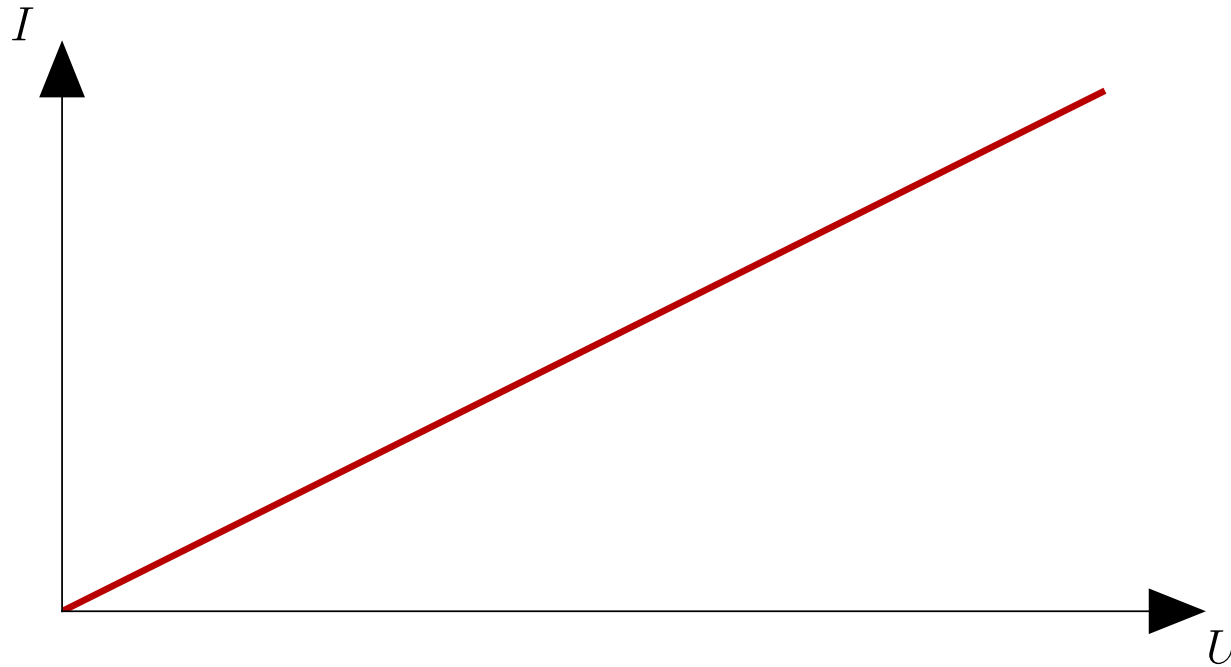


Zusammenhang zwischen Strom und Spannung

Durch Experiment lässt sich zeigen, dass Strom und Spannung zueinander proportional sind

$$I \sim U \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{U} = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \frac{U}{I} = \text{const.}$$

Somit existiert ein linearer Zusammenhang zwischen Strom und Spannung



Das Ohm'sche Gesetz I

Proportionalitätsfaktor zwischen Strom und Spannung

Elektrischer Leitwert

$$G = \frac{I}{U}$$

Einheit des elektrischen Leitwertes

$$[G] = \frac{[I]}{[U]} = \frac{\text{A}}{\text{V}} = \text{S} = \text{Siemens}$$

Elektrischer Widerstand

$$R = \frac{U}{I}$$

Einheit des elektrischen Widerstandes

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega = \text{Ohm}$$

Das Ohm'sche Gesetz II

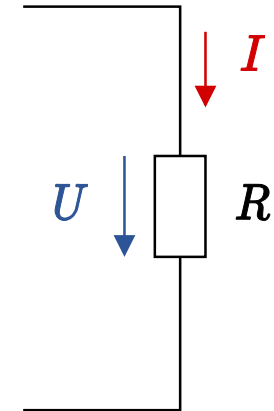
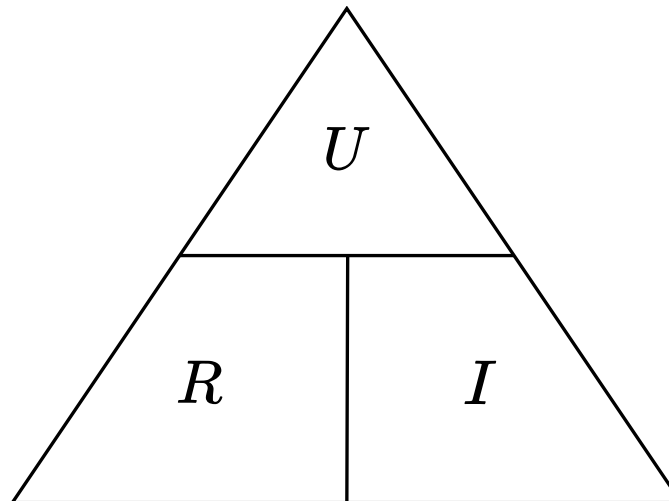
Leitwert entspricht Kehrwert de Ohm'schen Widerstandes

