Ladung, Spannung und Strom

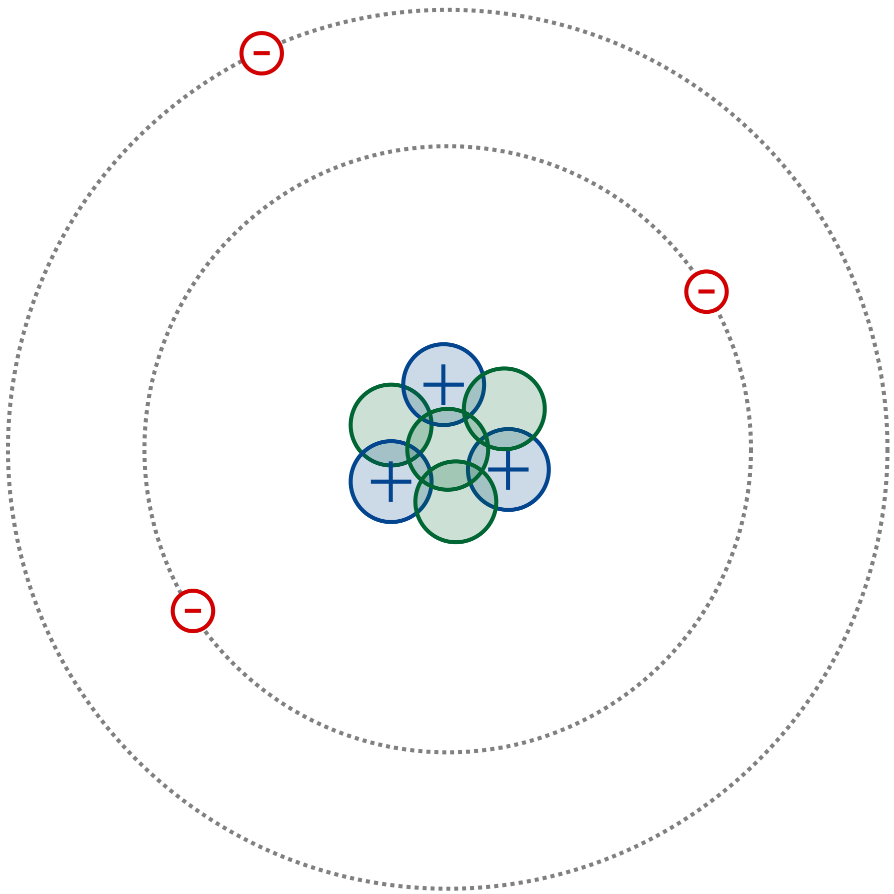
— Grundbegriffe der Elektrotechnik —

Ruhende Elektrische Ladung

Das Bohr'sche Atommodell

Aufbau von Atomen nach einem Modell von *Nils Bohr* am Beispiel von Lithium (Li)

- 3 Protonen
- 4 Neutronen
- 3 Elektronen



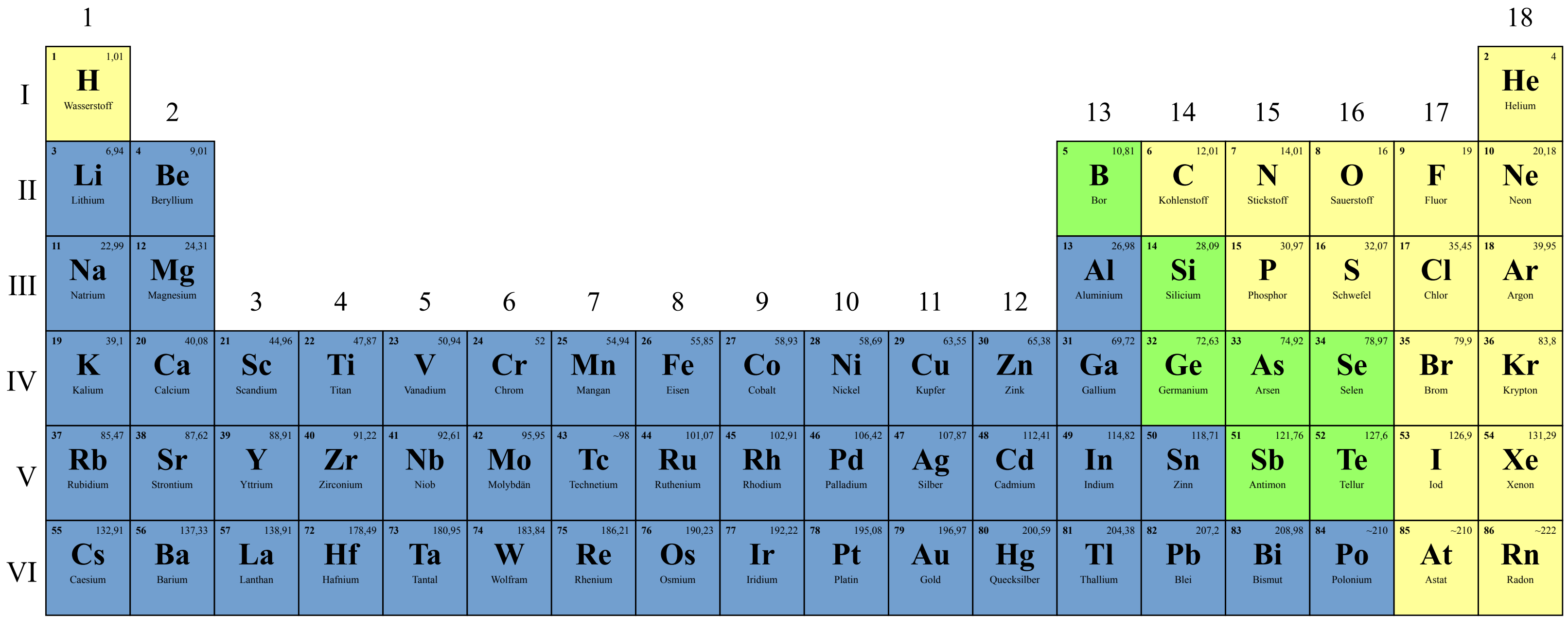
Elementarladung $\mathrm{e} = 1{,}60218 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

- Protonen sind positiv geladen mit $+\mathrm{e}$
- Elektronen sind negativ geladen mit $-\mathrm{e}$

Periodensystem der Elemente

Unterscheidung zwischen

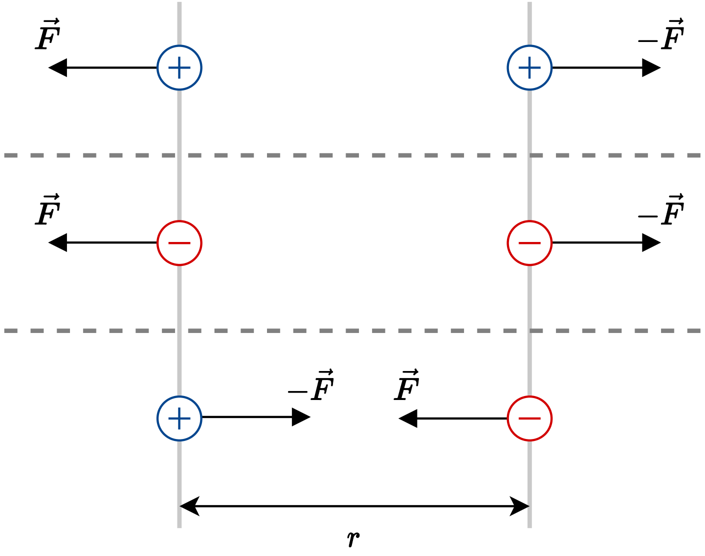
- Metallen (elektrischen Leitern)
- Halbmetallen
- Nicht-Metallen



Kraft zwischen zwei Punktladungen

Punktladung: Ladungsmenge Q auf einem Punkt im Raum konzentriert

Kraft zwischen zwei Punktladungen: *Coulomb-Kraft*



– Gleiche Ladungen stoßen sich ab

– Entgegengesetzte Ladungen ziehen sich an

$$F \sim \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Q_1, Q_2: Elektrische Ladungen der jeweiligen Ladungsträger

r: Abstand zwischen den beiden Ladungsträgern

Nach dem Newton'schen Prinzip *actio gegengleich reactio* ist die Kraft auf beide Punktladungen gleich.