$$G = \frac{1}{R}$$

Drei *Varianten* des Ohm'schen Gesetzes

$$R = \frac{U}{I} \quad U = R \cdot I \quad I = \frac{U}{R}$$

Merkhilfe zur Berechnung der drei Varianten



Leistung und Energie am Ohm'schen Widerstand

Leistungsaufnahme am elektrischen Widerstand

$$P_R = U \cdot I \quad \text{mit} \quad I$$

Umformung mit Hilfe des Ohm'schen Gesetzes $I = U/R$

$$P_R = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$

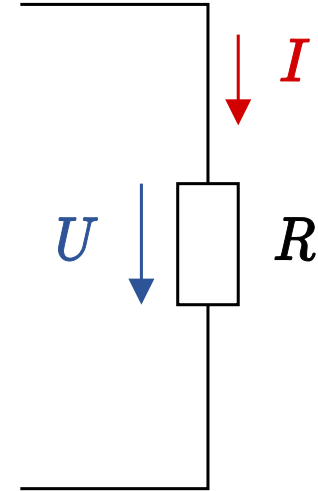
Quadratischer Zusammenhang zwischen Spannung bzw. Strom und Leistung

Elektrischer Widerstand: Umwandlung von elektrischer Leistung in Wärme

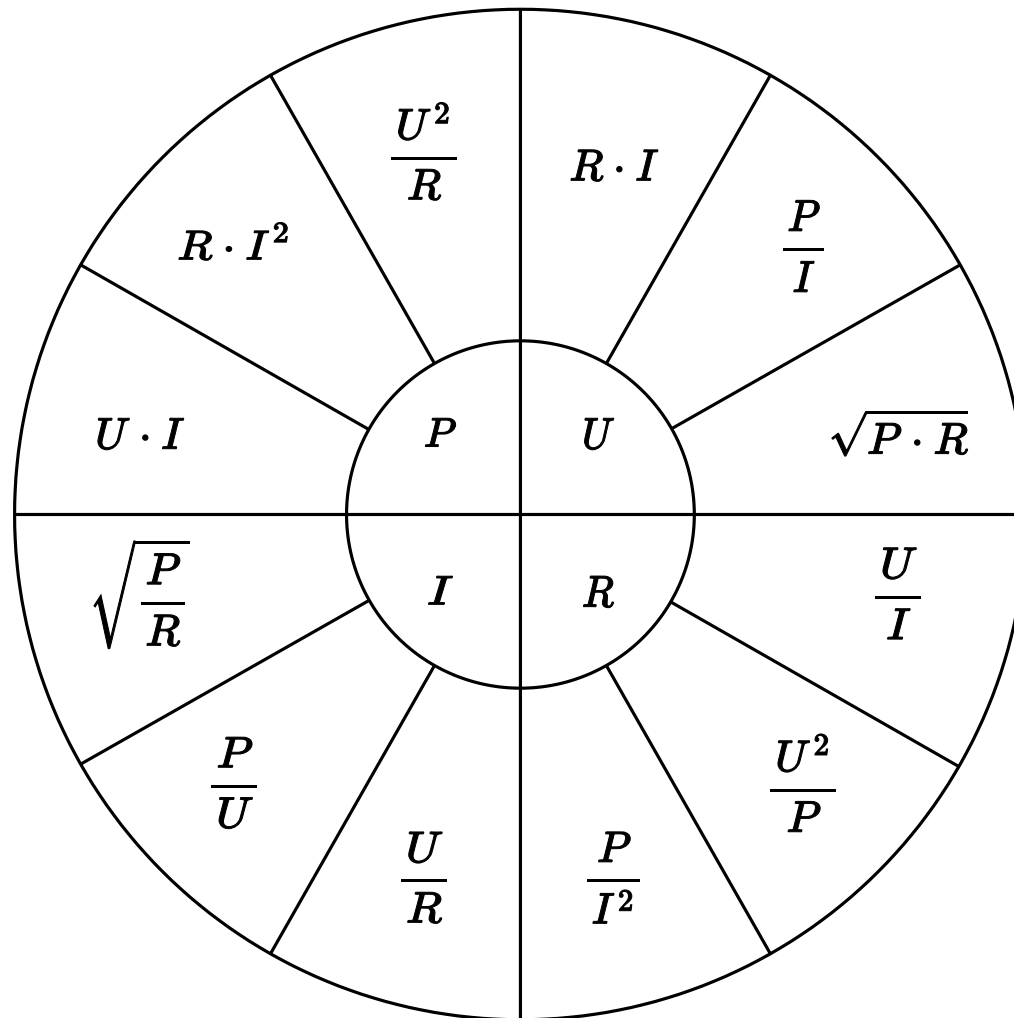
Effekt ist häufig unerwünscht und wird als Verlustleistung bezeichnet.

Umgesetzte Wärmeenergie im Zeitintervall Δt :

$$W = U \cdot I \cdot \Delta t = \frac{U^2}{R} \cdot \Delta t = I^2 \cdot R \cdot \Delta t$$



Das Ohm'sche Rad



Berechnung eines Ohm'schen Widerstandes I

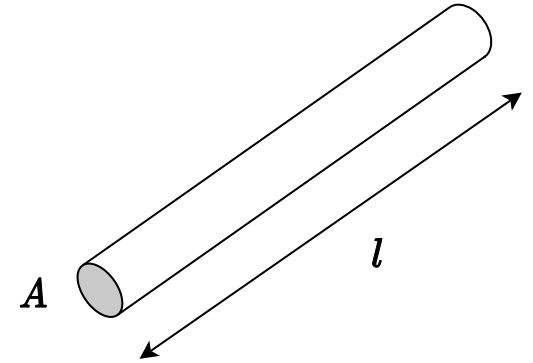
Gegeben ist ein leitfähiges Material der Länge l und Querschnitt A

Voraussetzungen:

- homogenes Strömungsfeld
- lineares und richtungsunabhängiges Verhalten (isotropes) Leitermaterial
- Länge l sehr viel größer als Querschnitt A ($l \gg \sqrt{A}$)

Durch Experiment lässt sich ermitteln:

- $R \sim l$
- $R \sim \frac{1}{A}$
- elektrischer Widerstand R ist abhängig vom verwendeten Leitermaterial



Berechnung eines Ohm'schen Widerstandes II

Damit ergibt sich für den elektrischen Widerstand

$$R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$$

Der Widerstand R beschreibt nun die elektrischen Eigenschaften des leitfähigen Gegenstandes nach

- Materialeigenschaft: *spezifischer Widerstand* ϱ
- Geometrie: Abmessungen Länge l und Querschnitt A

Einheit des spezifischen Widerstandes

$$[\varrho] = [R] \cdot \frac{[A]}{[l]} = \Omega \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{m}} = \Omega\text{m} \quad \text{häufig} \quad [\varrho] = \Omega\text{m} = \frac{\Omega \cdot (10^3\text{mm})^2}{\text{m}} = 10^6 \cdot \frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Oft wird anstelle des spezifischen Widerstands der *spezifische Leitwert* $\kappa = 1/\varrho$ verwendet

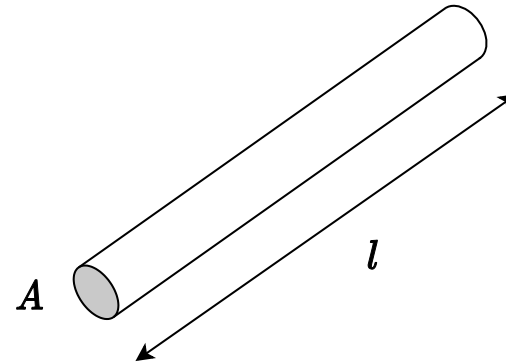
$$R = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{l}{A} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{1}{\varrho} \quad \text{und} \quad [\kappa] = \frac{\text{S}}{\text{m}} = 10^{-6} \cdot \frac{\text{Sm}}{\text{mm}^2}$$