Das Coulomb'sche Gesetz

Betrag der Kraft auf die beiden Ladungsträger

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

ε_0: Dielektrizitätskonstante mit $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$

Kraft ist üblicherweise eine vektorielle Größe

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \vec{\mathrm{e}}_r$$

$\vec{\mathrm{e}}_r$: Einheitsvektor in Richtung der Verbindungsstrecke der beiden Punktladungen Q_1 und Q_2

Das elektrische Feld

Ursache der Kraftwirkung auf Punktladung Q_1

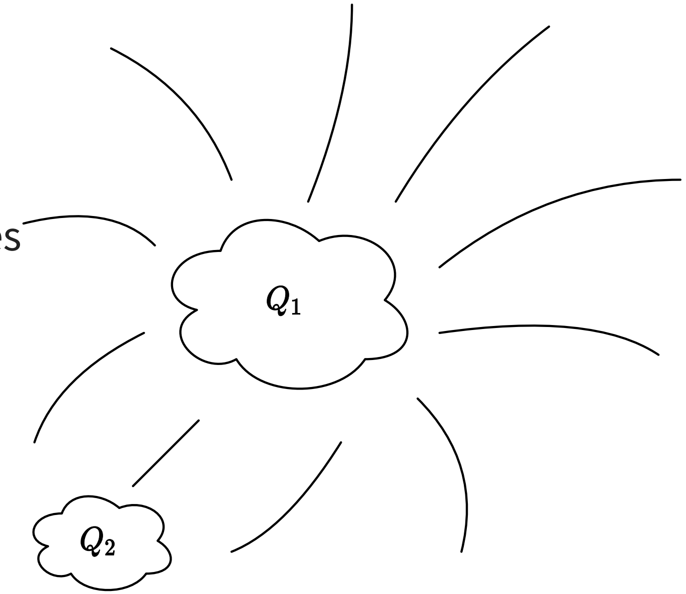
$$\vec{F}_1 = Q_1 \cdot \vec{E}_2$$

$\vec{E}_2$: Vektor der *elektrischen Feldstärke* verursacht von Q_2

Aus dem Coulomb'schen Gesetz folgt für das elektrische Feld der Ladung Q_2

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{r^2} \cdot \vec{\mathrm{e}}_r$$

Bedeutung des elektrischen Feldes



Feldbegriff in der Physik:

- Beschreibung des physikalischen Zustands eines Raumes
- Skalare oder vektorielle Beschreibung sämtlicher Punkte eines Raumes
- Beispiele: *Gravitationsfeld*, *Strömungsfeld*, *elektrisches Feld*, etc.

Elektrische Feld ist eine *ortsabhängige* und *gerichtete* Größe

Beschreibung mittels Vektoren in Abhängigkeit des Ortsvektors $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} E_x(r_x, r_y, r_z) \\ E_y(r_x, r_y, r_z) \\ E_z(r_x, r_y, r_z) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

Richtung zeigt von positiven Ladungsträgern zu negativen Ladungsträgern

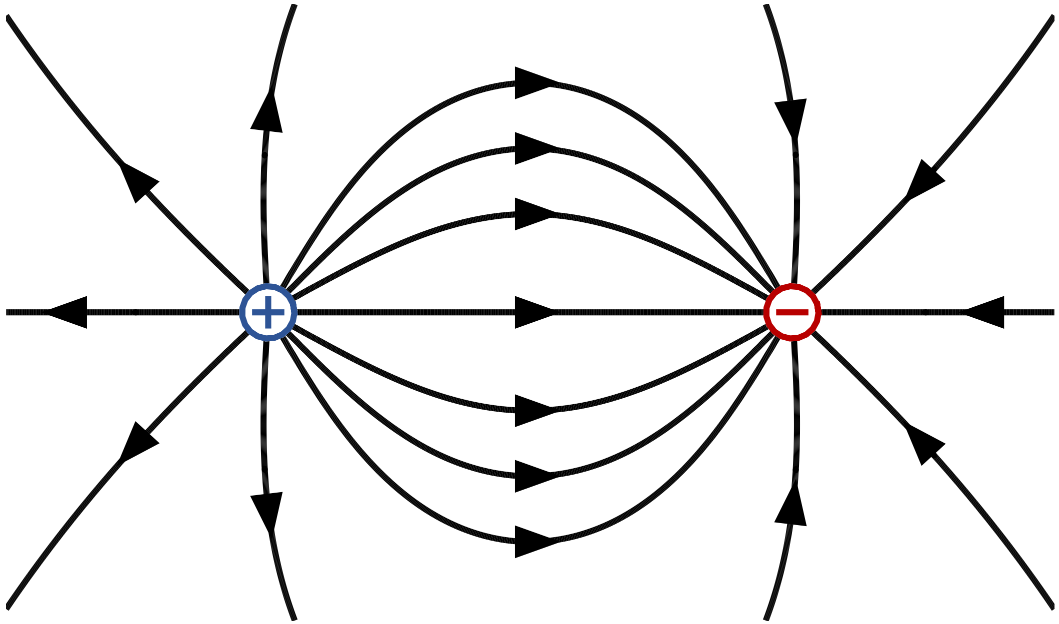
Feldliniendarstellung

Darstellung der Richtung entlang der Vektoren des elektrischen Feldes

Richtung von positiven Ladungsträgern zu negativen Ladungsträgern

Dichte der Feldlinien ist Indikator für Stärke des Feldes

Beispiel: Zwei Punktladungen

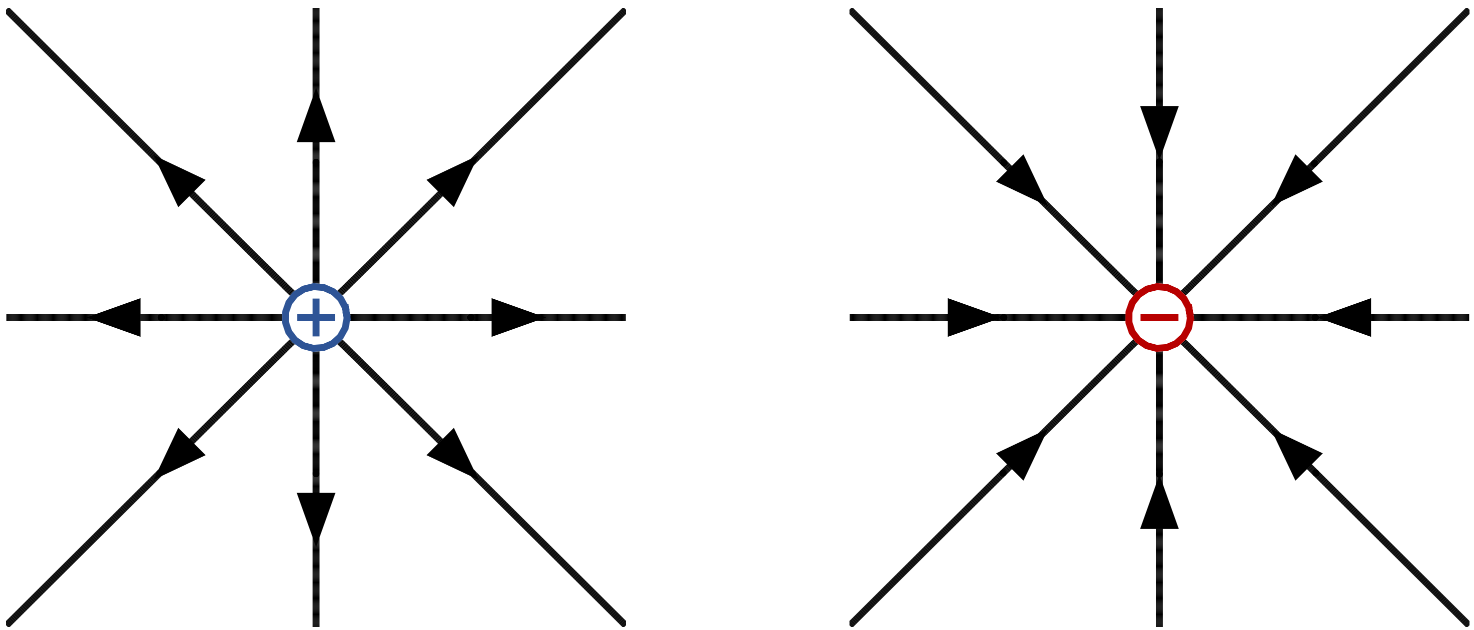


Elektrische Monopole

Elektrische Ladungen können einzeln auftreten (sog. *elektrische Monopole*)

Beispiel: Positive bzw. negative Punktladungen

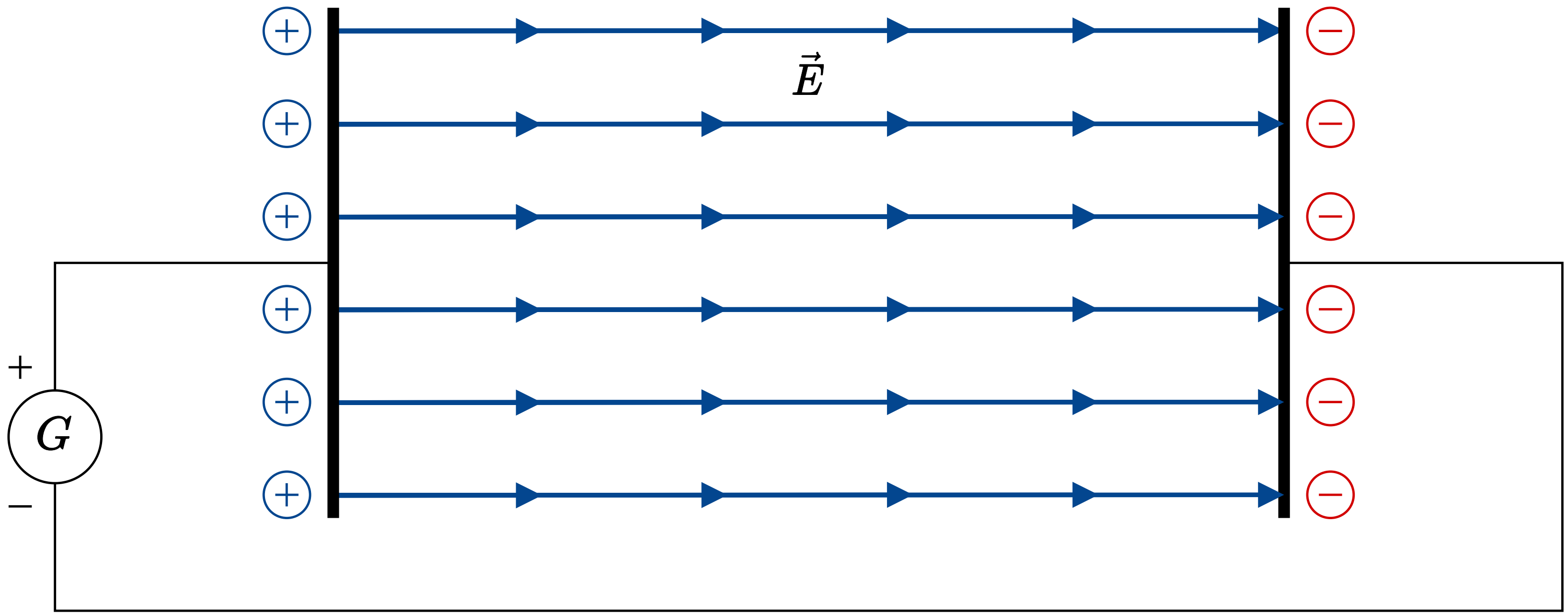
Feldlinien sind radial nach außen gerichtet



Elektrisches Feld beim Plattenkondensator

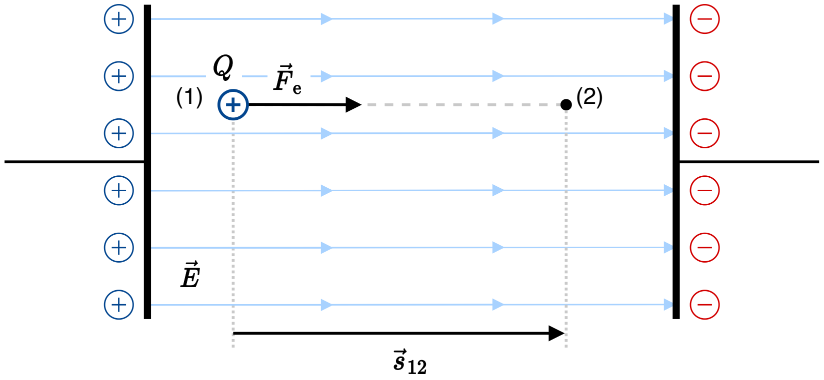
Geladener Plattenkondensator

- Trennung der Ladung durch externe Energiequelle (Generator G)
- Elektrisches Feld innerhalb der Kondensatorplatten
- Ideale Annahme: kein Feld außerhalb des Kondensators



Die elektrische Spannung I

Geladener Plattenkondensator mit positiver Punktladung zwischen den beiden Platten



Mechanische Arbeit durch Bewegung der Punktladung von Ausgangspunkt (1) nach Punkt (2)

$$W_{12} = \vec{F}_\mathrm{e} \cdot \vec{s}_{12} = Q \cdot \vec{E} \cdot \vec{s}_{12}$$

Normierung der mechanischen Arbeit auf Ladungsmenge Q

$$\frac{W_{12}}{Q} = \vec{E} \cdot \vec{s}_{12} = U_{12}$$

U_{12}: Elektrische Spannung zwischen den Punkten (1) und (2)

Die elektrische Spannung II

Einheit der elektrischen Spannung

$$[U] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{As}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^3} = \mathrm{V} = \mathrm{Volt}$$

Somit ist die Einheit des elektrischen Feldes

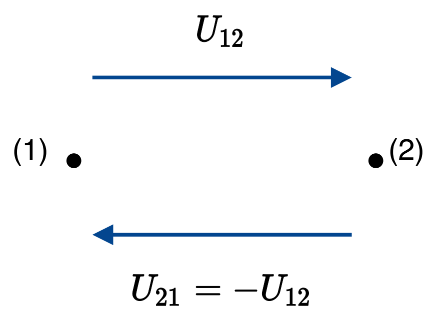
$$[\vec{E}] = \frac{[U]}{[s]} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Das elektrische Potential I

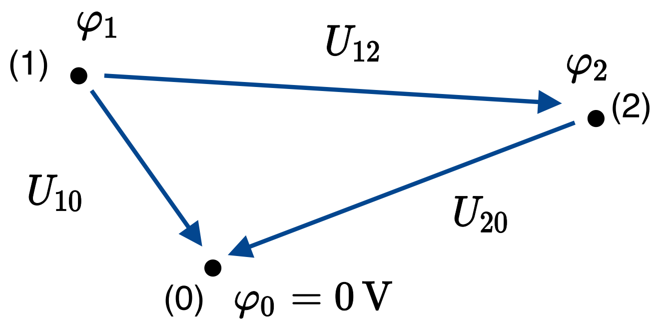
Eigenschaften der elektrischen Spannung

– Spannung wird zwischen *zwei* Punkten betrachtet

– Spannung ist eine *gerichtete* Größe, d.h. $U_{12} = -U_{21}$



Elektrisches Potential φ: Spannung zu einem Bezugspotential $\varphi_0 = 0\,\mathrm{V}$



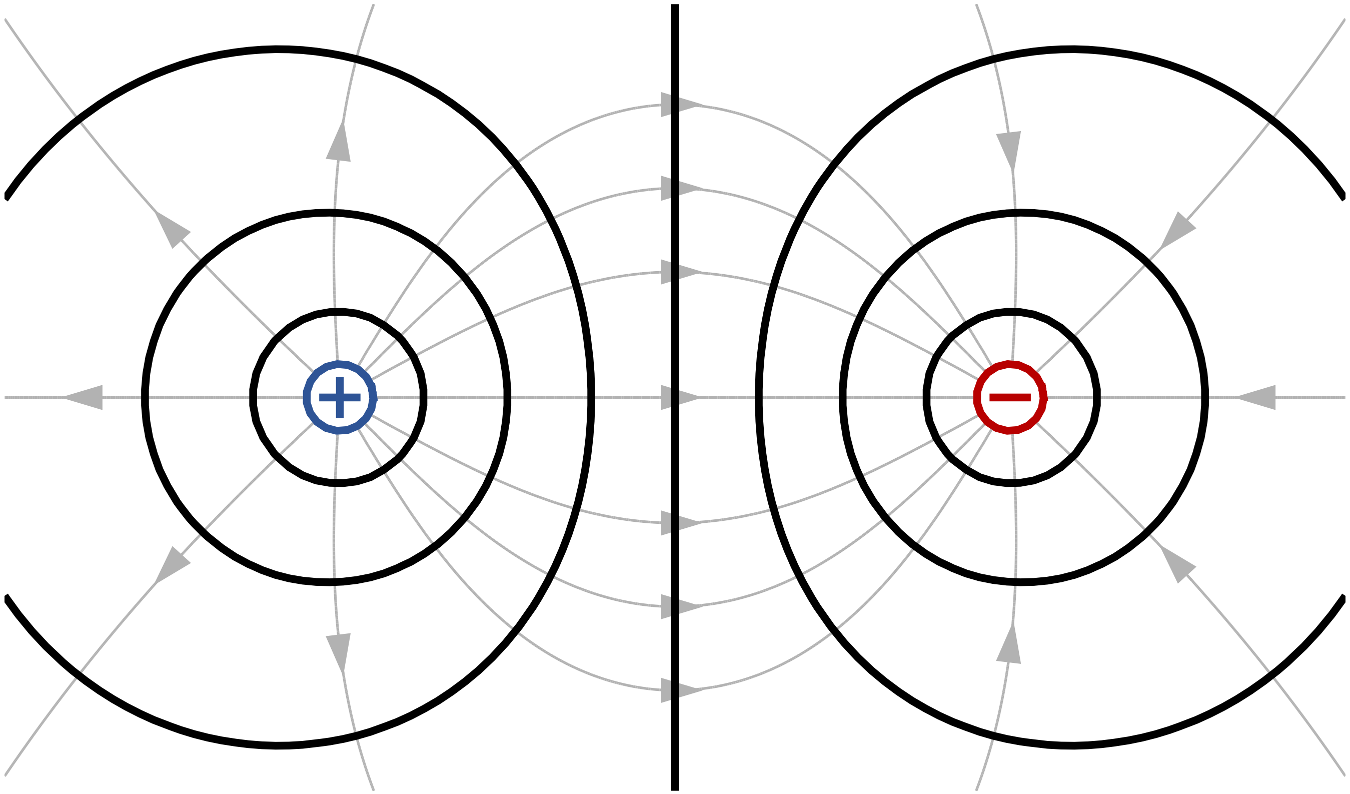
Damit beschreibt eine Spannung eine Potentialdifferenz