Berechnung des Leitwertes

Analog zur Berechnung des elektrischen Widerstandes lässt sich auch der Leitwert aus

- Geometrie- und
- Materialeigenschaften berechnen

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho \cdot \frac{l}{A}} = \\ &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A}{l} = \\ &= \kappa \cdot \frac{A}{l} \end{aligned}$$



Temperaturabhängiger Widerstand

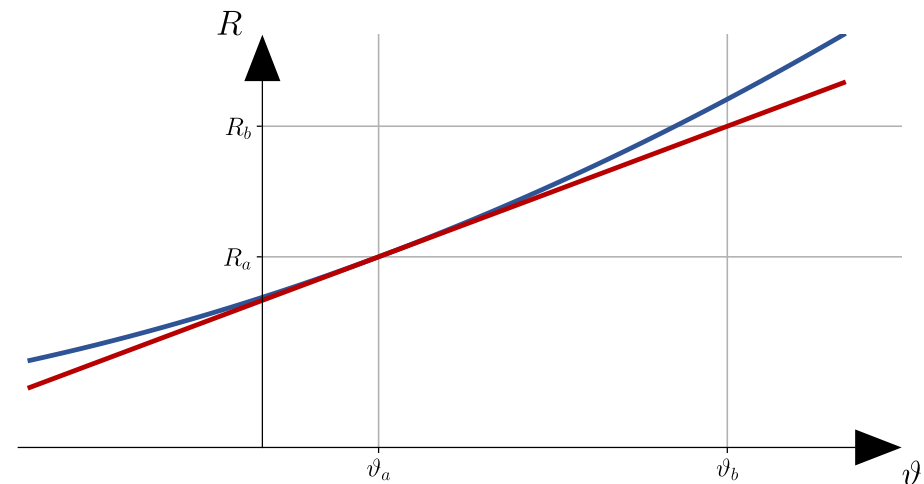
Temperaturabhängiges Verhalten elektrischer Leiter

Leitfähigkeit des Materials hängt von der Temperatur ϑ ab

- Kaltleiter
- Heißleiter
- temperaturkonstante Leiter
- Supraleiter (Sprungtemperatur bei Hochtemperatursupraleiter $\vartheta \approx -180^\circ\text{C}$)

Typisches Temperaturverhalten metallischer Leiter:

- grundsätzlich nicht-lineares Verhalten
- nahezu lineares Verhalten in einem Arbeitspunkt ϑ_a



Linearisierung im Arbeitspunkt

Berechnung der Steigung der Widerstandskurve im Arbeitspunkt

$$m = \frac{\Delta R}{\Delta \vartheta} = \frac{R_{\vartheta} - R_a}{\vartheta - \vartheta_a} \quad \text{mit} \quad [m] = \frac{\Omega}{\text{K}}$$

Normierung der Steigung auf den Widerstandswert R_a im Arbeitspunkt

$$\text{Temperaturkoeffizient } \alpha = \frac{m}{R_a} = \frac{1}{R_a} \cdot \frac{R_{\vartheta} - R_a}{\vartheta - \vartheta_a} \quad \text{mit} \quad [\alpha] = \frac{1}{\text{K}}$$

- Temperaturkoeffizient α ist Stoffkonstante (materialabhängig)
- Angabe einer Bezugstemperatur (Arbeitspunkt) z.B. α_{20} bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

Berechnung des Widerstandes bei einer beliebigen Temperatur ϑ

$$R(\vartheta) = R_{\vartheta} = R_a + R_a \cdot \alpha \cdot (\vartheta - \vartheta_a) = R_a \cdot (1 + \alpha \cdot (\vartheta - \vartheta_a))$$

Temperaturkennwert

Linearisierung der Widerstandskennlinie im Punkt $\vartheta = 0^\circ\text{C}$

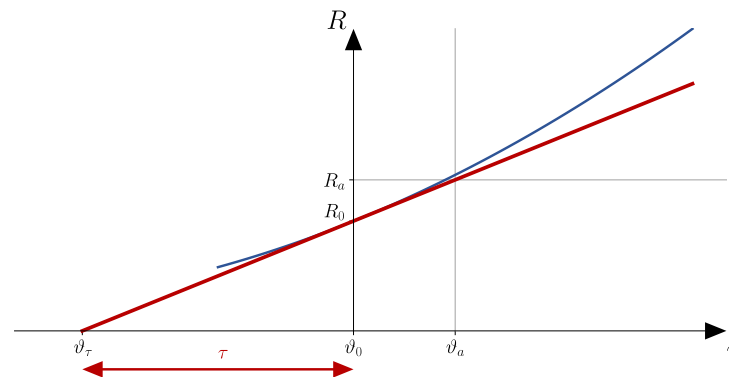
Damit berechnet sich der Widerstand für beliebige Temperaturen