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Das elektrische Potential II

Potential ist *raumabhängige* aber *skalare* Größe

Darstellung des Potentials über Äquipotentiallinien (bzw. -flächen)

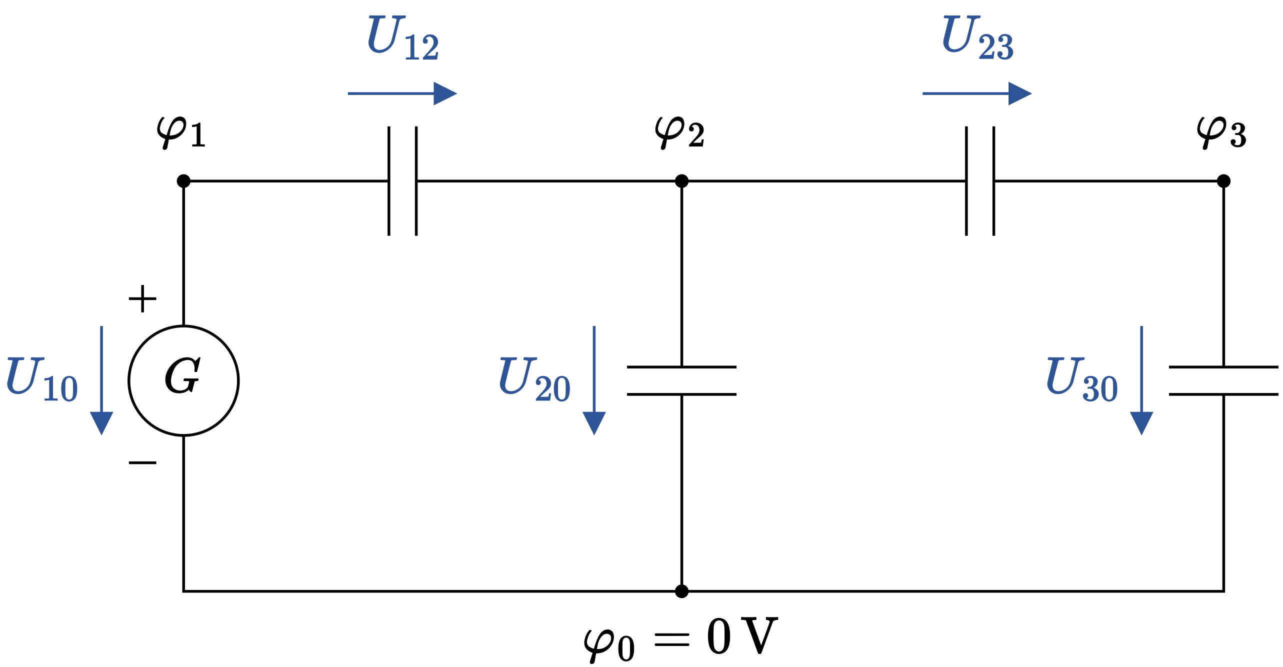


Potentiale in einem elektrischen Netzwerk

Beispiel: Potentiale in einem elektrischen Widerstandsnetzwerk

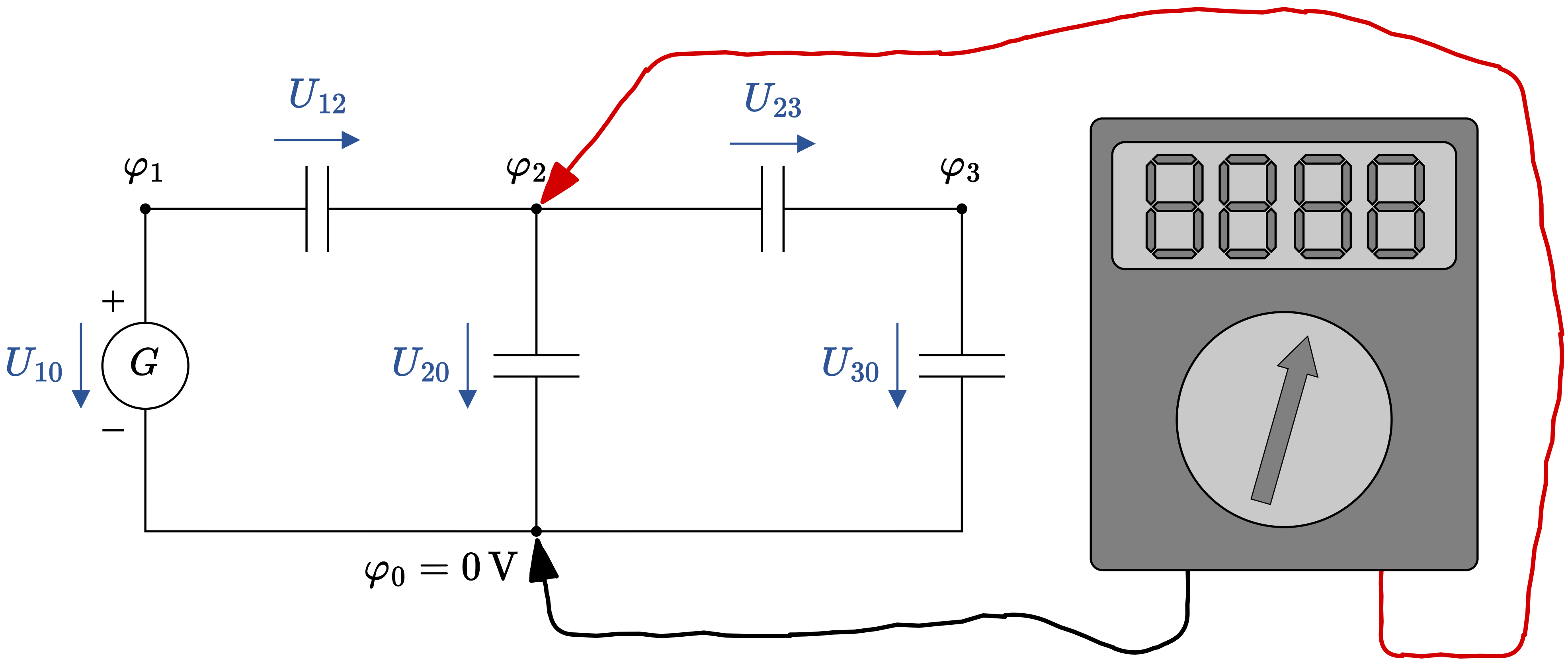
Knoten der Netzwerkelemente besitzen jeweils ein Potential φ

Alle Knoten, die durch idealen Leiter (durchgezogene Linie) verbunden sind haben gleiches Potential



Spannungsmessung

Spannungsmessung erfolgt immer zwischen zwei Punkten



Bewegte Elektrische Ladungen

Bewegte elektrische Ladung

Ladungsmenge Q bewegt sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch den Raum

Spezialfall: Bewegung der Ladung entlang einer Line

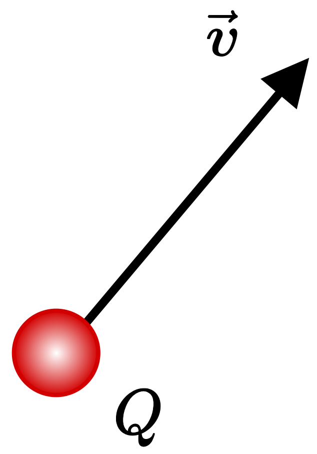
Elektrischer Strom I:

$$I = \frac{Q}{t}$$

Einheit des elektrischen Stromes

$$[I] = \frac{[Q]}{[t]} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{s}} = \mathrm{A}$$

Welcher Zusammenhang existiert zwischen Geschwindigkeit $\vec{v}$ und Strom I?



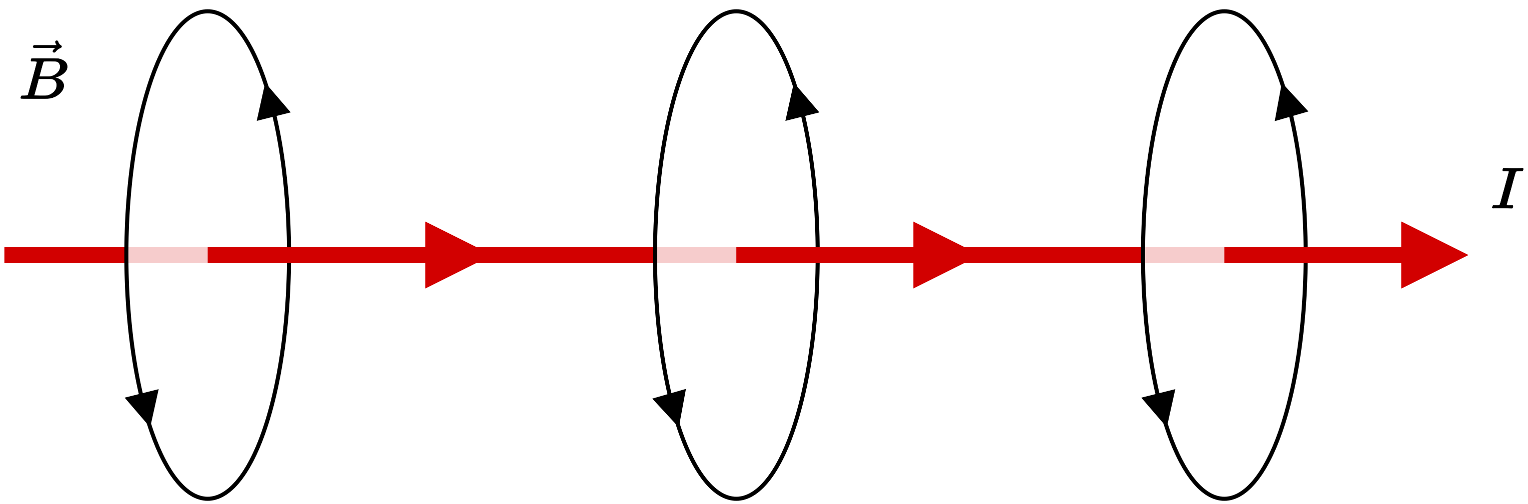
Bewegte elektrische Ladung - Erzeugung eines Magnetfeldes

Bewegte elektrische Ladungen erzeugen im Umfeld ein Magnetfeld

Beschreibung des Magnetfeldes wird beschrieben mittels Vektoren

- magnetischen Feldstärke $\vec{H}$
- magnetischen Flussdichte $\vec{B}$

Vektoren der magnetischen Feldstärke bzw. Flussdichte stehen senkrecht zur Richtung des Stromes I



Kraft auf bewegte Ladungen

Auf eine bewegte Ladung Q in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ wirkt ebenfalls die Coulomb-Kraft

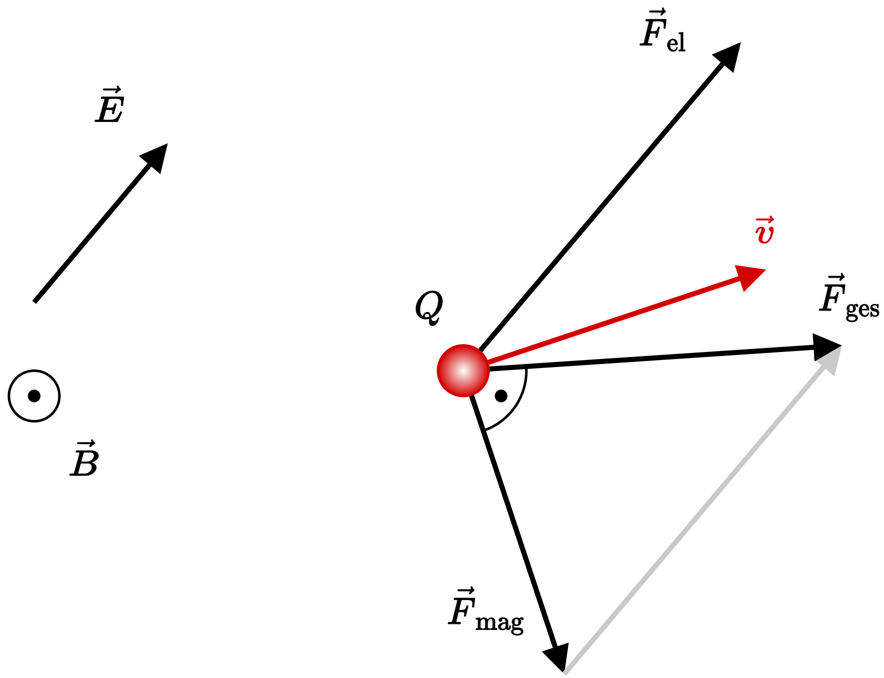
$$\vec{F}_{\mathrm{el}} = Q \cdot \vec{E}$$

Auf eine bewegte Ladung Q (Geschwindigkeit $\vec{v}$) in einem Magnetfeld (Flussdichte $\vec{B}$) wirkt die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_{\mathrm{mag}} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Somit wirkt auf die Ladung eine Gesamtkraft von

$$\vec{F}_{\mathrm{ges}} = \vec{F}_{\mathrm{el}} + \vec{F}_{\mathrm{mag}} = Q \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$



Eigenschaften von Leitern und Nicht-Leitern

Bewegung von Ladungsträgern in Stoffen

Unterscheidung zwischen *Leitern* und *Nicht-Leitern (Isolatoren)*

Beschreibung der stofflichen Eigenschaften über

- spezifische Leitfähigkeit κ
- spezifischen elektrischen Widerstand $\varrho = \frac{1}{\kappa}$

Spezifische Leitfähigkeit wird bestimmt durch

- Zahl der Laduntsträger in dem jeweiligen Stoff
- Beweglichkeit der Ladungsträger
- Art der freien Ladungsträger

Beispiele für Leiter und Nicht-Leiter

Leiter

- Metalle (Elektronenleitung)
- Ionenleiter

Nicht-Leiter (Isolatoren)

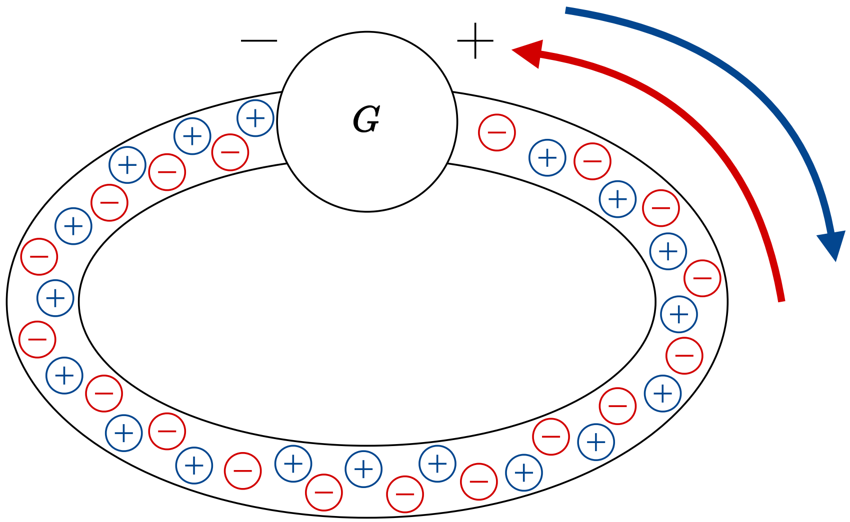
- Gase
- Gummi
- Keramik

Halbleiter (Halbmetalle)

- Silizium
- Germanium

Bewegung von Ladungsträgern in einem Leiter

Bewegung von positiven und negativen Ladungsträgern verursacht durch externe Energiequelle



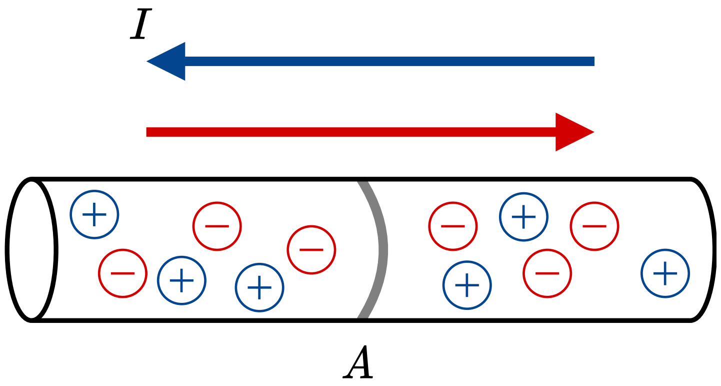
Üblicherweise wird die Bewegung von Ladungsträgern in Metallen betrachtet

- Nur die negativen Ladungsträger (Elektronen) sind beweglich
- Positive Ladungsträger entsprechen der "Abwesenheit" von Elektronen (auch als Löcher bezeichnet)
- Positive Ladungsträger bewegen sich somit entgegengesetzt zu negativen Ladungsträgern