$$R(\vartheta) = R_0 + m \cdot \vartheta \quad \text{mit} \quad \vartheta_\tau = -\frac{R_0}{m} = -\frac{1}{\alpha_0}$$

Damit lässt sich der *Temperaturkennwert* τ definieren

$$\tau = \frac{1}{\alpha_0} = |\vartheta_\tau| \quad \text{mit} \quad [\tau] = \text{K}$$

Beim Temperaturkennwert handelt es sich um eine Materialkonstante unabhängig von einem Arbeitspunkt



Zusammenhang zwischen Temperaturkoeffizient und Temperaturkennwert

Annahme: lineares Verhalten im Arbeitspunkt $\vartheta_0 = 0^\circ\text{C}$

$$\alpha_0 = \frac{m}{R_0} = \frac{1}{\tau} \quad \text{und} \quad \frac{m}{R(\vartheta)} = \alpha_{\vartheta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha_0}{\alpha_{\vartheta}} = \frac{R_0}{R(\vartheta)}$$

Folglich:

$$\alpha_{\vartheta} = \alpha_0 \cdot \frac{R_0}{R(\vartheta)} = \frac{\alpha_0 \cdot R_0}{R_0 \cdot (1 + \alpha_0 \cdot \vartheta)} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} + \vartheta} = \frac{1}{\vartheta + \tau}$$

Damit lässt sich die Temperatur ϑ_2 bestimmen, falls $R(\vartheta_2)$ sowie $R(\vartheta_1)$ bei bekanntem ϑ_1 gegeben:

$$\frac{R(\vartheta_2)}{R(\vartheta_1)} = \frac{\alpha_{\vartheta_1}}{\alpha_{\vartheta_2}} = \frac{\tau + \vartheta_2}{\tau + \vartheta_1}$$
$$\Rightarrow \quad \vartheta_2 = \frac{R(\vartheta_2)}{R(\vartheta_1)} \cdot (\tau + \vartheta_1) - \tau$$

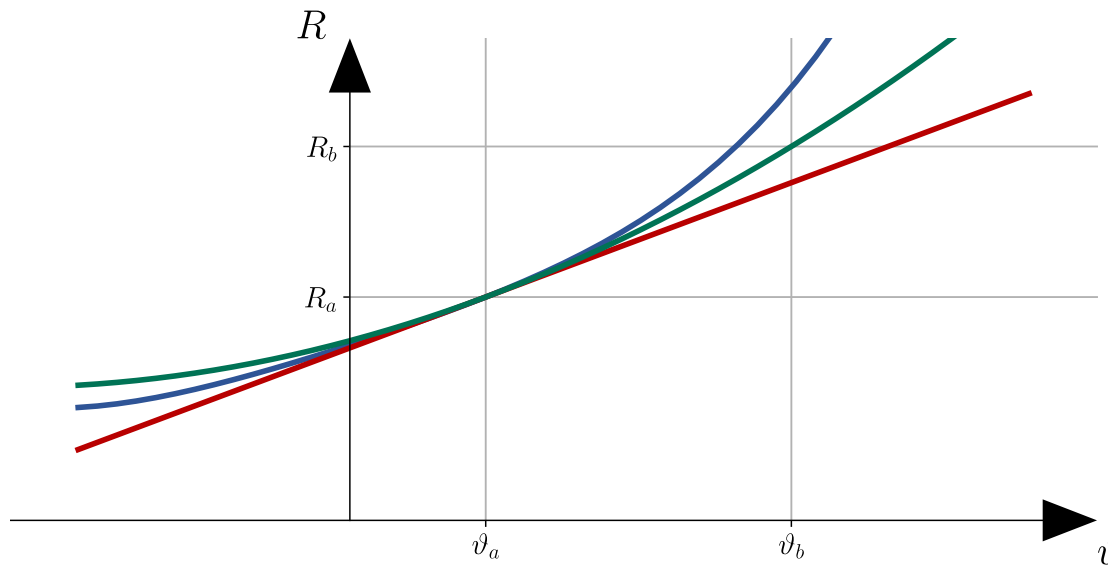
Quadratische Näherung der Widerstandskennlinie