Der elektrische Strom

Stromstärke I beschreibt Bewegung der postiven Ladungsträger

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad [I] = \mathrm{A}$$



Allgemeine Berechnung der Stromstärke

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t) = \dot{Q}(t)$$

Durch Stromfluss $i(t)$ transportierte Ladungsmenge

$$Q(t) = \int_{t_0}^{t} i(\tau)\, \mathrm{d}\tau + Q(t_0)$$

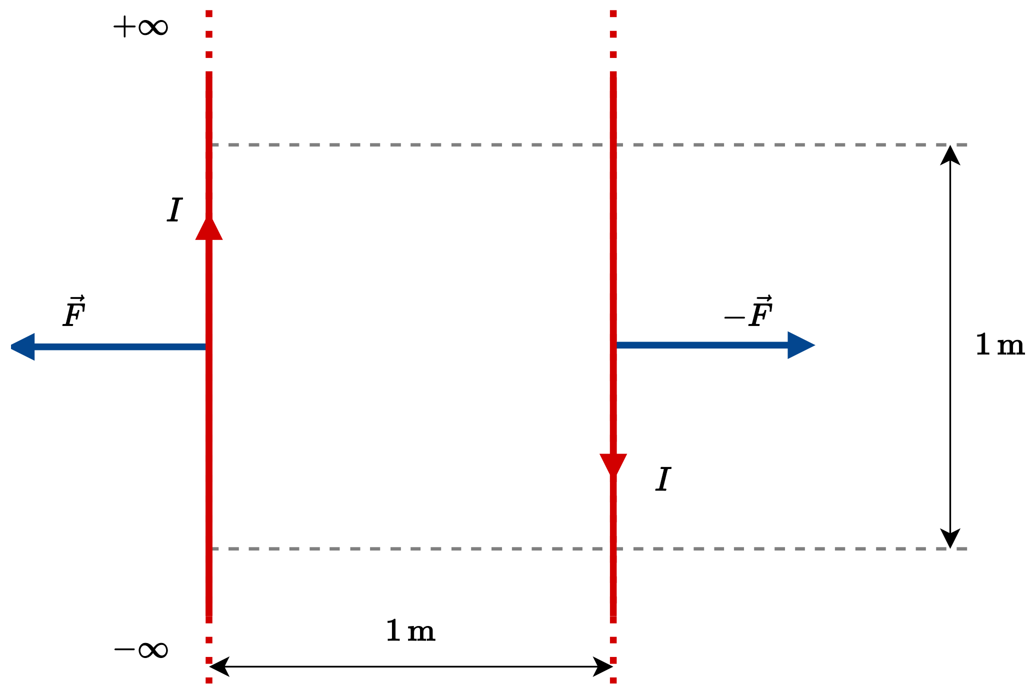
Definition der Stromstärke

Theoretische Versuchsanordnung

- Zwei unendlich Lange Leiter mit Abstand $1\,\mathrm{m}$
- Stromfluss I durch beide Leiter
- Stromfluss verursacht Magnetfeldes
- Lorentzkraft $\frac{F}{\mathrm{m}}$ pro $1\,\mathrm{m}$ Leitungslänge.

Definition der Stromstärke I:

- Lorentzkraft genau $|\vec{F}| = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/m}$.
- Stromfluss beträgt genau $I = 1\,\mathrm{A}$

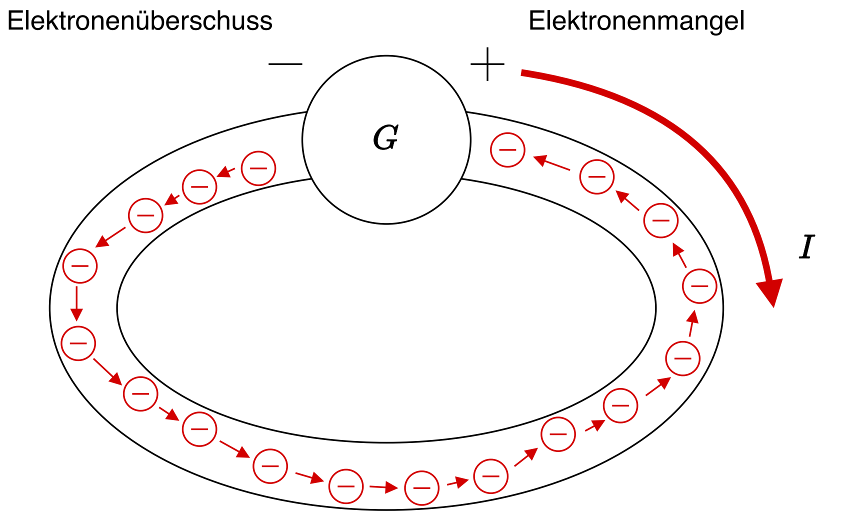


Stromrichtung

In Metallen sind Elektronen (negative Ladungsträger) für Stromfluss verantwortlich

Technische Stromrichtung: Beschreibung der Bewegung der positiven Ladungsträger

- Außerhalb der Energiequelle von (+) nach (-)
- Innerhalb der Energiequelle von (-) nach (+)
- Elektronen bewegen sich entgegen der technischen Stromrichtung

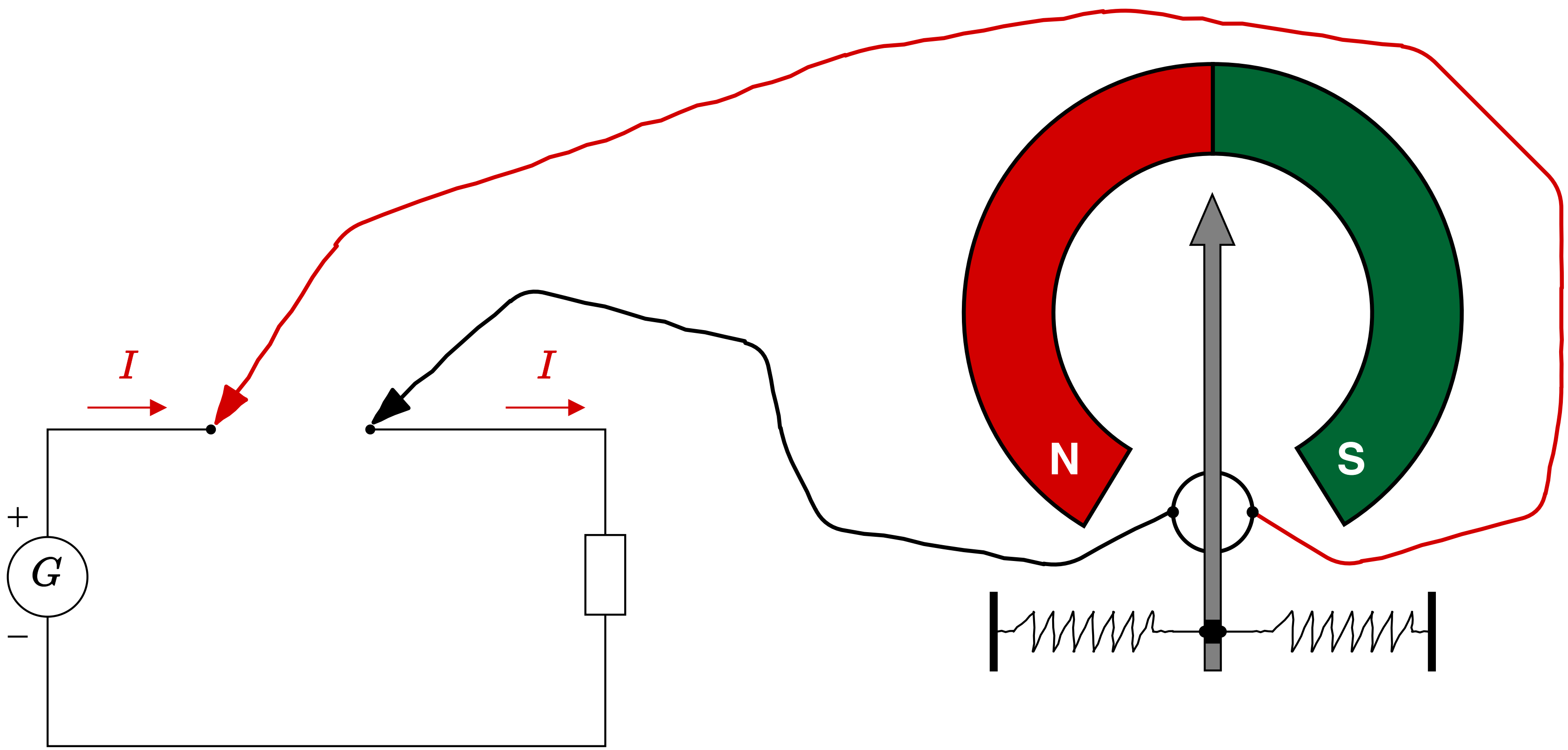


Elektrische Strom ist eine gerichtete Größe und muss durch einen Zählpfeil definiert werden!

Strommessung

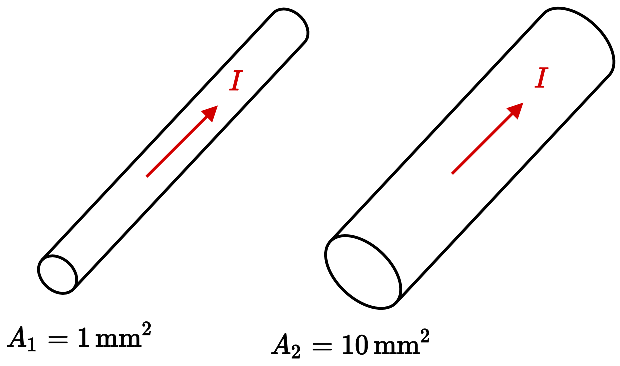
Klassische Strommessung über Drehspuleninstrument (Messung von Gleichstrom)

Messgerät wird in Stromzweig geschaltet



Stromdichte

Betrachtung von zwei Leitern mit unterschiedlichem Querschnitten bei gleichem Stromfluss $I = 10\,\mathrm{A}$



Definition der Stromdichte

$$J = \frac{I}{A} \qquad [J] = \frac{[I]}{[A]} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2} \quad \text{häufig} \quad [J] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2} = \frac{\mathrm{A}}{(10^{-3}\,\mathrm{m})^2} = \frac{\mathrm{A}}{10^{-6}\,\mathrm{m}^2} = 10^6\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

Allgemein ist die Stromdichte eine vektorielle Größe

$$I = \vec{J} \cdot \vec{A}$$

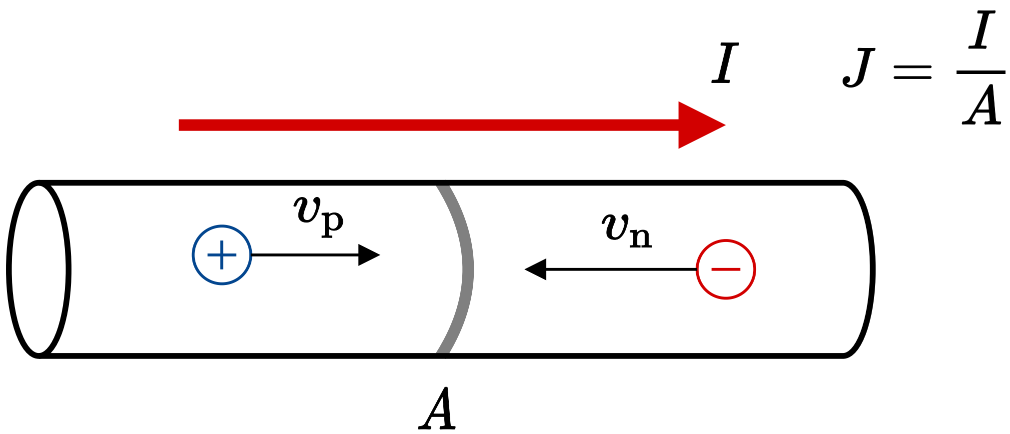
$\vec{A}$: Flächennormalenvektor der Querschnittsfläche

Ladungsträgergeschwindigkeit I

Welcher Zusammenhang existiert zwischen der Ladungsträgergeschwindigkeit v und Strom I?

Ladungsträger bewegen sich durch ein leitfähiges Material mit Querschnitt:

Positive Ladugsträger bewegen sich in entgegengesetzte Richtung wie negative Ladungsträger.



Menge der bewegten Ladungsträger durch Querschnitt A:

$$\Delta Q = \Delta Q_p - \Delta Q_n \quad \text{mit} \quad \Delta Q_p > 0 \quad \Delta Q_n < 0$$

Ladungsträgergeschwindigkeit II

Definition der *Raumladungsdichte*

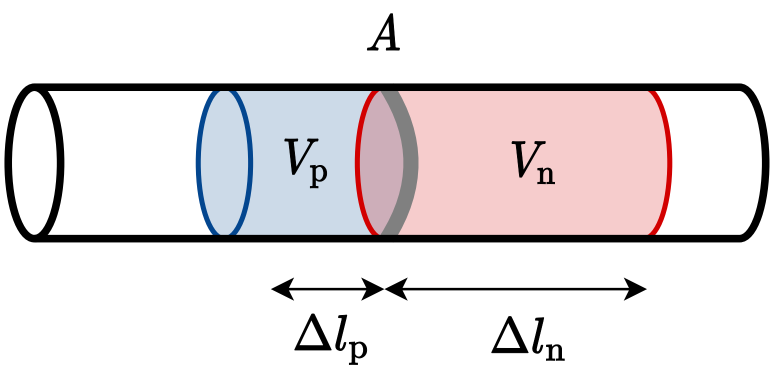
$$\rho = \frac{\text{Ladungsmenge}}{\mathrm{Volumen}} = \frac{Q}{V} \qquad \Rightarrow \qquad Q = \rho \cdot V$$

Aus der Raumladungsdichte ergibt sich eine *Ladungsträgerdichte* (mit Elementarladung e)

$$\rho = \mathrm{e} \cdot n \qquad [n] = \frac{[\rho]}{[\mathrm{e}]} = \frac{C/\mathrm{m}^3}{C} = \frac{1}{\mathrm{m}^3}$$

Damit ergibt sich für die Menge der bewegten Ladungsträger

$$\Delta Q = \rho_\mathrm{p} \cdot \Delta V_\mathrm{p} - \rho_\mathrm{n} \cdot \Delta V_\mathrm{n} = \rho_\mathrm{p} \cdot A \cdot \Delta l_\mathrm{p} - \rho_\mathrm{n} \cdot A \cdot \Delta l_\mathrm{n} =$$
$$= \mathrm{e} \cdot n_\mathrm{p} \cdot \Delta V_\mathrm{p} - (-\mathrm{e}) \cdot n_\mathrm{n} \cdot \Delta V_\mathrm{n} =$$
$$= \mathrm{e} \cdot n_\mathrm{p} \cdot A \cdot \Delta l_\mathrm{p} + \mathrm{e} \cdot n_\mathrm{n} \cdot A \cdot \Delta l_\mathrm{n}$$



Ladungsträgergeschwindigkeit III

Somit resultiert für den Strom I

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = e \cdot n_\mathrm{p} \cdot A \cdot \underbrace{\frac{\Delta l_\mathrm{p}}{\Delta t}}_{v_\mathrm{p}} + \mathrm{e} \cdot n_\mathrm{n} \cdot A \cdot \underbrace{\frac{\Delta l_\mathrm{n}}{\Delta t}}_{v_\mathrm{n}} = \mathrm{e} \cdot n_\mathrm{p} \cdot A \cdot v_\mathrm{p} + \mathrm{e} \cdot n_\mathrm{n} \cdot A \cdot v_\mathrm{n}$$

Die Ladungsträgergeschwindigkeit v_p bzw. v_n wird auch als *Driftgeschwindigkeit* bezeichnet.

Berechnung der Stromdichte

$$J = \frac{I}{A} = \frac{\mathrm{e} \cdot n_\mathrm{p} \cdot A \cdot v_\mathrm{p} + \mathrm{e} \cdot n_\mathrm{n} \cdot A \cdot v_\mathrm{n}}{A} = \underbrace{\mathrm{e} \cdot n_\mathrm{p} \cdot v_\mathrm{p}}_{J_\mathrm{p}} + \underbrace{\mathrm{e} \cdot n_\mathrm{n} \cdot v_\mathrm{n}}_{J_\mathrm{n}}$$

Damit ergibt sich für die Driftgeschwindigkeit der positiven bzw. negativen Ladungsträger

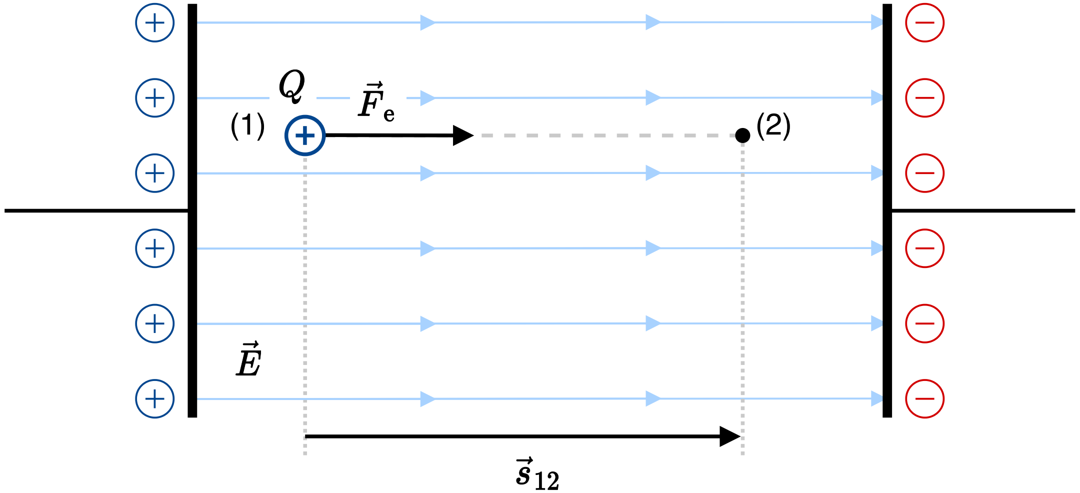
$$v_\mathrm{p} = \frac{J_\mathrm{p}}{\mathrm{e} \cdot n_\mathrm{p}} = \frac{J_\mathrm{p}}{\rho_\mathrm{p}} \quad \text{bzw.} \quad v_\mathrm{n} = \frac{J_\mathrm{n}}{\mathrm{e} \cdot n_\mathrm{n}} = -\frac{J_\mathrm{n}}{\rho_\mathrm{n}}$$

In Metallen bewegen sich nur negative Ladungsträger (Elektronen) und positive Ladungsträger sind fest: $v_\mathrm{p} = 0$

Elektrische Energie und Leistung

Bewegung einer Ladung im elektrischen Feld

Welche mechanische Arbeit muss verrichtet werden, um Ladung Q von (1) nach (2) zu bewegen?