Verbesserung der Näherung der Widerstandskennlinie durch quadratische Funktion (Polynom 2. Grades)

$$R(\vartheta) = R_a \cdot \left[1 + \alpha \cdot (\vartheta - \vartheta_a) + \beta \cdot (\vartheta - \vartheta_a)^2 \right]$$

Quadratischer Temperaturkoeffizient

$$\beta \quad \text{mit} \quad [\beta] = \frac{1}{\text{K}^2}$$



Werte für Temperaturkoeffizienten und spezifische Widerstände

Übersicht für Werte verschiedener Materialien nach [Scholz - *Grundlagen der Elektrotechnik*]:

Material	$\alpha_{20}/\frac{1}{\text{K}}$	$\beta_{20}/\frac{1}{\text{K}^2}$	$\rho/\frac{\text{m}\Omega\cdot\text{mm}^2}{\text{m}}$
Aluminium	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	28,7
Blei	$3,9 \cdot 10^{-3}$		208
Eisen	$4,6 \cdot 10^{-3}$		130
Gold	$4 \cdot 10^{-3}$	$0,6 \cdot 10^{-6}$	23
Konstantan	$0,005 \cdot 10^{-3}$		500
Kupfer	$4 \cdot 10^{-3}$	$0,6 \cdot 10^{-6}$	17,5
Silber	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$0,7 \cdot 10^{-6}$	16

Widerstand des menschlichen Körpers

Widerstand des Menschlichen Körpers

Abhängigkeit des Körperwiderstandes von

- Körperbau
- Hautbeschaffenheit

Hinzu kommen noch Faktoren wie

- Kleidung (z.B. Sicherheitsschuhe)
- Fussbodenbeschaffenheit

Wirkung von elektrischem Strom auf menschlichen Körper

- Strommarken an Eintritts- und Austrittsstelle
- Verbrennungen (z.B. durch Lichtbögen)
- Blendungen durch Lichtbögen
- Muskelkontraktion bzw. Muskelverkrampfung
- Blutdrucksteigerung
- Herzkammerflimmern
- Herzstillstand

Äußerer Einfluss häufig elektrische Spannung

Zusammenhang zum Strom mittels Körperwiderstand und Stromweg

Stromstärke und Einflusdauer

Schwellen für verschiedene Einflussfaktoren

- Wahrnehmbarkeitsschwelle
- Reaktionsschwelle (Minimalwert für unbeabsichtigte Muskelkontraktionen)
- Loslassschwelle
- Schwelle für Herzkammerflimmern

Auswirkung von Einwirkdauer: Bereits wenige Millisekunden reichen aus für erhebliche Auswirkungen

Stromstärke	Auswirkung
ab ca. 1 mA	Wahrnehmbarkeit mit Fingern
ab ca. 6 mA-9 mA	Muskelverkrampfungen (abhängig von physiologischen Eigenschaften)
ab ca. 20 mA	Verkrampfung der Atemmuskulatur
ab ca. 80 mA	Herzkammerflimmern möglich (bei Einwirkdauer > 1 ms)

Rechenbeispiel

Spannung einer gewöhnlichen Steckdose: $U = 230 \text{ V}$

Abhängigkeit der Auswirkung auch durch Stromweg durch Körper

Körperwiderstand Hand zu Hand: $R = 1 \text{ k}\Omega$

Stromfluss durch Körper: $I = \frac{U}{R} = 230 \text{ mA}$

Herzkammerflimmern oder Herzstillstand möglich!

5 Sicherheitsregeln

Beachten der *fünf Sicherheitsregeln* beim Arbeiten mit elektrischem Strom

1. Freischalten
2. Gegen Wiedereinschalten sichern
3. Spannungsfreiheit feststellen
4. Erden und Kurzschließen
5. Benachbarte unter Spannung stehende Teile abdecken oder abschränken

Referenzen

- [1] M. Albach, *Elektrotechnik*, Pearson Verlag.
- [2] G. Kiefer, H. Schmolke, *VDE 0100 und die Praxis*, VDE Verlag.
- [3] G. Hagmann, *Grundlagen der Elektrotechnik*, Aula Verlag.