Nach Energieerhaltungssatz muss die mechanische aus dem elektrischen Feld zur Verfügung gestellt werden

$$W_\mathrm{mechanisch} = \vec{F} \cdot \vec{s} \overset{!}{=} W_\mathrm{elektrisch}$$

Annahme: Vektor $\vec{s}$ der Bewegungsrichtung und Kraft $\vec{F}$ sind zueinander parallel

$$W_\mathrm{el} = F \cdot s$$

Elektrische Energie und elektrische Leistung

Nach dem Coulomb'schen Gesetz gilt

$$W_{\text{el}} = Q \cdot E \cdot s = Q \cdot U = I \cdot \Delta t \cdot U = U \cdot I \cdot \Delta t$$

Somit entspricht die elektrische Arbeit dem Produkt aus Strom, Spannung und verstrichener Zeit

Daraus lässt sich die elektrische Leistung definieren

$$P_{\text{el}} = \frac{W_{\text{el}}}{\Delta t} = \frac{U \cdot I \cdot \Delta t}{\Delta t} = U \cdot I$$

Einheit der elektrischen Leistung

$$[P_{\text{el}}] = [U] \cdot [I] = \mathrm{V} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{W}$$

Einheit der elektrischen Arbeit

$$[W_{\text{el}}] = [U] \cdot [I] \cdot [t] = \mathrm{V} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{Ws} = \mathrm{Nm} \quad \text{häufig} \quad [W_{\text{el}}] = \mathrm{kWh} = 1000\,\mathrm{W} \cdot 60 \cdot 60\,\mathrm{s} = 3{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{Ws}$$

Leistung und Energie bei zeitveränderlichen Größen

Bisherige Definition von Energie und Leistung basiert auf Gleichströmen und -spannungen

Im Allgemeinen können Spannung und Strom zeitveränderliche Größen sein

$$u(t) \qquad i(t)$$

In diesem Fall berechnet sich die (zeitveränderliche) Energie

$$W(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau) \cdot i(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Bei zeitveränderlichen Größen kann eine sogenannte *Momentanleistung* definiert werden

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}$$

Elektrisches und Magnetisches Feld

Feldbegriff in der Physik

Beschreibung der räumlichen Verteilung einer physikalischen Größe

Physikalische Größe kann gerichtet (Vektor) oder ungerichtet (Skalar) sein

Nachweis durch Wirkung im Raum (z.B. durch Kraft)

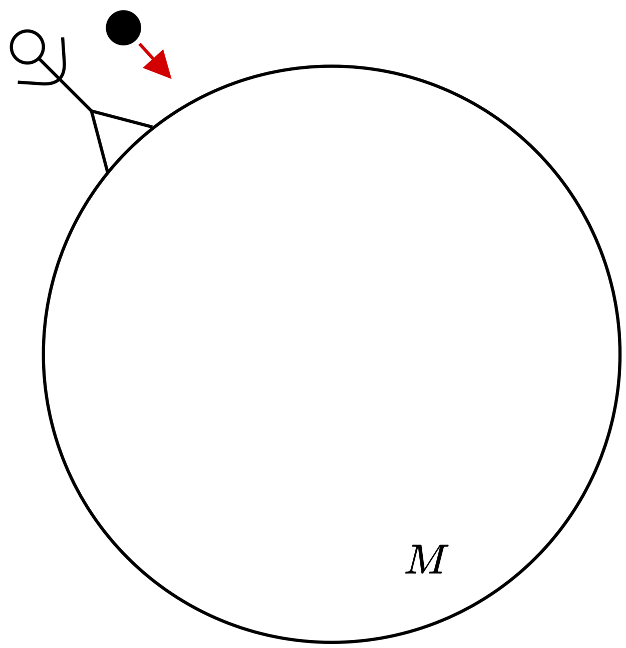
Beispiel: *Gravitationsfeld*

Nahbereich:

$$\vec{F} = m \cdot \mathrm{g} \cdot \vec{\mathrm{e}}_r$$

Allgemein:

$$\vec{F} = \mathrm{G} \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{\mathrm{e}}_r$$



Felder in der Elektrotechnik I

Elektrisches Feld: Umgebung von Ladungen

Magnetisches Feld: Umgebung von Strömen (d.h. bewegten Ladungen)

Betrachung von beiden Phänomenen:

Elektromagnetisches Feld

Felder in der Elektrotechnik II

Unterscheidung von drei Szenarien

1. Eletrostatisches Feld

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$$

2. Stationäres Strömungsfeld

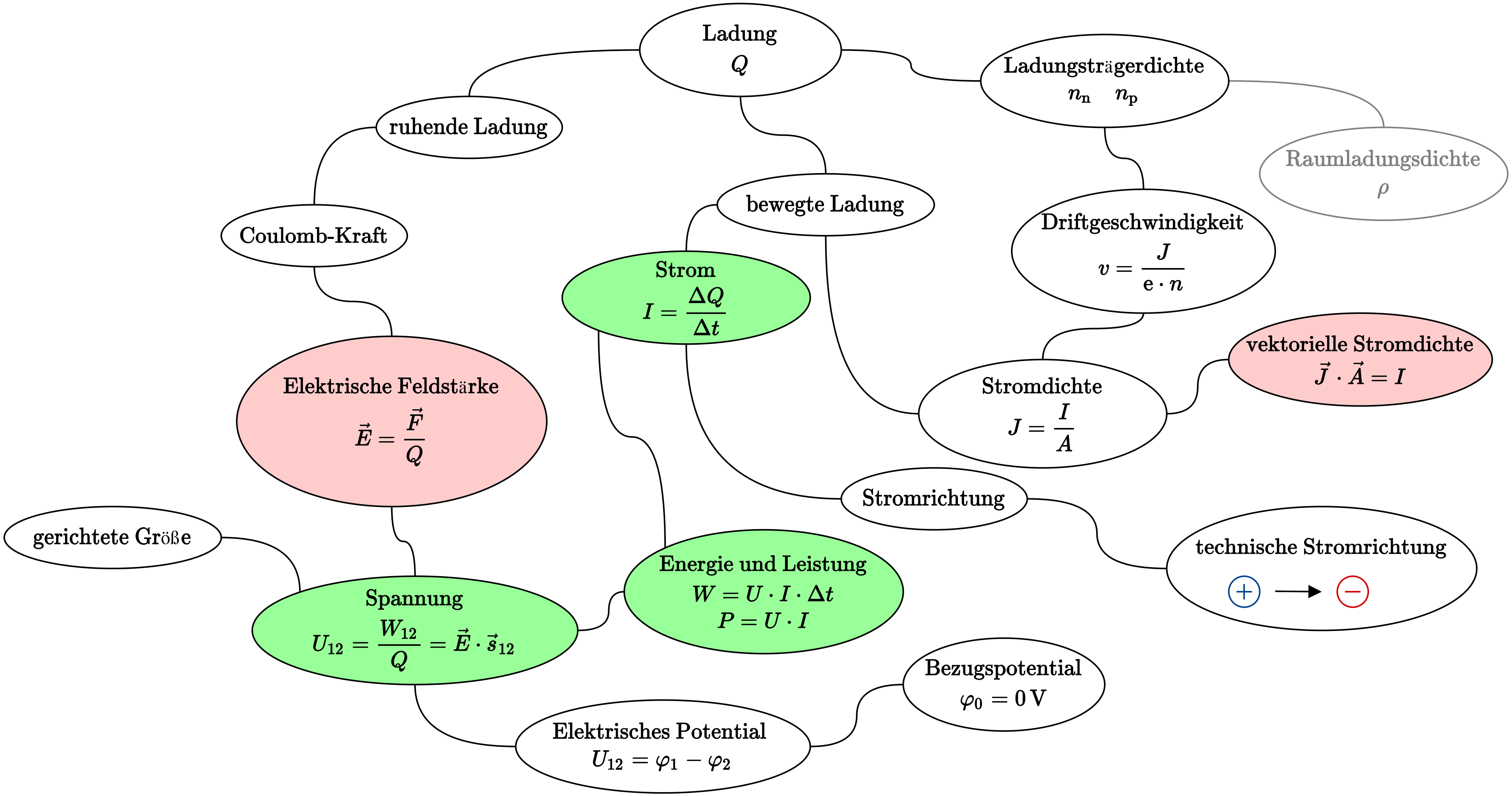
$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I$$

3. Wechselfeld

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = i(t)$$

Zusammenfassung

Zusammenfassung



Referenzen

[1] M. Albach, *Elektrotechnik,* Pearson Verlag.

[2] G. Hagmann, *Grundlagen der Elektrotechnik,* Aula Verlag.

